Université de Rennes 1 Année 2019/2020

Algèbre et géométrie 1
Épreuve du mardi 23 juin
Début 14h - Durée 2h (à rendre *impérativement* avant 16h30).

Il va de soi que, sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être justifiée et tout énoncé doit être démontré. On pourra utiliser tout document ou outil comme aide à la décision mais en aucun cas comme argument mathématique.

1. Montrer que la proposition

$$((P \text{ ou } Q) \Rightarrow \text{non}(R)) \Leftrightarrow (R \Rightarrow (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)))$$

est une tautologie :

(a) en élaborant une table de vérité,

Solution: On désigne pour simplifier par Φ et Ψ respectivement les deux membres de l'équivalence. On construit alors la table de vérité :

P	V	V	V	V	F	F	F	F
Q	V	V	F	F	V	V	F	F
R	V	F	V	F	V	F	V	F
P ou Q	V	V	V	V	V	V	F	F
non(R)	F	V	F	V	F	V	F	V
Φ	V	V	V	V	V	V	V	F
non(P)	F	F	F	F	V	V	V	V
non(Q)	F	F	V	V	F	F	V	V
non(P) et non(Q)	F	F	F	F	F	F	V	V
Ψ	V	V	V	V	V	V	V	F
$\Phi \Leftrightarrow \Psi$	V	V	V	V	V	V	V	V

(b) en utilisant des tautologies déjà connues,

Solution: On sait que

$$((P \text{ ou } Q) \Rightarrow \text{non}(R)) \Leftrightarrow (\text{non}(\text{non}(R)) \Rightarrow \text{non}(P \text{ ou } Q))$$

(est une tautologie – c'est la contraposition) et on sait aussi que

$$(\text{non}(\text{non}(R)) \Leftrightarrow R \quad \text{et} \quad \text{non}(P \text{ ou } Q)) \Leftrightarrow (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)))$$

(sont des tautologies). L'assertion en découle.

(c) par un raisonnement logique.

Solution: On suppose la première implication satisfaite et on va en déduire que la seconde l'est aussi. Pour cela, on suppose que R est satisfaite et on montre qu'alors P et Q ne le sont pas. En effet, la première implication nous dit que si l'une des deux était satisfaite, alors R ne le serait pas et on aboutirait ainsi à une contradiction. On démontre la réciproque de la même façon.

2. (a) Soient $a, r, c \in \mathbb{C}$. Soient z_1, z_2 définis par les égalités

$$\begin{cases} (r-a) + i(r-a) = z_1 - a \\ (c-a) - i(c-a) = z_2 - a \end{cases}$$

et $z := \dfrac{z_1 + z_2}{2}$. Montrer que z ne dépend pas de a.

Solution: On a

$$\begin{aligned} z &= \frac{(r-a) + i(r-a) + a + (c-a) - i(c-a) + a}{2} \\ &= \frac{r + ir + c - ic}{2}. \end{aligned}$$

(b) Un ami littéraire a trouvé sur une île un parchemin indiquant « aller de l'arbre au rocher, tourner à gauche à angle droit, parcourir la même distance dans cette direction et planter un piquet ; aller ensuite de l'arbre à la croix, tourner à droite à angle droit, parcourir la même distance dans cette direction et planter un second piquet ; le trésor est à mi-chemin entre les deux piquets ». Votre ami s'est rendu sur l'île mais l'arbre a disparu depuis belle lurette. Saurez vous lui expliquer comment il peut néanmoins trouver le trésor ?

Solution: La mise en équations du problème nous ramène à la question précédente. On en déduit que la position du trésor ne dépend pas de la position de l'arbre. On peut donc imaginer que l'arbre était sur le rocher. Pour trouver le trésor, il suffit donc d' « aller du rocher à la croix, tourner à droite à angle droit, parcourir la même distance dans cette direction et planter un piquet ; le trésor est à mi-chemin entre le rocher et le piquet ». Remarque – il y a plus compliqué mais aussi plus simple : « aller du rocher vers la croix, s'arrêter à mi-chemin, tourner à droite à angle droit, parcourir la même distance dans cette direction ; le trésor est là. ».

