Université de Rennes 1 Année 2018/2019

Algèbre et géométrie 1
Épreuve du mardi 18 décembre
Début 8h - Durée 2h

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion). Il va de soi que, sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être justifiée et tout énoncé doit être démontré.

1. (a) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{i\frac{\pi}{4}}$. (Ces deux nombres réels devront être donnés sous forme d'expressions qui n'utilisent pas de fonction trigonométrique.)

Solution: On a

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

donc la partie rélle de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et la partie imaginaire de $e^{i\frac{\pi}{4}}$ vaut aussi $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Déterminer tous les couples (x, y) de nombres réels tels que $(x + iy)^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Solution: Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $(x + iy)^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$. D'après la question précédente, on a alors

$$(x + iy)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

donc

$$x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad 2xy = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De plus, on a

$$|x + iy|^2 = \left|e^{i\frac{\pi}{4}}\right| = 1,$$

donc

$$x^2 + y^2 = 1.$$

On trouve donc

$$x^2 = \frac{(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

et

$$y^2 = \frac{(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

On a donc

$$x \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right\} \qquad \text{et} \qquad y \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right\}.$$

(Notons que $0 \leq \sqrt{2} \leq 2$ donc les racines carrés ci-dessus sont bien définies dans $\mathbb{R}$.)
De plus, comme $xy = \frac{\sqrt{2}}{4} > 0$, les réels x et y sont de même signe, donc

$$x + iy \in \left\{ \pm \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) \right\}.$$

Réciproquement, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right)^2 &= \frac{2+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2^2-2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= e^{i\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Les couples (x, y) de nombres réels tels que $(x+iy)^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ sont donc

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right).$$

(c) En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$ et celle de $\sin\frac{\pi}{8}$. (Là aussi, ces valeurs doivent être données sous forme d'expressions qui n'utilisent pas de fonction trigonométrique.)

Solution: Comme $\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, la question précédente montre que

$$\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} \in \left\{ \pm \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \right) \right\}.$$

De plus, comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\frac{\pi}{8} > 0$, donc

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

(d) En déduire que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{8} &= \frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} \\
&= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} && \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2^2-2}} && \text{en multipliant numérateur et dénominateur par } \sqrt{2-\sqrt{2}} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}-1.
\end{aligned}$$

2. Soit $\{A, B, C\}$ un triangle non plat et non rectangle. Notons Δ_A la droite passant par A et orthogonale à la droite (BC). Notons Δ_B la droite passant par B et orthogonale à (CA), et Δ_C la droite passant par C et orthogonale à (AB). Soient H_A le point d'intersection de Δ_A et (BC), H_B le point d'intersection de Δ_B et (CA), et H_C le point d'intersection de Δ_C et (AB). On note aussi $a := BC$, $b := CA$ et $c := AB$.
   (a) Faire une figure.
   (b) Montrer que Δ_A et Δ_B ne sont pas parallèles.

   Solution: Si Δ_A et Δ_B étaient parallèles, comme $\Delta_A \perp (BC)$ on aurait $\Delta_B \perp (BC)$, or $\Delta_B \perp (CA)$, donc les droites (BC) et (CA) seraient parallèles, donc confondues puisque le point C est commun aux deux droites, donc les points A, B et C seraient alignés, donc le triangle $\{A, B, C\}$ serait plat.
   Par contraposition, comme le triangle $\{A, B, C\}$ n'est pas plat, on en déduit que les droites Δ_A et Δ_B ne sont pas parallèles.

   (c) Montrer qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BH_A} = \lambda\overrightarrow{BC}$.

   Solution: Les points B et H_A sont sur la droite (BC), et $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de (BC), donc il existe un nombre réel λ tel que $\overrightarrow{BH_A} = \lambda\overrightarrow{BC}$.

   (d) Montrer que H_A est alors le barycentre du système

$$((B, 1-\lambda), (C, \lambda)).$$

Solution: On a alors :

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\overrightarrow{H_AB}+\lambda\overrightarrow{H_AC} &= -(1-\lambda)\overrightarrow{BH_A}-\lambda\overrightarrow{BH_A}+\lambda\overrightarrow{BC}\\ &\qquad\text{par relation de Chasles}\\ &= \left(-(1-\lambda)\lambda-\lambda^2+\lambda\right)\overrightarrow{BC}\\ &\qquad\text{car } \overrightarrow{BH_A}=\lambda\overrightarrow{BC}\\ &= 0,\end{aligned}$$

donc H_A est alors le barycentre du système $((B,1-\lambda),(C,\lambda))$.
Notons que $(1-\lambda)+\lambda = 1 \neq 0$.

