# Topos de Grothendieck

14 janvier 2021

# Introduction

On veut donner un cadre général à la notion de faisceau d'ensemble.

Un faisceau $F$ est un foncteur contravariant $F : \mathrm{Ouv}(X) \to \mathbf{Ens}$ qui vérifie des conditions de recollements.

On veut remplacer $\mathrm{Ouv}(X)$ par une catégorie $\mathscr{C}$.

**Définition**

Un *préfaisceau $F$ sur $\mathscr{C}$* est un foncteur contravariant $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Ens}$.

Faisceau ?

# Crible

## Définition

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie et $A$ un objet de $\mathscr{C}$. Un *crible* $S$ de $A$ est un ensemble de flèches de but $A$ vérifiant :

$$f \in S \Longrightarrow f \circ g \in S.$$

## Exemple

Soient $X$ un espace topologique et $\mathrm{Ouv}(X)$ la catégorie des ouverts de $X$. Si $U$ est un ouvert de $X$, un crible de $U$ est un ensemble d'ouverts inclus dans $U$ qui contient tout ouvert inclus dans un de ses ouverts.

# Topologie de Grothendieck

## Définition

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. *Une topologie de Grothendieck* sur $\mathscr{C}$ et la donnée pour tout objet $A$ de $\mathscr{C}$ d'un ensemble $J(A)$ de cribles de $A$ tel que les axiomes suivants soient vérifiés :

1. pour tout objet $A$, $\mathrm{Hom}(-, A)$ appartient à $J(A)$ ;
2. pour tous objets $A$ et $B$, tout crible $S$ de $B$ et toute flèche $h : A \to B$, si $S$ appartient à $J(B)$ alors $h^{-1}(S)$ appartient à $J(A)$ ;
3. pour tout objet $B$, tous cribles $S$ et $R$ de $B$, si $S \in J(B)$ et que pour tout $h : A \to B$ dans $S$, $h^{-1}(R)$ apppartient à $J(A)$, alors $R$ appartient aussi à $J(B)$.

# Topologie de Grothendieck

## Définition

Un *site* est un couple $(\mathscr{C}, J)$ où $J$ est une topologie de Grothendieck sur $\mathscr{C}$.

Les cribles de $J(A)$ sont les *cribles couvrants de* $A$.

## Définition

Si $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Ens}$ est un préfaisceau et $S$ un crible couvrant de $A$, une *famille cohérente de sections sur* $S$ est le choix pour tout $f : B \to A \in S$ d'un élément $x_f \in F(B)$ tel que pour tout $g : C \to B$, $x_{f \circ g} = F(g)(x_f)$.

# Faisceau sur un site

**Définition**

Un préfaisceau $F$ sur $\mathscr{C}$ est un *faisceau* si pour tout crible couvrant $S$ de $A$ et toute famille cohérente $(x_f)_{f \in S}$ de sections sur $S$, il existe un unique élément $x \in F(A)$ tel que pour toute flèche $g : B \to A$, $F(g)(x) = x_g$.

Les faisceaux sur $\mathscr{C}$ forment une catégorie notée $\tilde{\mathscr{C}}$.

Ces catégories ont de bonnes propriétés.

# Topos de Grothendieck

### Définition

Un *topos de Grothendieck* est une catégorie équivalente à une catégorie de faisceaux sur un site.

### Exemple

Si $X$ est un espace topologique, on note $\mathbf{Top}(X)$ la catégorie des faisceaux sur $X$. Il s'agit d'un topos de Grothendieck.

# Morphisme de topos

Une application continue $f : X \to Y$ donne un foncteur $f^{-1} : \mathrm{Ouv}(Y) \to \mathrm{Ouv}(X)$. Le foncteur $f^{-1}$ induit en composant à droite un foncteur $f_* : \mathrm{Top}\, X \to \mathrm{Top}\, Y$ qui admet un adjoint $f^*$ à gauche qui preserve les limites finies.

## Définition

Un *morphisme de topos u de E vers E′* est un couple de foncteur $(u_*, u^*)$ tel que $u^*$ est l'adjoint à gauche de $u_*$ et tel que $u^*$ préserve les limites finies.

# Fidélité du foncteur Top

Le foncteur Top voit les espaces comme des catégories d'ouverts. Si $f$ est une application continue, le foncteur $f_*$ est une équivalence si $f^{-1}$ en est une.

La relation d'ordre sur les ouverts est donnée par l'appartenance.

$$x \in U \iff \overline{\{x\}} \cap U \neq \emptyset.$$

On peut définir la relation d'ordre sur les ouverts par

$$U \subset V \iff \forall Z, Z \cap U \neq \emptyset \implies Z \cap V \neq \emptyset.$$

# Espace sobre

## Définition

Un espace topologique $X$ est *sobre* si tout fermé irréductible de $X$ admet exactement un point générique. On note $\mathbf{Esp}^{\mathrm{Sob}}$ la catégorie des espaces sobres.