3. Résoudre l'équation $z^2 - 5z + iz + 12 - 5i = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Solution: On calcule le discriminant

$$\Delta = (5-i)^2 - 4(12-5i) = 25 - 10i - 1 - 48 + 20i = -24 + 10i$$

ainsi que son module

$$|\Delta| = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26.$$

On cherche les racines $a + ib$ de Δ en résolvant le système

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 26 \\ a^2 - b^2 = -24 \\ ab = 10. \end{cases}$$

Celui-ci est équivalent à

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 25 \\ ab > 0. \end{cases}.$$

Les racines de Δ sont donc $1 + 5i$ et $-1 - 5i$. Les solutions de l'équation sont donc

$$z_1 := \frac{5 - i + 1 + 5i}{2} = 3 + 2i \quad \text{et} \quad z_2 := \frac{5 - i - 1 - 5i}{2} = 2 - 3i.$$

4. Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ trois droites distinctes du plan qui sont concourantes en un point G. Soit A un point de $\mathcal{D}$ distinct de G. Soit A' le symétrique[1] de A par rapport à G.
   (a) Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{F}$ tels que (A', B, G, C) est un parallélogramme.

   Solution: Il existe une unique droite $\mathcal{E}'$ parallèle $\mathcal{E}$ passant par A'. Si elle était parallèle à $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{E}$ aussi serait aussi parallèle à $\mathcal{F}$, or celles-ci sont sécantes. Donc $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}$ sont sécantes en un point C. On remarquera que $C \neq G$ car sinon on aurait $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$ si bien que $A' \in \mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \{G\}$ et donc $A' = G$. Contradiction avec le fait que $A \neq G$. De même, la droite $\mathcal{F}'$ parllèle à $\mathcal{F}$ passant par A' coupe $\mathcal{E}$ en un point $B \neq G$. Par construction, (A', B, G, C) est un parallélogramme : on a $(A'B) = \mathcal{F}' \parallel \mathcal{F} = (CG)$ et $(A'C) = \mathcal{E}' \parallel \mathcal{E} = (BG)$.

   (b) Soit B' le symétrique de B par rapport à G. Montrer que (A, G, C, B') est aussi un parallélogramme.

   Solution: On a

   $$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB'} = \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{GC}$$

   (puisqu'on sait déjà que (A', B, G, C) est un parallélogramme).

   (c) Montrer que les médianes du triangle $\{A, B, C\}$ sont les droites $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$.

   Solution: Soit I le milieu de $\{B, C\}$. Puisque (A', B, G, C) est un parallélogramme, I est aussi le milieu de $\{A', G\}$ et donc $I \in \mathcal{D}$. Cela montre que $\mathcal{D}$ est la médiane issue de A. De même, soit J le milieu de $\{A, C\}$. Puisque

1. Ceci signifie simplement que G est le milieu de $\{A, A'\}$.

(A, G, C, B') est un parallélogramme, J est aussi le milieu de $\{G, B'\}$ et en particulier $J \in \mathcal{E} = (GB')$. Cela montre que $\mathcal{E}$ est la médiane issue de B. Enfin, G étant l'intersection de deux médianes est le centre de gravité du triangle et $\mathcal{F} = (CG)$ est donc nécessairement la médiane issue de C.

5. (a) Quel est le chiffre des unités de $(7^7)^7$?

Solution: On a $7^2 = 49 \equiv -1 \mod 10$ et donc

$$7^7 = (7^2)^3 \times 7 \equiv (-1)^3 \times 7 = -7 \equiv 3 \mod 10.$$

De même, on a $3^2 = 9 \equiv -1 \mod 10$ et donc

$$(7^7)^7 \equiv 3^7 = (3^2)^3 \times 3 \equiv (-1)^3 \times 3 = -3 \equiv 7 \mod 10.$$

chiffre des unités de $(7^7)^7$ est donc 7.

(b) Quel est le chiffre des unités de $7^{(7^7)}$?

Solution: On a $7^2 \equiv -1 \mod 10$ et donc

$$7^4 = (7^2)^2 \equiv (-1)^2 = 1 \mod 10.$$

Maintenant, on a $7 \equiv -1 \mod 4$ si bien que

$$7^7 \equiv (-1)^7 = -1 \equiv 3 \mod 4.$$

On en déduit que

$$7^{(7^7)} \equiv 7^3 = 7^2 \times 7 \equiv -1 \times 7 = -7 \equiv 3 \mod 10.$$

Le chiffre des unités de $7^{(7^7)}$ est donc 3.