Université de Rennes 1 Année 2019/2020

Algèbre et géométrie 1
Épreuve du jeudi 24 octobre
Début 9h40 - Durée 20 mn

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion). Il va de soi que, sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être justifiée et tout énoncé doit être démontré. On pourra rédiger directement sur la feuille.

1. Mettre le nombre complexe z sous forme algébrique (partie réelle et partie imaginaire) ainsi que sous forme exponentielle (module et argument) :
   (a) $z = (1 - i)^2$.

   Solution: On a
   $$z = 1 - 2i - 1 = -2i = 2e^{3i\pi/2}.$$
   Donc $\mathrm{Re}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) = -2, |z| = 2, \arg(z) = 3\pi/2 \mod 2\pi$.

   (b) $z = \dfrac{-4}{1 + i\sqrt{3}}$.

   Solution: On a
   $$z = \frac{-4(1 - i\sqrt{3})}{4} = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{2i\pi/3}.$$
   Donc $\mathrm{Re}(z) = -1, \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}, |z| = 2, \arg(z) = 2\pi/3 \mod 2\pi$.

   (c) $z = (1 + i)^3$.

   Solution: On a
   $$z = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}.$$
   Donc $\mathrm{Re}(z) = -2, \mathrm{Im}(z) = 2, |z| = 2\sqrt{2}, \arg(z) = 3\pi/4 \mod 2\pi$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$.

Solution: On calcule le discriminant
$$\Delta = (-2i)^2 - 4(-1 + 2i) = -4 + 4 - 8i = -8i.$$
On détermine les racines carrée de Δ en cherchant $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(a+ib)^2 = -8i$. On doit donc résoudre le système
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 8 \\ a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -8. \end{cases}$$

Des deux premières équations, on tire $a^2 = b^2 = 4$ et de la dernière $ab < 0$. Les deux racines de Δ sont donc $2 - 2i$ et $-2 + 2i$. On en déduit les solutions

$$z_1 = \frac{2i + 2 - 2i}{2} = 1 \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2i - 2 + 2i}{2} = -1 + 2i.$$

3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $w = \dfrac{1+z}{1-z}$. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement si w est un imaginaire pur.

Solution: On propose plusieurs méthodes :

1. On sait que w est un imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(w) = 0$. Or on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(w) &= \frac{w + \overline{w}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) \\ &= \frac{(1+z)(1-\overline{z}) + (1-z)(1+\overline{z})}{2(1-z)(1-\overline{z})} \\ &= \frac{1 - |z|^2}{|1-z|^2}.\end{aligned}$$

On voit donc que $\mathrm{Re}(w) = 0$ si et seulement si $1 - |z|^2 = 0$, c'est à dire $|z| = 1$.

2. On peut écrire $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et on a alors

$$w = \frac{1 + a + ib}{1 - a - ib} = \frac{(1 + a + ib)(1 - a + ib)}{(1-a)^2 + b^2} = \frac{1 - a^2 - b^2 + 2ib}{(1-a)^2 + b^2}.$$

On voit donc que w est un imaginaire pur si et seulement si $1 - a^2 - b^2 = 0$, c'est à dire $a^2 + b^2 = 1$ ou encore $|z| = 1$.

3. Si $|z| = 1$, on peut écire $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et on a alors (en divisant en haut et en bas par $e^{i\theta/2}$)

$$w = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

qui est bien un imaginaire pur. Réciproquement, si w est un imaginaire pur, on peut écrire $w = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. On aura donc $ib = \dfrac{1+z}{1-z}$, si bien que $(1-z)ib = 1 + z$ ou encore $(1 + ib)z = -1 + ib$ et finalement $z = \dfrac{-1+ib}{1+ib}$. On en déduit que

$$|z| = \frac{1 + b^2}{1 + b^2} = 1.$$