

Qu'est-ce qu'un perfectoïde ?
(*Strasbourg – 2017*)

Bernard Le Stum

Université de Rennes 1

19 mai 2017

Sommaire

Une simple analogie ?

Un corps perfectoïde (ou deux)

Le basculement

Le théorème fondamental

Un peu de géométrie pour finir

Une analogie

Tout entier naturel s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire finie

$$n = a_d p^d + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = \sum_{i=0}^d a_i p^i$$

où $p \geq 2$ est un entier naturel fixé et $0 \leq a_0, \dots, a_d < p$.

C'est l'écriture en base p ou écriture p -gésimale (on peut choisir $p = 10$ mais on préférera p premier).

Tout polynôme s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire finie

$$f(t) = a_d t^d + \cdots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = \sum_{i=0}^d a_i t^i$$

avec $a_0, \dots, a_d \in k$ ou k est un corps donné.

Une bijection

En choisissant $k = \mathbb{F}_p$ (c'est à dire le corps à p éléments $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$), on obtient même une bijection :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longleftrightarrow \mathbb{F}_p[t] \quad . \\ \sum_{i=0}^d a_i p^i &\longmapsto \sum_{i=0}^d \bar{a}_i t^i \end{aligned}$$

On dispose d'une addition et d'une multiplication de chaque côté mais la bijection n'est *pas* compatible avec ces opérations : lorsqu'on ajoute des entiers, il ne faut pas oublier la retenue !

Se pose alors la question suivante :

- ▶ Peut-on modifier cette construction de manière à retrouver les opérations algébriques lorsqu'on passe d'un côté à l'autre ?

Puissances négatives/sommes infinies

Comme première étape, on peut autoriser les puissances négatives et obtenir ainsi une bijection

$$\begin{aligned} \mathbb{N}[1/p] &\longleftrightarrow \mathbb{F}_p[t, t^{-1}] \\ \sum_{i=-e}^d a_i p^i &\longmapsto \sum_{i=-e}^d \bar{a}_i t^i \end{aligned}$$

entre les p -gésimaux (décimaux en base p) positifs et les polynômes de Laurent (fractions rationnelles ayant au plus un pôle à l'origine).

Alternativement, on peut autoriser les sommes infinies et obtenir une bijection

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p &\longleftrightarrow \mathbb{F}_p[[t]] \\ \sum_{i \geq 0} a_i p^i &\longmapsto \sum_{i \geq 0} \bar{a}_i t^i \end{aligned}$$

entre l'anneau des entiers p -adiques et celui des séries formelles (ce sont deux anneaux de valuation discrète complets). Nous allons détailler un peu ce processus de « complétion » :

Complétion

Nous disposons de la *valeur absolue p -adique* sur \mathbb{N} , donnée pour

$$n = a_d p^d + a_{d-1} p^{d-1} + \cdots + a_v p^v \quad \text{avec} \quad a_v \neq 0,$$

par $|n| = 1/p^v$. Cela mesure la divisibilité de n par p .

On définit de la même façon la *valeur absolue t -adique* sur $k[t]$ qui mesure l'ordre d'annulation à l'origine (normalisée par $|t| = 1/p$).

Une valeur absolue va fournir une distance en posant $d(m, n) = |n - m|$. Notre bijection devient alors une *isométrie*.

Le processus de *complétion* consiste à faire converger les suites de Cauchy. On aura par exemple

$$\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_p \quad \text{et} \quad \widehat{k[t]} = k[[t]].$$

Les opérations algébriques, tout comme la valeur absolue, se prolongent alors par continuité.

Corps locaux

Nous pouvons autoriser simultanément les puissances négatives *et* les sommes infinies et considérer la bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}_p & \longleftrightarrow & \mathbb{F}_p((t)) \\ \sum_{-\infty < i} a_i p^i & \longmapsto & \sum_{-\infty < i} \bar{a}_i t^i \end{array}$$

entre le corps des nombres p -adiques et celui des séries de Laurent. Ce sont des corps *locaux*, c'est à dire localement compacts non discrets. Il existe un *isomorphisme* entre les corps résiduels

$$\mathbb{Z}_p/(p) \simeq \mathbb{F}_p \simeq \mathbb{F}_p[[t]]/(t).$$

La véritable magie va apparaître quand nous allons admettre les puissances fractionnaires. Il s'agit de l'étape de « perfectisation » que l'on va étudier maintenant.

