Université de Rennes 1 Année 2018/2019

Algèbre et géométrie 1
Épreuve du mercredi 12 juin
Début 8h - Durée 2h

La consultation de document et l'utilisation d'outil électronique sont prohibées (passez votre téléphone en mode avion). Il va de soi que, sauf mention explicite du contraire, toute affirmation doit être justifiée et tout énoncé doit être démontré.

1. Soit z un nombre complexe tel que $z^5 = 1$ mais $z \neq 1$ (on n'écrira pas $z = x + iy$ avant que ce ne soit demandé).
   (a) Développer $(z + z^4)^2$ afin de l'exprimer en fonction de z^2 et de z^3.

   Solution: Puisque $z^5 = 1$, on a $(z + z^4)^2 = z^2 + 2z^5 + z^8 = z^2 + 2 + z^3$.

   (b) Effectuer le produit $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(1 - z)$ et en déduire la valeur de $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

   Solution: Puisque $z^5 = 1$, on a $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(1 - z) = 1 - z^5 = 0$. Puisque $z \neq 1$, on a donc $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.

   (c) Que vaut $|z|^5$? Que vaut $|z|$? En déduire que $z^4 = \overline{z}$.

   Solution: On a $|z|^5 = |z^5| = 1$ et donc aussi $|z| = 1$. On voit donc que $z \times z^4 = |z|$ et il suit que $z^4 = \overline{z}$.

   On écrit maintenant $z = x + iy$ avec x, y réels.

   (d) Utiliser c) pour écrire $z + z^4$ en fonction de x.

   Solution: On a $z + z^4 = z + \overline{z} = 2x$.

   (e) Utiliser a) pour écrire $z^2 + z^3$ en fonction de x et de x^2.

   Solution: On a $z^2 + z^3 = (2x)^2 - 2 = 4x^2 - 2$

   (f) En déduire une égalité $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = P(x)$ ou P est un polynôme du second degré à coefficients réels que l'on déterminera.

   Solution: On a $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 1 + 2x + 4x^2 - 2 = 4x^2 + 2x - 1$.

   (g) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

   Solution: On a $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$.

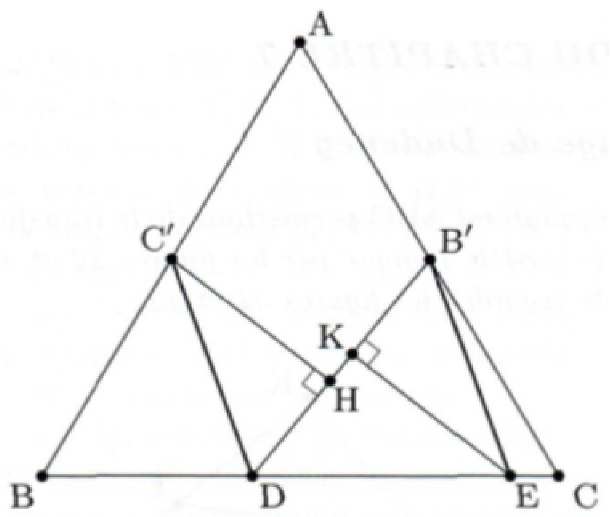
(h) Que vaut $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$? On pourra s'aider d'un dessin.

Solution: On a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ (c'est la partie réelle de $z := e^{2i\pi/5}$ qui satisfait $z^5 = 1$ et $z \neq 1$ et on a $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$ car $0 \leq \frac{2\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$).

2. On se donne un triangle équilatéral $\{A, B, C\}$ avec A, B, C distincts. On fixe deux réels strictement positifs λ, μ tels que $\lambda + \mu = 1/2$. On désigne par D le barycentre de $(B, 1-\lambda)$ et (C, λ) et par E le barycentre de (B, μ) et $(C, 1-\mu)$. On désigne par B' et C' les milieux respectifs de $\{A, C\}$ et $\{A, B\}$. On désigne par H le pied de la hauteur issue de C' dans le triangle $\{B', C', D\}$. On désigne par K le pied de la hauteur issue de E dans le triangle $\{B', D, E\}$.

(a) Faire un dessin.

Solution:



(b) Montrer que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \lambda\overrightarrow{CE}\\ &= \lambda\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{CB}\\ &= (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

(c) Montrer que $\overrightarrow{C'B'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C'B'} &= \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

(d) En déduire que (D, E, B', C') est un parallélogramme.

Solution: En effet : $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{C'B'}$.

(e) On va montrer que $\overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{EK}$ et que $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{KB'}$. Pour cela, on considère l'unique point K' tel que $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{K'B'}$.

i. Montrer que $\overrightarrow{EK'} = \overrightarrow{HC'}$.

Solution:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EK'} &= \overrightarrow{EB'} + \overrightarrow{B'K'}\\ &= \overrightarrow{DC'} + \overrightarrow{HD}\\ &= \overrightarrow{HC'}.\end{aligned}$$

ii. En déduire que $K' = K$.

Solution: Puisque $(EK') \parallel (HC')$ et que $(HC') \perp (BD)$, on a $(EK') \perp (BD)$. Puisque $K' \in (B'D)$, c'est bien le pied de la hauteur du triangle.

iii. Conclure.

Solution: On a donc bien $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{HC}$, et par définition de K', $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{KB'}$.

3. (a) Déterminer deux entiers u et v tels que $120u + 23v = 1$.

Solution: On effectue l'algorithme d'Euclide étendu :

$$\begin{array}{ccccccccl} 120 & = & 1 & \times & 120 & + & 0 & \times & 23 \\ 23 & = & 0 & \times & 120 & + & 1 & \times & 23 \quad (-5\times -) \\ 5 & = & 1 & \times & 120 & + & -5 & \times & 23 \quad (-4\times -) \\ 3 & = & -4 & \times & 120 & + & 21 & \times & 23 \quad (-1\times -) \\ 2 & = & 5 & \times & 120 & + & -26 & \times & 23 \quad (-1\times -) \\ 1 & = & -9 & \times & 120 & + & 47 & \times & 23 \end{array}$$

(b) Montrer que $3^{126} + 5^{126}$ est un multiple entier de 13.

> **Solution:** On considère d'une part les puissances de 3 modulo 13 :
>
> $$3^1 = 3 \equiv 3, \quad 3^2 = 9 \equiv 9, \quad 3^3 = 27 \equiv 1 \mod 13,$$
>
> et d'autre part les puissances de 5 modulo 13 :
>
> $$5^1 = 5 \equiv 3, \quad 5^2 = 25 \equiv -1 \mod 13.$$
>
> On en déduit que
>
> $$3^{126} + 5^{126} = (3^3)^{42} + (5^2)^{63} \equiv 1^{42} + (-1)^{63} = 1 - 1 = 0 \mod 13.$$

(c) Déterminer selon les valeurs de l'entier naturel n le reste dans la division de 2^n par 5.

> **Solution:** Si on écrit $n = 4m + k$ avec $m, k \in \mathbb{N}$, on a
>
> $$2^n = 2^{4m+k} = (2^4)^m \times 2^k \equiv 1^m \times 2^k = 2^k \mod 5.$$
>
> On en déduit que
> - Si $n \equiv 0 \mod 4$, alors $2^n \equiv 1 \mod 5$,
> - Si $n \equiv 1 \mod 4$, alors $2^n \equiv 2 \mod 5$,
> - Si $n \equiv 2 \mod 4$, alors $2^n \equiv 4 \mod 5$,
> - Si $n \equiv 3 \mod 4$, alors $2^n \equiv 3 \mod 5$