NOM :	Prénom :

Licence 1 — Mathématiques
Université Rennes 1

Algèbre et géométrie 1
2022–2023

Contrôle continu 2
Durée : 25 minutes

Les calculatrices et téléphones sont interdits.
Sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être soigneusement démontrée ; la rédaction est prise en compte dans l'évaluation.
On pourra rédiger directement sur la feuille.

Exercice 1 6 points

On considère les nombres complexes $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Déterminer les formes exponentielles respectives de z_1 et de z_2.
2. En déduire la forme exponentielle de $w = z_1/z_2^2$, puis en déterminer la partie réelle et imaginaire.

1. On denote $R_1e^{i\theta_1}$ (resp. $R_2e^{i\theta_2}$) la forme exponentielle de z_1 (resp. z_2)

Le module de z_1 est $R_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2.$ 0,5

Donc $R_1e^{i\theta_1} = 2e^{i\theta_1} = 2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).$

L'argument θ_1 satisfait $\cos\theta_1 = -1/2$, $\sin\theta_1 = \sqrt{3}/2$, donc $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ modulo 2π 1

Le module de z_2 est $R_2 = |z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$ 0,5

Donc $R_2e^{i\theta_2} = \sqrt{2}e^{i\theta_2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2).$

L'argument θ_2 satisfait $\cos\theta_2 = 1/\sqrt{2}$, $\sin\theta_2 = 1/\sqrt{2}$, donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π 1

2. La forme exponentielle de $w = z_1/z_2^2$ est

$$\frac{R_1e^{i\theta_1}}{(R_2e^{i\theta_2})^2} = \frac{2e^{i\frac{2}{3}\pi}}{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^2} = \frac{2e^{i\frac{2}{3}\pi}}{2e^{i\pi/2}} = e^{i(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})\pi} = e^{i\pi/6} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$$ 2

La partie réelle de w est $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la partie imaginaire $\sin(\pi/6) = 1/2$ 1

Exercice 2 5,5 points

Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 - 4\sqrt{7}i$.

On cherche les nombres complexes $w = a+ib$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $w^2 = 3-4\sqrt{7}i$. 0,5

En prenant les modules, on a

$|w^2| = |w|^2 = a^2+b^2 = |3-4\sqrt{7}i| = \sqrt{3^2+(4\sqrt{7})^2} = \sqrt{9+112} = 11$ 1

De plus, on regarde partie réelle et imaginaire de

$w^2 = 3-4\sqrt{7}i$

$(a+ib)^2 = (a^2-b^2) + i(2ab) = 3-4\sqrt{7}i$ 2

On obtient donc le système
$$\begin{cases} a^2+b^2 = 11 \\ a^2-b^2 = 3 \\ 2ab = -4\sqrt{7} \end{cases}$$

$(a^2+b^2)+(a^2-b^2) = 11+3$ 2

$2a^2 = 14$

$a = \sqrt{7}$ ou $a = -\sqrt{7}$

Le premier cas donne $b = -2\sqrt{7}/a = -2$, le deuxième $b = -4\sqrt{7}/a = 2$.

Les racines sont $w_1 = \sqrt{7}-2i$ et $w_2 = -\sqrt{7}+2i$.

Exercice 3 5 points

Linéariser l'expression $\sin^3(2x)$.

$$\sin^3(2x) = (\sin(2x))^3$$

$$= \left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3 \quad \text{(Euler)} \qquad 1$$

$$= \frac{(e^{2ix})^3 + 3(e^{2ix})^2(-e^{-2ix}) + 3(e^{2ix})(-e^{-2ix})^2 + (-e^{-2ix})^3}{(2i)^3} \quad \text{(Binome de Newton)} \qquad 1$$

$$= \frac{e^{6ix} - 3e^{2ix} + 3e^{-2ix} - e^{-6ix}}{-8i} \qquad 1$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{e^{6ix}-e^{-6ix}}{2i}\right) - 3\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)\right] \quad \text{(factoriser)} \qquad 1$$

$$= -\frac{1}{4}(\sin(6x) - 3\sin(2x)) \quad \text{(Euler} \times 2\text{)} \qquad (0{,}5)\times 2$$

Exercice 4 5 points

Représenter dans le plan complexe (on fera un dessin) l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait la condition

$$|z-3-i| = |z+5+3i|.$$

Soit $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. 0,5

On calcule

$$|z-3-i| = |x+iy-3-i| = |(x-3)+i(y-1)| = \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} \qquad 1$$

$$|z+5+3i| = |x+iy+5+3i| = |(x+5)+i(y+3)| = \sqrt{(x+5)^2+(y+3)^2} \qquad 1$$

La condition devient

$$(x-3)^2+(y-1)^2 = (x+5)^2+(y+3)^2 \qquad 0{,}5$$

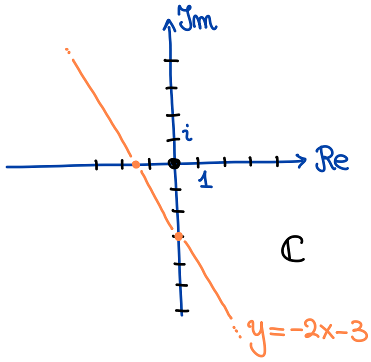
$$x^2-6x+9+y^2-2y+1 = x^2+10x+25+y^2+6y+9$$

$$-6x-10x+9+1-25-9 = 6y+2y$$

$$-16x-24 = 8y \qquad 1$$

$$-2x-3 = y$$

C'est l'équation d'une droite



1