Université de Rennes 1 Année 2018/2019

Algèbre et géométrie 1
Épreuve du jeudi 15 novembre
Début 13h30 - Durée 4h

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion). Il va de soi que, sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être justifiée et tout énoncé doit être démontré.

Les étudiants bénéficiant d'un aménagement pour raison médicale choisiront entre l'exercice 2 et l'exercice 5 d'une part et entre l'exercice 3 et l'exercice 4 d'autre part. Ils indiqueront clairement leur choix en tête de leur copie.

1. Question de cours : énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. (Rappelons que l'énoncé d'un théorème ne se limite pas à une formule, et que les notations utilisées doivent être expliquées.)

2. Dans cet exercice, x est un nombre réel quelconque.
   (a) Linéariser l'expression $(\sin x)^6$.
   (b) L'application
   $$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\sin t)^6 \end{array}\right.$$
   est-elle continue ?
   (c) Déduire des questions précédentes la valeur de
   $$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin t)^6 \, dt.$$

3. Soient p et q deux nombres réels, avec $p < 0$ et $4p^3 + 27q^2 \leq 0$. On cherche ici à résoudre l'équation
   $$z^3 + pz + q = 0, \qquad z \in \mathbb{R}.$$
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que
   $$\cos(3\theta) = 4(\cos\theta)^3 - 3\cos\theta.$$
   (Indication : on pourra développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$.)
   (b) Montrer qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$, que l'on explicitera en fonction de p, tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait
   $$(\lambda\cos\theta)^3 + p\lambda\cos\theta + q = \frac{\lambda^3}{4}\cos(3\theta) + q$$
   (c) Montrer que l'équation
   $$\frac{\lambda^3}{4}\cos(3\theta) = -q, \qquad \theta \in \mathbb{R},$$
   a des solutions.

(d) Dans le cas particulier $p = -3$ et $q = 2$, déterminer λ, résoudre l'équation

$$\frac{\lambda^3}{4}\cos(3\theta) = -q, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

et calculer $\lambda \cos\theta$ pour les valeurs de θ obtenues.

(e) À l'aide des réponses précédentes, résoudre l'équation

$$z^3 - 3z + 2 = 0, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

4. On considère les deux applications $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par

$$f(z) = z^3 + 2 - 2i \quad \text{et} \quad g(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i.$$

(a) Déterminer le module et l'argument de chacun des $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) = 0$.

(b) Les représenter dans le plan.

(c) Montrer qu'ils forment un triangle équilatéral.

(d) Montrer qu'il existe un unique $r \in \mathbb{R}$ que l'on déterminera tel que $g(r) = 0$.

(e) Déterminer $u, v \in \mathbb{C}$ tels que $g(z) = (z - r)(z^2 - uz + v)$.

(f) Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $g(z) = 0$.

(g) Les représenter dans le plan.

(h) Montrer qu'ils forment un triangle rectangle.

5. Soient A, B, C, D quatre points distincts tels que $(AB)/\!/(CD)$. On suppose que (AD) et (BC) sont sécantes en K, que (AC) et (BD) sont sécantes en L et on désigne par I et J les milieux respectifs de $\{A, B\}$ et $\{C, D\}$. On va montrer que les points I, J, K, L sont alignés. On écrit $\overrightarrow{DC} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$.

(a) Faire un dessin.

(b) Dire pourquoi il existe μ tel que $\overrightarrow{KD} = \mu\, \overrightarrow{KA}$.

(c) Montrer que

$$\overrightarrow{KC} - \mu\overrightarrow{KB} = (\lambda - \mu)\overrightarrow{AB}.$$

En déduire que $\lambda = \mu$ si bien que $\overrightarrow{KD} = \lambda\, \overrightarrow{KA}$.

(d) Dire pourquoi on a aussi $\overrightarrow{KC} = \lambda\, \overrightarrow{KB}$.

(e) En déduire que $\overrightarrow{KJ} = \lambda\, \overrightarrow{KI}$.

