NOM :	Prénom :

Licence 1 — Mathématiques
Université Rennes 1

Algèbre et géométrie 1
2021–2022

Contrôle continu 3
Durée : 25 minutes

Les calculatrices et téléphones sont interdits.
Toute affirmation doit être démontrée.
On pourra rédiger directement sur la feuille.

Exercice 1 5 points

Soient $P\left(\begin{smallmatrix}-5\\-1\end{smallmatrix}\right)$ et $Q\left(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right)$. On note $\Delta = (PQ)$ la droite passant par P et Q.

1. Déterminez un vecteur directeur de Δ.
2. Donnez une équation cartésienne de Δ.

1) Un vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}4-(-5)\\2-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$ 2

2) Une équation cartésienne de Δ est
$3x-9y+c=0$ avec c une constante réelle à déterminer.
Comme Δ passe par $Q\left(\begin{smallmatrix}4\\2\end{smallmatrix}\right)$, on obtient $c = 9\cdot 2 - 3\cdot 4 = 6$.

Une équation de Δ est donc : $3x-9y+6=0$ 3

Exercice 2 6 points

Soient P, Q et R trois points dans le plan.

1. Soit H le point défini par $\overrightarrow{PH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{PQ}$. Exprimez H comme barycentre de P et Q.
2. Soit M le milieu de $\{H, R\}$. Exprimez M comme barycentre de P, Q et R.

1) Montrons que $H = \mathrm{bar}((P,2),(Q,3))$:

$\overrightarrow{PH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{PQ}$ (mult. par 5)

$5\overrightarrow{PH} = 3\overrightarrow{PQ}$ (Chasles)

$5\overrightarrow{PH} = 3(\overrightarrow{PH}+\overrightarrow{HQ})$ ($\overrightarrow{QH} = -\overrightarrow{HQ}$)

$5\overrightarrow{PH} - 3\overrightarrow{PH} + 3\overrightarrow{QH} = 0$

$2\overrightarrow{PH} + 3\overrightarrow{QH} = 0$ 3

2) Par définition de milieu,

$M = \mathrm{bar}((H,1),(R,1))$

$= \mathrm{bar}((H,5),(R,5))$ 1

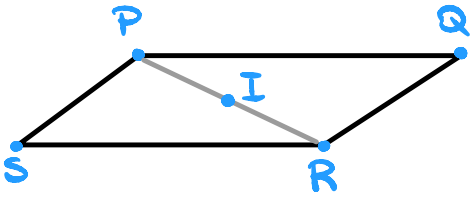
$= \mathrm{bar}((H,2+3),(R,5))$ (associativité du barycentre)

$= \mathrm{bar}((P,2),(Q,3),(R,5))$ 2

Exercice 3

6 points

Soit (P, Q, R, S) un parallélogramme. Démontrez que ses diagonales s'intersectent en leur milieu.



0,5

Soit I le milieu de $\{P, R\}$.
Il suffit de montrer que I est aussi le milieu de $\{Q, S\}$.

1,5

Par définition de milieu, on a

$\vec{IP} + \vec{IR} = 0$ (Chasles)

$(\vec{IS} + \vec{SP}) + (\vec{IQ} + \vec{QR}) = 0$

Or, $\vec{SP} = \vec{RQ} = -\vec{QR}$ car (P,Q,R,S) est un parallélogramme. On obtient

$\vec{IS} - \vec{QR} + \vec{IQ} + \vec{QR} = 0$

$\vec{IS} + \vec{IQ} = 0$ c'est-à-dire I est le milieu de $\{Q, S\}$. $\boxtimes$

4

Exercice 4

6 points

Soient $A\left(\begin{smallmatrix}-5\\4\end{smallmatrix}\right)$ et $B\left(\begin{smallmatrix}1\\-4\end{smallmatrix}\right)$. On note S l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -16$. Déterminez une équation de S.

Soit $M\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ un point du plan.

0,5

On calcule $\vec{AM} : \begin{pmatrix} x-(-5) \\ y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+5 \\ y-4 \end{pmatrix}$

$\vec{BM} : \begin{pmatrix} x-1 \\ y-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$

1

Le point M appartient à S si et seulement si

$$-16 = \vec{AM} \cdot \vec{BM}$$
$$= \begin{pmatrix} x+5 \\ y-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y+4 \end{pmatrix}$$
$$= (x+5)(x-1) + (y-4)(y+4)$$
$$= x^2 + 4x - 5 + y^2 - 16.$$

4

Une équation de S est donc donnée par $x^2 + 4x - 5 + y^2 = 0$.

0,5