Puissances fractionnaires

Pour n fixé, on dispose de la bijection

$$\begin{aligned} \mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^n}}] &\longleftrightarrow \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^n}}] \quad . \\ \sum_{i=0}^d a_i p^{\frac{i}{p^n}} &\longmapsto \sum_{i=0}^d \bar{a}_i t^{\frac{i}{p^n}} \end{aligned}$$

On peut ensuite passer à la limite sur n pour obtenir

$$\mathbb{N}[p^{\frac{1}{p^\infty}}] \longleftrightarrow \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}],$$

en envoyant une somme finie $\sum a_r p^r$ avec $r \in \mathbb{N}[1/p]$ sur la somme $\sum \bar{a}_r t^r$. On complète ensuite, ce qui donne une bijection

$$\widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]} \longleftrightarrow \widehat{\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]}$$

entre deux anneaux de valuation *non discrète* (c'est à dire qu'ils ne sont *plus* noethériens).

Corps perfectoïdes

En autorisant aussi les puissances négatives, nous obtenons une bijection entre les corps de fractions :

$$\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} \longleftrightarrow \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}.$$

Ce sont des corps perfectoïdes (définition plus bas).

Afin de retrouver les opérations algébriques, il va falloir modifier cette bijection. Tout repose sur l'observation fondamentale suivante :

Fait

Il existe un isomorphisme d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}]/(t) \\ \overline{p^{1/p^n}} & \longleftrightarrow & \overline{t^{1/p^n}}. \end{array}$$

Démonstration

On construit en fait l'isomorphisme inverse. Tout d'abord, il existe un unique morphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p) \leftarrow \mathbb{F}_p.$$

Nous pouvons le prolonger à $\mathbb{F}_p[t]$ en envoyant t sur 0. Si l'on fixe n , ce dernier morphisme se prolonge ensuite de manière unique en

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p) & \longleftarrow & \mathbb{F}_p[t][X_n] \\ \overline{p^{1/p^n}} & \longleftarrow & X_n \end{array}$$

dont le noyau est exactement $(t, X_n^{p^n} - t)$. On passe au quotient pour obtenir un morphisme injectif

$$\mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p) \hookrightarrow \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^n}}]/(t)$$

et on passe ensuite à la limite sur n . \square

Extraction des racines

Si G est un monoïde, on pose

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} G = \{(\dots, x_2, x_1, x_0), \quad x_i \in G, x_{i+1}^p = x_i\}.$$

Nous disposons alors de la suite d'isomorphismes (le premier étant seulement *multiplicatif*)

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{x \mapsto x^p} \widehat{\mathbb{Z}_p[p^{\frac{1}{p^\infty}}]} & \xrightarrow{\simeq} & \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbb{Z}[p^{\frac{1}{p^\infty}}]/(p) \\ & & \downarrow \simeq \\ & & \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}]/(t) \xrightarrow{\simeq} \widehat{\mathbb{F}_p[[t^{\frac{1}{p^\infty}}]]}. \end{array}$$

On en déduit un « isomorphisme » :

Le basculement

$$\varprojlim_{x \mapsto x^p} \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{F}_p(t^{\frac{1}{p^\infty}})} .$$
$$(\dots, p^{1/p^2}, p^{1/p}, p) \longleftrightarrow t$$

Il faut bien sûr préciser les lois à gauche. La multiplication se fait terme à terme :

$$(\dots, x_2, x_1, x_0)(\dots, y_2, y_1, y_0) = (\dots, x_2y_2, x_1y_1, x_0y_0).$$

L'addition demande cependant un peu plus d'attention : On aura

$$(\dots, x_2, x_1, x_0) + (\dots, y_2, y_1, y_0) = (\dots, z_2, z_1, z_0)$$

avec, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$z_i = \lim_n (x_{i+n} + y_{i+n})^{p^n} .$$

Vocabulaire

Définition

Un *corps perfectoïde* est un corps K complet pour une valeur absolue non-archimédienne *non-diskrète* tel que $K^\circ/(p)$ soit semi parfait (la puissance p -ème est surjective). Son *basculé* est $K^b := \text{Frac}(K^{\circ b})$ où

$$K^{\circ b} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} K^\circ/(p) \quad (\simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} K^\circ).$$

On écrit $K^\circ := \{x \in K, |x| \leq 1\}$ et $K^{\circ\circ} := \{x \in K, |x| < 1\}$.

Exemple

1. $K = \widehat{\mathbb{Q}_p(p^{\frac{1}{p^\infty}})}$ et $K^b = \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}$.
2. $K = \widehat{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}$ et $K^b = \widehat{\mathbb{F}_p((t^{\frac{1}{p^\infty}}))}$.
3. $K = \mathbb{C}_p$ et $K^b = \text{Frac}(R)$ avec $R := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p$

Le théorème fondamental

Lorsque K est un corps perfectoïde, on peut définir la notion d'espace perfectoïde X au dessus de K . On peut aussi construire un processus de basculement qui va associer à X un espace perfectoïde X^b au dessus de K^b .

Théorème (Scholze)

Le basculement induit une équivalence entre les gros sites étales de K et de K^b .

