NOM :	Prénom :

Licence 1 — Mathématiques
Université Rennes 1

Algèbre et géométrie 1
2022–2023

Contrôle continu 2
Durée : 25 minutes

Les calculatrices et téléphones sont interdits.
Sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être soigneusement démontrée ; la rédaction est prise en compte dans l'évaluation.
On pourra rédiger directement sur la feuille.

Exercice 1 6 points

On considère les nombres complexes $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.

1. Déterminer les formes exponentielles respectives de z_1 et de z_2.
2. En déduire la forme exponentielle de $w = z_1/z_2^2$, puis en déterminer la partie réelle et imaginaire.

1. On denote $R_1 e^{i\theta_1}$ (resp. $R_2 e^{i\theta_2}$) la forme exponentielle de z_1 (resp. z_2)

Le module de z_1 est $R_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. 0,5

Donc $R_1 e^{i\theta_1} = 2e^{i\theta_1} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$.

L'argument θ_1 satisfait $\cos\theta_1 = -1/2$, $\sin\theta_1 = \sqrt{3}/2$, donc $\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ modulo 2π 1

Le module de z_2 est $R_2 = |z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. 0,5

Donc $R_2 e^{i\theta_2} = \sqrt{2}e^{i\theta_2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.

L'argument θ_2 satisfait $\cos\theta_2 = 1/\sqrt{2}$, $\sin\theta_2 = 1/\sqrt{2}$, donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π 1

2. La forme exponentielle de $w = z_1/z_2^2$ est

$$\frac{R_1 e^{i\theta_1}}{(R_2 e^{i\theta_2})^2} = \frac{2e^{i\frac{2}{3}\pi}}{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^2} = \frac{2e^{i\frac{2}{3}\pi}}{2e^{i\pi/2}} = e^{i(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})\pi} = e^{i\pi/6} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)$$ 2

La partie réelle de w est $\cos(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la partie imaginaire $\sin(\pi/6) = 1/2$ 1

Exercice 2

Déterminer les racines carrées du nombre complexe $3 - 4\sqrt{7}i$.

On cherche complexes $w = a$ tels que

Exercice 3 5 points

Linéariser l'expression $\sin^3(2x)$.

Exercice 4

Représenter dans le plan complexe (on fera un dessin) l'ensemble des points dont l'affixe z satisfait la condition

$$|z-3-i| = |z+5+3i|.$$

1