## Exemple

Les espaces séparés et ceux sous-jacents aux schémas sont sobres.

# Espace sobre

**Proposition**

Le foncteur d'oubli $\mathbf{Esp}^{\mathrm{Sob}} \to \mathbf{Esp}$ admet un adjoint à gauche noté $\mathrm{Sob} : \mathbf{Esp} \to \mathbf{Esp}^{\mathrm{Sob}}$. On appel $\mathrm{Sob}(X)$ *l'espace sobre associé à* $X$.

**Démonstration.**

Points de $\mathrm{Sob}(X)$ : fermés irréductibles de $X$.
Ouverts de $\mathrm{Sob}(X)$ : $\{Z$ fermé irréductible de $X | Z \cap U \neq \emptyset\}$ où $U$ est un ouvert de $X$. □

**Proposition**

L'application $x \mapsto \overline{\{x\}}$ induit une équivalence de topos entre $\mathrm{Top}(X)$ et $\mathrm{Top}(\mathrm{Sob}(X))$.

# Point d'un topos

Si $x$ est un point de $X$, on a une inclusion $\{x\} \hookrightarrow X$. Cette application induit un morphisme de topos $x : \mathrm{Top}(\{x\}) \to \mathrm{Top}(X)$. Le topos $\mathrm{Top}(\{x\})$ est la catégorie des ensembles.

## Définition

Soit $E$ un topos. Un *point de $E$* est un morphisme de topos $\xi : \mathbf{Ens} \to E$.

On note $\mathrm{Esp}(E)$ l'ensemble des points de $E$ à isomorphisme près.

La fibre de $F$ en $\xi$ est l'ensemble $\xi^*(F)$.

# Ouvert d'un topos

**Définition**

Soit $E$ un topos. Un *ouvert de* $E$ est un sous-objet de l'objet final de $E$.

Si $E$ est une catégorie de faisceau, l'objet final est le faisceau dont les ensembles de sections sont des singletons.

**Exemple**

Les ouverts de $\mathrm{Top}(X)$ sont les ouverts de $X$. Les sous-faisceaux du faisceau final sur $X$ sont ceux qui ont une unique section sur les ouverts inclus dans $U$ et aucune sur les autres où $U$ est un ouvert fixé.

# Espace associé à un topos

**Définition**

*L'espace associé à un topos* $E$ est l'espace topologique $\mathrm{Esp}(E)$ où les ouverts sont donnés par

$$|U| = \{\xi \in \mathrm{Esp}(E) | U_\xi \neq \emptyset\}$$

où $U$ est un ouvert de $E$.

Si $u : E \to E'$ est un morphisme de topos, on obtient une application continue $\mathrm{Esp}(u) : \mathrm{Esp}(E) \to \mathrm{Esp}(E')$ définie par $\mathrm{Esp}(u)(\xi) = u \circ \xi$.

**Proposition**

Si $X$ est un espace topologique, l'espace $\mathrm{Esp}(\mathrm{Top}(X))$ est homéomorphe à $\mathrm{Sob}(X)$.

# Construction des nombres réels

### Définition

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{Q}$. Un recouvrement $\mathscr{U}$ de $U$ est un *bon recouvrement* si tout intervalle fermé $I$ inclus dans $U$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts de $\mathscr{U}$.

Les cribles engendrés par les bons recouvrements forment une topologie de Grothendieck sur $\mathrm{Ouv}(\mathbb{Q})$. On note $\mathscr{Q}$ le site ainsi obtenu.

### Proposition

Le foncteur $\mathrm{Ouv}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Ouv}(\mathbb{Q})$, qui à un ouvert de $\mathbb{R}$ associe son intersection avec $\mathbb{Q}$, induit une équivalence entre les topos $\widetilde{\mathscr{Q}}$ et $\mathrm{Top}(\mathbb{R})$.

# Construction des nombres réels

**Corollaire**

*L'espace topologique* $\mathrm{Esp}(\widetilde{\mathscr{Q}})$ *est canoniquement homéomorphe à* $\mathbb{R}$*.*

Les ouverts de $\widetilde{\mathscr{Q}}$ sont ceux de $\mathbb{R}$.

**Exemple**

On peut construire $]-\infty, \sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ en considérant le faisceau défini par

$$F(]a,b[) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \sqrt{2} \in ]a,b[ \\ \{*\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est un faisceau sur $\mathscr{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$.

# Conclusion