Université de Rennes 1 Année 2018/2019

Algèbre et géométrie 1
Corrigé de l'épreuve du jeudi 25 Octobre

1. Puisque g est surjective, si $z \in C$, il existe $y \in B$ tel que $g(y) = z$. Puisque f aussi est surjective, il existe alors $x \in A$ tel que $f(x) = y$. On a ainsi
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$
2. Si l'on pose $j = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = e^{2i\pi/3}$, on a $j^3 = 1 = 1^3$, ce qui montre que notre application n'est pas injective.
3. On calcule le discriminant
$$\Delta = (i-3)^2 - 4(4-3i) = -1 - 6i + 9 - 16 + 12i = -8 + 6i.$$
Pour trouver ses racines sous la forme $a + ib$, on calcule d'abord
$$|\Delta| = \sqrt{64+36} = 10,$$
et on résout le système (module, partie réelle et partie imaginaire)
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10 \\ a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = 6. \end{cases}$$
On trouve $a^2 = 1$ et $b^2 = 9$ ainsi que $ab > 0$, ce qui fournit $1 + 3i$ et $-1 - 3i$. Les solutions de l'équation sont donc
$$z_1 = \frac{-(i-3)+1+3i}{2} = 2 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-(i-3)-1-3i}{2} = 1 - 2i.$$