(f) Conclure.

6. On se donne trois réels strictement positifs C, R_1, R_2 (condensateur et résistances) et on considère l'application (de transfert de filtre)

$$T : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto \alpha\frac{1 + ia\omega}{1 + ib\omega}$$

avec

$$\alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \quad a = R_1 C \quad \text{et} \quad b := \alpha a.$$

(a) Montrer que

$$\forall \omega \in \mathbb{R}_{>0}, \quad T(\omega) = \alpha + (1-\alpha)\frac{1}{1 - i\frac{1}{b\omega}}.$$

(b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M d'affixe $z := 1 - i\frac{1}{b\omega}$ avec $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ est une demi-droite que l'on déterminera.

(c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M_1 d'affixe $\dfrac{1}{z}$ lorsque le point M d'affixe z parcourt $\mathcal{D}$ est un demi-cercle que l'on déterminera.

(d) En déduire l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M_2 d'affixe $(1-\alpha)\dfrac{1}{z}$ lorsque M parcourt $\mathcal{D}$.

(e) Décrire finalement l'ensemble $\mathcal{C}'$ des points M' d'affixe $\alpha + (1-\alpha)\dfrac{1}{z}$ lorsque M parcourt $\mathcal{D}$.

(f) On désigne maintenant par $\theta \in [0, 2\pi[$ le maximum de $A(\omega) := \arg(T(\omega))$ lorsque $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$: le point N' de $\mathcal{C}'$ correspondant est celui en lequel la tangente passe par l'origine. Exprimer $\sin(\theta)$ en fonction de α.

(g) On suppose dorénavant que $\theta = \pi/6$. Calculer la valeur correspondante de α et en déduire R_2 en fonction de R_1.

(h) Déterminer le point N de $\mathcal{D}$ correspondant à N'.

(i) Représenter graphiquement $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}'$ ainsi que les points N et N' (avec une unité de 9 cm).

(j) On suppose enfin que $\omega = 1000$ $(1kHz)$. Donner la valeur de b puis celle de C en fonction de R_1.

7. Notons $\mathcal{P}$ le plan euclidien. Soit $f \colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ une application qui vérifie :

$$\forall (P,Q) \in \mathcal{P}^2 \qquad \|\overrightarrow{f(P)\,f(Q)}\| = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

(a) Montrer que l'application f est injective.

(b) On notera A et B deux points quelconques du plan, et α et β deux nombres réels vérifiant $\alpha + \beta > 0$.

i. Considérons l'application

$$\sigma \colon \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ P & \longmapsto \quad \alpha\,\overrightarrow{PA}^2 + \beta\,\overrightarrow{PB}^2. \end{cases}$$

Notons G le barycentre de $((A,\alpha),(B,\beta))$. Montrer que l'application σ a un unique minimum en G, c'est-à-dire

$$\forall P \in \mathcal{P} \qquad \sigma(P) \geq \sigma(G),$$

avec égalité si et seulement si $P = G$.

ii. Montrer que

$$\sigma(G) = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}^2.$$

iii. Considérons maintenant l'application

$$\tau : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Q & \longmapsto & \alpha \overrightarrow{Q\,f(A)}^2 + \beta \overrightarrow{Q\,f(B)}^2. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un unique point $G' \in \mathcal{P}$ où τ est minimale, et décrire G' comme un barycentre des points $f(A)$ et $f(B)$. Calculer $\tau(G')$.

iv. Montrer que $\tau \circ f = \sigma$.

v. Montrer que $G' = f(G)$.

(c) Soient P, Q et R trois points de $\mathcal{P}$, non alignés. Montrer que tout point de $\mathcal{P}$ est un barycentre de P, Q et R avec des poids bien choisis (dépendants du point considéré).

(d) Montrer que les points $f(P)$, $f(Q)$ et $f(R)$ ne sont pas alignés. (Indication : on pourra utiliser l'inégalité triangulaire et ses cas d'égalité.)

(e) En déduire que l'application f est surjective.