Université de Rennes 1 Année 2023/2024

Algèbre et arithmétique 1
Contrôle du Jeudi 9 novembre 2023
Début 8h - Durée 1h

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion). Il va de soi que, sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être justifiée et tout énoncé doit être démontré ; et la rédaction doit *impérativement* être soignée.

1. (5 points) Résoudre l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0.$$

Solution: On calcule le discriminant

$$\Delta = 9(1+i)^2 - 20i = 9 \times 2i - 20i = 18i - 20i = -2i.$$

On cherche ses racines $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ en résolvant

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 = 2 \\ b^2 = a^2 \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ ab = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = 1 \\ |b| = 1 \\ ab = -1. \end{cases}$$

On trouve donc $1 - i$ et $-1 + i$ et les solutions de l'équation originale sont donc

$$z_1 := \frac{3(1+i) + 1 - i}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad z_2 := \frac{3(1+i) - 1 + i}{2} = 1 + 2i.$$

2. (5 points) Déterminer le rapport, l'angle et le centre de la similitude qui transforme le point $\binom{0}{0}$ en $\binom{1}{1}$ et le point $\binom{2}{0}$ en $\binom{1}{2}$.

Solution: On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que le point d'affixe z soit transformé en le point d'affixe $z' := \alpha z + \beta$ en résolvant

$$\begin{cases} 1 + i = \alpha \times 0 + \beta \\ 1 + 2i = \alpha \times 2 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + i = \beta \\ 1 + 2i = 2\alpha + 1 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 + i \\ \alpha = i/2. \end{cases}$$

On trouve donc $z' = \frac{i}{2}z + 1 + i$. On en déduit immédiatement que le rapport vaut $1/2$ et que l'angle vaut $\pi/2 \mod 2\pi$. On détermine l'affixe ω du centre par la formule

$$\omega = \frac{\beta}{1 - \alpha} = \frac{1+i}{1 - i/2} = \frac{2(1+i)}{2 - i} = \frac{2(1+i)(2+i)}{5} = \frac{2(1+3i)}{5}$$

et on voit donc que le centre est le point $\binom{2/5}{6/5}$.

3. (5 points) La proposition $(\star)$ est elle une tautologie ?

$$(\star) \quad \Big((\text{non}\,\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\text{non}\,\mathcal{P} \Rightarrow \text{non}\,\mathcal{Q})\Big) \Leftrightarrow \mathcal{P}.$$

Solution: On effectue la table de vérité :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	non $\mathcal{P}$	non $\mathcal{Q}$	non $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	non $\mathcal{P} \Rightarrow$ non $\mathcal{Q}$	$\big($(non $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$) et (non $\mathcal{P} \Rightarrow$ non $\mathcal{Q}$)$\big)$	$(\star)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	F	V

C'est donc bien une tautologie.

4. (5 points) Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$(A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = E) \Leftrightarrow (B = E \setminus A).$$

Solution: (en utilisant uniquement les définitions) Supposons que

$$A \cap B = \emptyset \text{ et } A \cup B = E.$$

Soit $x \in B$. Comme $B \subset E$, on a $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$. Or $A \cap B = \emptyset$. Contradiction. Donc $x \notin A$ si bien que $x \in E \setminus A$. Cela montre que $B \subset E \setminus A$. Inversement, soit $x \in E \setminus A$. Alors, $x \in E$ et $x \notin A$. Comme $E = A \cup B$, on a $x \in A$ ou $x \in B$. Puisque $x \notin A$, nécessairement $x \in B$. Cela montre que $E \setminus A \subset B$. On a donc obtenu par double inclusion que $B = E \setminus A$.
Supposons maintenant que

$$B = E \setminus A.$$

Supposon $A \cap B \neq \emptyset$. Soit $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$. Or $B = E \setminus A$. Donc $x \notin A$. Contradiction. Donc $A \cap B = \emptyset$. Soit maintenant $x \in A \cup B$. On a donc $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, puisque $A \subset E$, alors nécessairement $x \in E$. Sinon, $x \in B$ et comme $B \subset E$, on a de nouveau $x \in E$. On a donc montré par disjonction des cas que $x \in E$. Cela prouve que $A \cup B \subset E$. Inversement, supposons que $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$. Sinon, $x \notin A$ et donc $x \in E \setminus A$. Or on a supposé que $E \setminus A = B$ si bien que $x \in B$ et donc $x \in A \cup B$. On a montré par disjonction des cas que $x \in A \cup B$. Cela prouve que $E \subset A \cup B$. On a donc obtenu par double inclusion que $A \cup B = E$.
(Solution rapide avec les lois de Morgan : Si $A \cap B = \emptyset$, alors $B \subset A^c$. Si $A \cup B = E$, alors $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = E^c = \emptyset$ et donc aussi $A^c \subset B^{cc} = B$. Inversement, on a $A \cap A^c = \emptyset$ mais aussi $A \cup A^c = A^{cc} \cup A^c = (A^c \cap A)^c = \emptyset^c = E$.)