Licence de Mathématiques

AG1 : Algèbre et géométrie 1
Corrigé de l'épreuve du jeudi 26 octobre 2017
Début 15h35 - Durée 20 mn

La consultation de document et l'utilisation de calculette ne sont pas autorisées. Il est rappelé qu'en mathématiques, tout résultat doit être référencé ou démontré. Bon courage.

1) Soient E, F et G trois ensembles, et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.

Corrigé : Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. On aura alors $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$. Puisque $g \circ f$ est injective, cela implique que $x = y$. On voit donc que f est injective.

2) Soit z un nombre complexe tel que $z^5 = 1$ mais $z \neq 1$.

(a) Calculer $(z + z^4)^2$ en fonction de z^2 et de z^3.

Corrigé : Puisque $z^5 = 1$, on a $(z + z^4)^2 = z^2 + 2z^5 + z^8 = z^2 + 2 + z^3$.

(b) Calculer $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(1 - z)$ et en déduire la valeur de $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

Corrigé : Puisque $z^5 = 1$, on a $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(1 - z) = 1 - z^5 = 0$. Puisque $z \neq 1$, on a donc $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

(c) Que vaut $|z|$? En déduire que $z^4 = \overline{z}$.

Corrigé : On a $|z|^5 = |z^5| = 1$ et donc aussi $|z| = 1$. On voit donc que $z \times z^4 = |z|$ et il suit que $z^4 = \overline{z}$.

On écrit maintenant $z = x + iy$ avec x, y réels.

(d) Utiliser 2c) pour écrire $z + z^4$ en fonction de x.

Corrigé : On a $z + z^4 = z + \overline{z} = 2x$.

(e) Utiliser 2a) pour écrire $z^2 + z^3$ en fonction de x et de x^2.

Corrigé : On a $z^2 + z^3 = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$

(f) En déduire une égalité $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = P(x)$ ou P est un polynôme du second degré à coefficients réels que l'on déterminera.

Corrigé : On a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 1 + 2x + 4x^2 - 2 = 4x^2 + 2x - 1$.

(g) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Corrigé : On a $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

(h) Que vaut $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$? On pourra s'aider d'un dessin.

Corrigé : On a $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ (c'est la partie réelle de $z := e^{2i\pi/5}$ qui satisfait $z^5 = 1$ et $z \neq 1$ et on a $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) \geq 0$ car $0 \leq \dfrac{2\pi}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$).