(e) Calculer ${BH_A}^2 - {CH_A}^2$ en fonction de a et λ.

Solution: On a :

$${BH_A}^2 = \overrightarrow{BH_A}^2 = \lambda^2\overrightarrow{BC}^2 = \lambda^2 a^2$$

et

$${CH_A}^2 = \left(\overrightarrow{BH_A}-\overrightarrow{BC}\right)^2 = (\lambda-1)^2\overrightarrow{BC}^2 = (1-\lambda)^2a^2,$$

donc

$${BH_A}^2-{CH_A}^2 = a^2\left(\lambda^2-(1-\lambda)^2\right) = a^2\left(\lambda+(1-\lambda)\right)\left(\lambda-(1-\lambda)\right) = a^2(2\lambda-1).$$

(f) Montrer que ${BH_A}^2 - {CH_A}^2 = c^2 - b^2$.

Solution: Comme $\Delta_A \perp (BC)$, le théorème de Pythagore donne

$${AH_A}^2 + {BH_A}^2 = AB^2 = c^2 \quad \text{et} \quad {AH_A}^2 + {CH_A}^2 = AC^2 = b^2,$$

donc, par soustraction :

$${BH_A}^2 - {CH_A}^2 = c^2 - b^2.$$

(g) Montrer que $\lambda = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a^2}$.

Solution: D'après les deux questions précédentes, on a

$$a^2(2\lambda-1) = {BH_A}^2 - {CH_A}^2 = c^2 - b^2,$$

donc

$$\begin{aligned}2\lambda - 1 &= \frac{c^2-b^2}{a^2}\\ 2\lambda &= 1 + \frac{c^2-b^2}{a^2}\\ &= \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2},\end{aligned}$$

donc

$$\lambda = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a^2}.$$

(h) Montrer que H_A est le barycentre du système

$$\left(\left(B, \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2}\right), \left(C, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}\right)\right).$$

Solution: D'après la question 4 et la valeur de λ calculée ci-dessus, H_A est le barycentre du système

$$\left(\left(B, 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a^2}\right), \left(C, \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a^2}\right)\right),$$

donc, en multipliant les poids par $2a^2$ (qui est un réel non nul), on trouve que H_A est le barycentre du système

$$\left(\left(B, a^2 + b^2 - c^2\right), \left(C, a^2 - b^2 + c^2\right)\right).$$

Or, le triangle $\{A, B, C\}$ n'est pas rectangle, donc $a^2 + b^2 \neq c^2$ et $a^2 + c^2 \neq b^2$. On peut donc diviser les poids par $(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)$, et on trouve que H_A est le barycentre du système

$$\left(\left(B, \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2}\right), \left(C, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}\right)\right).$$

(i) Montrer que le barycentre du système

$$\left(\left(A, \frac{1}{-a^2 + b^2 + c^2}\right), \left(B, \frac{1}{a^2 - b^2 + c^2}\right), \left(C, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}\right)\right)$$

est un point commun aux trois droites Δ_A, Δ_B et Δ_C.

Solution: On a

$$\begin{aligned}(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2) &= a^4 - (b^2 - c^2)^2 \\ &= a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2-b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2} \\
&= \frac{(a^4-b^4-c^4+2b^2c^2)+(-a^4+b^4-c^4+2c^2a^2)+(-a^4-b^4+c^4+2a^2b^2)}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)} \\
&= \frac{-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)} \\
&= \frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)} \\
&= \frac{(2ab-a^2-b^2+c^2)(2ab+a^2+b^2-c^2)}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)} \\
&= \frac{(-(a-b)^2+c^2)((a+b)^2-c^2)}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)} \\
&= \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)},
\end{aligned}$$

et les facteurs du numérateur sont tous strictement positifs car le triangle $\{A,B,C\}$ n'est pas plat (c'est l'inégalité triangulaire), donc

$$\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2-b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\neq 0.$$

Le barycentre du système

$$\left(\left(A,\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}\right),\left(B,\frac{1}{a^2-b^2+c^2}\right),\left(C,\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)\right)$$

est donc bien défini. Notons-le H. Par associativité du barycentre, le point H est aussi le barycentre de

$$\left(\left(A,\frac{1}{-a^2+b^2+c^2}\right),\left(H_A,\frac{1}{a^2-b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)\right)$$

donc il est sur la droite (AH_A), c'est-à-dire Δ_A. (Notons que $A\neq H_A$ car $H_A\in(BC)$ et les points A, B et C ne sont pas alignés.) L'associativité du barycentre montre de même (remarquez la symétrie de la définition de H) que $H\in\Delta_B$ et $H\in\Delta_C$. Le point H est donc un point commun aux trois droites Δ_A, Δ_B et Δ_C.

