Université de Rennes 1 Année 2021/2022

Algèbre et géométrie 1
Devoir maison
À rendre *impérativement* pour le mercredi 15 décembre 2021

Il va de soi que, sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être justifiée et tout énoncé doit être démontré. On pourra cependant bien sûr s'appuyer librement sur les résultats démontrés en cours. On pourra aussi utiliser tout document ou outil comme aide à la décision mais en aucun cas comme argument mathématique.

Notations/conventions : On désigne par $\mathbb{Z}_{\geq n}$ l'ensemble des entiers supérieurs à n et $\mathbb{R}_{>0}$ (resp. $\mathbb{Q}_{>0}$) l'ensemble des réels (resp. rationnels) strictement positifs. On note $a \wedge b$ le pgcd de deux entiers a et b. On rappelle que tout rationnel s'écrit de manière unique sous la forme q/p avec p, q entiers premiers entre eux et $p > 0$.

1. Un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 1}$ est dit *pythagoricien* si $a^2 + b^2 = c^2$. Donner un exemple de triplet pythagoricien.
2. Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien. Montrer que $c \geq b + 1$. Peut on avoir égalité ? Montrer que $a^2 \geq 2b + 1$. Peut on avoir égalité ?
3. Montrer que si (a, b, c) un triplet pythagoricien, alors $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 3}$ (c'est à dire $a, b, c \geq 3$).
4. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Calculer
$$(2n^2 + 2n + 1)^2 - (2n^2 + 2n)^2.$$
En déduire que si $a \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ est impair, alors il existe un triplet pythagoricien de la forme (a, b, c).
5. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Calculer
$$(n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2.$$
En déduire que si $b \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ est pair, alors il existe un triplet pythagoricien de la forme (a, b, c).
6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner des équations[1] du cercle $\mathcal{C}$ de centre $O\binom{0}{0}$ et de rayon 1 ainsi que de la droite D_t passant par $A\binom{-1}{0}$ et $B\binom{0}{t}$. Montrer que $A \in \mathcal{C} \cap D_t$.
7. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique point $M\binom{x}{y}$ tel que $(\mathcal{C} \setminus \{A\}) \cap D_t = \{M\}$. Exprimer x et y en fonction de t. Exprimer aussi t en fonction de x et y.
8. Montrer que l'application
$$f : \mathcal{C} \setminus \{A\} \to \mathbb{R}, \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{y}{x + 1}$$
est bijective et déterminer son application réciproque g.

1. On fixe un repère orthonormé dans le plan euclidien.

9. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $M\binom{x}{y} := g(t)$. Montrer que
$$t \in]0,1[\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$
En déduire [2] que
$$t \in \mathbb{Q} \cap]0,1[\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{Q}_{>0}.$$
10. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 1}$ et $M\binom{a/c}{b/c}$. Montrer que (a,b,c) est un triplet pythagoricien si et seulement si $M \in \mathcal{C}$ si et seulement s'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux avec $0 < q < p$ tels que $M = g(q/p)$ (g est la réciproque de f ci-dessus).
11. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 1}$. Montrer que (a,b,c) est un triplet pythagoricien si et seulement s'il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux avec $0 < q < p$ tels que
$$\frac{a}{c} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \quad \text{et} \quad \frac{b}{c} = \frac{2pq}{p^2 + q^2}.$$
12. Soit (a,b,c) un triplet pythagoricien. Montrer que $a \wedge b = a \wedge c = b \wedge c$.
13. Un triplet pythagoricien (a,b,c) est dit *primitif* si a et b sont premiers entre eux. Montrer qu'alors a et c d'une part, ainsi que b et c d'autre part, sont aussi premiers entre eux.
14. Montrer que si $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 1}$ et $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, alors (a,b,c) est pythagoricien si et seulement si (da, db, dc) est pythagoricien. Réciproquement, montrer que si (a', b', c') est un triplet pythagoricien, il existe alors un unique triplet pythagoricien primitif (a,b,c) et un unique entier $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tels que $(a', b', c') = (da, db, dc)$.
15. Montrer que si $c \in \mathbb{Z}$ est pair, alors $c^2 \equiv 0 \mod 4$ et que si $a, b \in \mathbb{Z}$ sont impairs, alors $a^2 + b^2 \equiv 2 \mod 4$.
16. Montrer que si (a,b,c) est un triplet pythagoricien, alors a ou b est pair. Montrer que si (a,b,c) est primitif, alors c est impair et a et b sont de parité différente (a impair et b pair par exemple).
17. Soient $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux avec $0 < q < p$,
$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq \quad \text{et} \quad c = p^2 + q^2.$$
Montrer que (a,b,c) est un triplet pythagoricien et que $a \wedge b = 1$ ou 2. En déduire qu'il est primitif si et seulement p et q sont de parité différente.
18. Montrer que, réciproquement, si (a,b,c) est un triplet pythagoricien primitif avec b pair, alors il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux avec $0 < q < p$ tels que
$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq \quad \text{et} \quad c = p^2 + q^2.$$
19. Donner cinq triplets pythagoriciens primitifs.
20. Un nombre complexe z est un *nombre de Gauss* si $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{Z}$. Il est *pythagoricien* si $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z), |z| \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Il est *primitif* si $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ sont premiers entre eux. Montrer qu'un nombre de Gauss z est pythagoricien primitif avec $\mathrm{Im}(z)$ pair si et seulement s'il existe un nombre de Gauss w avec $\mathrm{Re}(w)$ et $\mathrm{Im}(w)$ premiers entre eux de parité différentes et $0 < \mathrm{Im}(w) < \mathrm{Re}(w)$ tels que $z = w^2$.

2. On admettra que $\mathbb{Q}$ est stable par toutes les opérations algébriques.