Cela signifie qu'il revient au même de se donner l'espace perfectoïde X sur K , ou bien son basculé X^b sur K^b , et qu'un morphisme est étale si et seulement si son basculé est étale.

En particulier, X est toujours *homéomorphe* à X^b car la topologie usuelle est moins fine que la topologie étale.

L'analogie pour les petits sites étales de K et de K^b était connu depuis longtemps :

Le cas « classique »

Puisqu'un morphisme étale au dessus d'un point correspond à un produit fini d'extensions finies séparables, on retrouve le résultat suivant :

Théorème (Fontaine, Wintenberger)

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \simeq \mathrm{Gal}(\overline{K^b}/K^b).$$

En d'autres termes, la théorie des équations algébriques sur K et sur son basculé K^b sont les mêmes.

Exemple

Pour étudier une équation algébrique sur \mathbb{Q}_p , quitte à remplacer p par une racine p^n -ème de p assez grande, il suffit de considérer l'équation correspondante sur $\mathbb{F}_p((t))$.

Revenons au théorème fondamental :

Version algébrique

Nous disposons de la notion d'*algèbre perfectoïde* (voir définition plus bas) qui permet de construire les espaces perfectoïdes affinoïdes, puis les espaces perfectoïdes quelconques par recollement. On se ramène ainsi à montrer une version algébrique du théorème fondamental :

Théorème (Scholze)

Le basculement induit une équivalence de catégories

$$\{K\text{-alg. perf.}\} \simeq \{K^b\text{-alg. perf.}\}$$

sous laquelle les morphismes finis étales se correspondent.

La démonstration du théorème repose sur les presque mathématiques de Faltings qui ont été développées par Gabber et Ramero. Un *presque objet* sur K° est un objet « à $K^{\circ\circ}$ -torsion près » (une définition précise demande bien plus de soin).

idée de la démonstration.

Si π est un élément topologiquement nilpotent non nul de K tel que $\pi \mid p$, on a une suite d'équivalences

$$\{K - \text{alg. perf.}\} \simeq \left\{ K^\circ - \overset{\text{presque}}{\text{alg. perf.}} \right\} \simeq \left\{ K^\circ / (\pi) - \overset{\text{presque}}{\text{alg. perf.}} \right\}$$

Comme K^b est aussi un corps perfectoïde, on dispose de la suite d'équivalences

$$\{K^b - \text{alg. perf.}\} \simeq \left\{ K^{b\circ} - \overset{\text{presque}}{\text{alg. perf.}} \right\} \simeq \left\{ K^{b\circ} / (\pi^b) - \overset{\text{presque}}{\text{alg. perf.}} \right\}.$$

et on conclut grâce à l'isomorphisme

$$K^\circ / (\pi) \simeq K^{b\circ} / (\pi^b).$$

Il faut ensuite traiter le cas des morphismes finis étales, ce qui demande un travail *conséquent* (théorème de presque pureté). \square

Vocabulaire

Soit K un corps perfectoïde.

Définition

Une K -algèbre perfectoïde A est une K -algèbre de Banach uniforme (A° est borné) telle que $A^\circ/(p)$ soit semi-parfait. Son basculé est $A^b := A^{ob}[1/\pi]$ où

$$A^{ob} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} A^\circ/(p) \quad (\simeq \varprojlim_{x \mapsto x^p} A^\circ).$$

On a posé $A^\circ := \{f \in A, \exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \|f^n\| \leq C\}$.

Exemple

L'anneau $K \{X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty}\}$ (il s'agit du complété π -adique) est une K -algèbre perfectoïde. Son basculé est $K^b \{X_1^{1/p^\infty}, \dots, X_n^{1/p^\infty}\}$.

Géométrie

Question : si K est muni d'une valeur absolue non-archimédienne, quels sont les *points* de la variété définie par $F_1, \dots, F_r \in K\{X_1, \dots, X_n\}$?

Si Z désigne l'ensemble des zéros communs à F_1, \dots, F_r dans $K^{\circ n}$ et $A := K\{X_1, \dots, X_n\}/(F_1, \dots, F_r)$, on dispose d'une inclusion

$$\begin{array}{ccc} Z \subset & \longrightarrow & \text{Spm}(A) \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) \end{array}$$

et l'ensemble $\text{Spm}(A)$ des idéaux maximaux contient suffisamment d'information. Si $\text{Spa}(A)$ désigne l'ensemble des valuations continues sur A et bornées sur A° , on a aussi une inclusion

$$\begin{array}{ccc} \text{Spm}(A) \subset & \longrightarrow & \text{Spa}(A) \\ \mathfrak{m} & \longmapsto & v_{\mathfrak{m}} \end{array}$$

avec $v_{\mathfrak{m}}(f) = |f \bmod \mathfrak{m}|$. Lorsque A n'est *pas* topologiquement de type fini sur K , il est *nécessaire* d'utiliser $\text{Spa}(A)$.