3. Déterminer deux entiers u et v tels que $368u+117v=1$.

Solution: On effectue l'algorithme d'Euclide étendu :

$$\begin{array}{ccccccccc}
368 & = & 1 & \times & 368 & + & 0 & \times & 117 & \\
117 & = & 0 & \times & 368 & + & 1 & \times & 117 & (-3\times-) \\
17 & = & 1 & \times & 368 & - & 3 & \times & 117 & (-6\times-) \\
15 & = & -6 & \times & 368 & + & 19 & \times & 117 & (-1\times-) \\
2 & = & 7 & \times & 368 & - & 22 & \times & 117 & (-7\times-) \\
1 & = & -55 & \times & 368 & + & 173 & \times & 117 & .
\end{array}$$

4. Montrer que $3^{126} + 5^{126}$ est divisible par 13.

Solution: On calcule $3^3 = 27 \equiv 1 \mod 13$ puis $5^2 = 25 \equiv -1 \mod 13$. On a $126 = 3 \times 41 = 2 \times 63$. On en déduit que

$$3^{126} + 5^{126} = (3^3)^{41} + (5^2)^{63} \equiv 1^{41} + (-1)^{63} = 1 - 1 = 0 \mod 13.$$

5. On considère, pour $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, l'équation

$$E_n : \quad (a, b) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} \ / \ a^2 + b^2 = 2^n \ ?$$

(a) Résoudre E_0, E_1 et E_2.

Solution: Puisque $n \leq 2$, on aura nécessairement $a^2 + b^2 \leq 4$, et comme $b > 0$, cela implique que $a^2 < 4$ ou encore $a < 2$, et finalement, comme $a > 0$, que $a = 1$. Pour la même raison, on aura $b = 1$. Puisque $1^2 + 1^2 = 2$, on voit donc que E_0 et E_2 n'ont pas de solution et que E_1 a pour unique solution le couple $(1, 1)$.

(b) Montrer que

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (a^2 + b^2 \equiv 0 \mod 4) \Leftrightarrow (a \equiv 0 \mod 2 \text{ et } b \equiv 0 \mod 2).$$

Solution: On pose $a = 2a' + r$ et $b = 2b' + s$ avec $0 \leq r, s < 2$ et on calcule

$$a^2 + b^2 = 4a'^2 + 4a'r + r^2 + 4b'^2 + 4b's + s^2 \equiv r^2 + s^2 \mod 4.$$

Puisque $0 \leq r^2 + s^2 \leq 2 < 4$, on voit que $a^2 + b^2 \equiv 0 \mod 4$ si et seulement si $r^2 + s^2 = 0$, c'est à dire $r = s = 0$, ou encore $a \equiv 0 \mod 2$ et $b \equiv 0 \mod 2$.

(c) Montrer que (a, b) est une solution de E_{n+2} si et seulement si $a = 2a'$ et $b = 2b'$ où (a', b') est une solution de E_n.

Solution: Si (a, b) est solution de E_{n+2}, on a

$$a^2 + b^2 = 2^{n+2} = 4 \times 2^n \equiv 0 \mod 4.$$

Il suit que a et b sont nécessairement pairs et on peut donc écrire $a = 2a'$ et $b = 2b'$. De plus, sous cette dernière hypothèse, on a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 = 2^{n+2} &\Leftrightarrow (2a')^2 + (2b')^2 = 2^{n+2} \\ &\Leftrightarrow 4(a'^2 + b'^2) = 4 \times 2^n \\ &\Leftrightarrow a'^2 + b'^2 = 2^n. \end{aligned}$$

(d) Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que l'équation E_n n'a pas de solution lorsque $n = 2k$ est pair.

Solution: Par (récurrence sur k et par) l'absurde : on sait déjà que E_0 n'a pas de solution et on vient de voir que si $E_{2(k+1)}$ avait une solution, alors E_{2k} en aurait une aussi.

(e) Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ que l'équation E_n a une unique solution que l'on déterminera lorsque $n = 2k + 1$ est impair.

Solution: On a déjà vu que c'est le cas pour E_1 et aussi que (a, b) est solution de E_{2k+3} si et seulement si $a = 2a'$ et $b = 2b'$ où (a', b') est une solution de E_{2k+1} (d'où l'existence et l'unicité). Pour conclure, il suffit de montrer que cette solution est $(2^k, 2^k)$. En effet, on a bien

$$(2^k)^2 + (2^k)^2 = 2^{2k} + 2^{2k} = 2 \times 2^{2k} = 2^{2k+1}.$$