NOM :	Prénom :

Licence 1 — Mathématiques
Université Rennes 1

Algèbre et géométrie 1
2021–2022

Contrôle continu 2
Durée : 25 minutes

Les calculatrices et téléphones sont interdits.
Toute affirmation doit être démontrée.
On pourra rédiger directement sur la feuille.

Exercice 1 5 points

Linéarisez $\cos^4(x)$.

$$\cos^4(x) = (\cos x)^4 = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$$

② Formule d'Euler

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$$

① Binôme de Newton

$$= \frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{-2ix}\right)+6\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6\right)$$

① calcul

$$= \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.$$

① Résultat

Exercice 2 6 points

Calculez les racines carrées complexes de $1+i$. Sachant que $-1+7i = (1+i)(2+i)^2$, déduisez-en les racines carrées complexes de $-1+7i$.

Racines carrées de $1+i$ ② pour une racine carrée et ① pour l'autre

- sous forme exponentielle : $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ donc $\sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/8}$ est une racine carrée de $1+i$, et l'autre est $-\sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/8}$.
- sous forme algébrique : on résout $1+i = (a+ib)^2 = a^2-b^2+2abi$.

On note que $a^2+b^2 = |1+i| = \sqrt{2}$ donc on résout $\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ a^2+b^2=\sqrt{2} \\ 2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ ab = 1/2 > 0 \end{cases}$

Les solutions sont $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Racines carrées de $-1+7i$: de toute évidence $\sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/8}(2+i)$ est une racine carrée, l'autre est $-\sqrt[4]{2}\, e^{i\pi/8}(2+i)$.

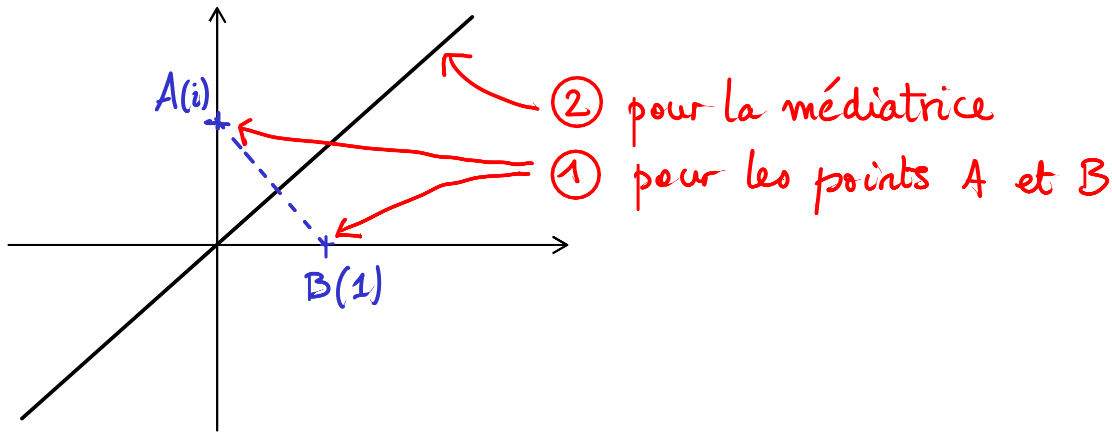
② une racine
① l'autre

Exercice 3 6 points

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ définie par : pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $f(z) = \frac{z-i}{z-1}$. Déterminez et représentez l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie $|f(z)| = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et notons A, B, M les points d'affixes $i, 1, z$.
On a $|f(z)| = 1$ ssi $\left|\frac{z-i}{z-1}\right| = 1$ ssi $|z-i| = |z-1|$ ssi $AM = BM$. 2

Ainsi l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$
est la médiatrice du segment $[AB]$. 1



Exercice 4 6 points

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = iz + \bar{z}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. En écrivant $z = a + ib$ avec a et b réels, calculez $f(z)$ en fonction de a et b.
2. L'application f est-elle injective ? surjective ?

1. $f(z) = iz + \bar{z} = i(a+ib) + \overline{a+ib} = ia - b + a - ib = a - b + i(a-b)$
$= (a-b)(1+i)$. 2

2. On voit que dès que $a = b$ on a $f(z) = 0$. Par exemple,
$f(1+i) = f(2+2i) = 0$. Donc f n'est pas injective. 2

De plus, on voit que $\operatorname{Re} f(z) = a - b = \operatorname{Im} f(z)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Donc le nombre complexe $z' = 1$, qui n'a pas les mêmes
parties réelle et imaginaire, ne peut être $f(z)$ pour aucun z.
Donc f n'est pas surjective. 2