Espaces adiques

Un *espace adique* est un espace « localement de la forme » $\mathrm{Spa}(A)$ (une définition précise demande bien plus d'attention).

Exemple

1. A de type fini. On retrouve les variétés « algébriques » : $K[X]$ donne naissance à la droite affine $\mathbb{A}_K^1(*)$, puis en passant aux produits, à l'espace affine \mathbb{A}_K^n , et en recollant, à l'espace projectif \mathbb{P}_K^n .
2. A topologiquement de type fini. On retrouve les variétés analytiques « rigides » : le disque fermé \mathbb{D} à partir de $K\{X\}$, puis le polydisque comme produit, et de nouveau l'espace projectif en recollant.
3. A perfectoïde. Cela donne les espaces perfectoïdes : l'algèbre $K\{X^{1/p^\infty}\}$ fournit le disque perfectoïde, puis le polydisque perfectoïde et enfin l'espace projectif perfectoïde que l'on notera $\varprojlim \mathbb{P}_K^n$.

Exemple : l'espace projectif

Il est aisé de voir que

$$(\varprojlim \mathbb{P}_K^n)^b = \varprojlim \mathbb{P}_{K^b}^n.$$

En utilisant le théorème fondamental, on en déduit un morphisme (lire de droite à gauche)

$$\mathbb{P}_K^{n,\text{et}} \leftarrow (\varprojlim \mathbb{P}_K^n)^{\text{et}} \simeq (\varprojlim \mathbb{P}_{K^b}^n)^{\text{et}} \simeq \mathbb{P}_{K^b}^{n,\text{et}}$$

(nous avons utilisé les petits sites étales mais ce sont aussi des applications continues).

On remarquera que la flèche de droite est un isomorphisme car K^b est de caractéristique $p > 0$.

Voici un exemple de ce que l'on peut démontrer en utilisant ces idées (la conjecture monodromie-poids prédit une relation précise entre les actions de l'inertie et du Frobenius sur la cohomologie ℓ -adique) :

Une application

Théorème (Scholze)

N'importe quelle hypersurface projective satisfait la conjecture monodromie-poids en cohomologie ℓ -adique.

(vrai plus généralement pour les intersections complètes dans les variétés toriques). En caractéristique nulle, ce résultat n'était connu que pour les courbes et les surfaces.

idée de la démonstration.

La méthode consiste à se ramener à la caractéristique positive, où le théorème est dû à Deligne. On utilise le basculement, et plus précisément l'application

$$\mathbb{P}_{K^b}^{n,\text{et}} \rightarrow \mathbb{P}_K^{n,\text{et}}.$$

On tire alors l'hypersurface en arrière et on l'approche par une hypersurface algébrique. □

Autres applications

La conjecture de Hodge-Tate est valide pour les variétés analytiques rigides :

Théorème (Scholze)

Si X est une variété analytique rigide propre et lisse sur une extension finie K de \mathbb{Q}_p , il existe un isomorphisme équivariant

$$\varprojlim_{\leftarrow} H_{\text{et}}^n(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/p^k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{C}_p \simeq \sum_{i+j=n} H^i(X, \Omega_X^j) \otimes_K \mathbb{C}_p(-j).$$

Près de 60 ans après avoir été énoncée, la conjecture de Hochster est aussi devenue un théorème :

Théorème (André)

Si A est un anneau régulier, tout morphisme injectif fini $A \hookrightarrow B$ possède une section A -linéaire.

Bibliographie I



Jean-Marc FONTAINE. “Perfectoïdes, presque, pureté et monodromie-poids (d’après Peter Scholze)”. In : *Astérisque* 352 (2013). Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058, Exp. No. 1057, x, 509–534. ISSN : 0303-1179.



Jean-Marc FONTAINE et Jean-Pierre WINTENBERGER. “Extensions algébrique et corps des normes des extensions APF des corps locaux”. In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 288.8 (1979), A441–A444. ISSN : 0151-0509.



Ofer GABBER et Lorenzo RAMERO. *Almost ring theory*. T. 1800. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003, p. vi+307. ISBN : 3-540-40594-1.

Bibliographie II



Roland HUBER. *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*. Aspects of Mathematics, E30. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996, p. x+450. ISBN : 3-528-06794-2. DOI : 10.1007/978-3-663-09991-8. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-663-09991-8>.



Peter SCHOLZE. “Perfectoid spaces”. In : *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* 116 (2012), p. 245–313. ISSN : 0073-8301. DOI : 10.1007/s10240-012-0042-x. URL : <http://dx.doi.org/10.1007/s10240-012-0042-x>.



Peter SCHOLZE. “Perfectoid spaces : a survey”. In : *Current developments in mathematics 2012*. Int. Press, Somerville, MA, 2013, p. 193–227.