

# ANALYSE DE FOURIER

## DES SIGNAUX DÉTERMINISTES

---

COURS DE MASTER 1

---

2 avril 2012

# Table des matières

<b>I Algèbres de convolution</b>	<b>5</b>
I.1 Algèbres de convolution, cas discret	5
I.1.1 Algèbres de Banach	5
I.1.2 L'algèbre de convolution $(\ell^1(\mathbb{Z}), +, *)$	6
I.1.3 L'algèbre de convolution $(\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), +, *)$	7
I.2 Convolution sur $\mathbb{R}$	7
I.2.1 Cas de l'espace $C_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact	7
I.2.2 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$	8
I.2.3 Convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$	9
I.3 Convolution des fonctions périodiques	9
I.4 Exercices	11
<b>II Applications de la convolution sur <math>\mathbb{R}</math> et <math>\mathbb{T}</math></b>	<b>13</b>
II.1 Régularisation par convolution	13
II.2 Convolution et approximation	14
II.2.1 Unités approchées	14
II.2.2 Convergence ponctuelle	15
II.2.3 Approximation dans $L^1$	15
II.2.4 Application à l'approximation.	16
II.3 Cas des fonctions périodiques	16
II.3.1 Unités approchées pour les fonctions périodiques	16
II.3.2 Application à l'approximation	17
II.4 Exercices	18
<b>III Séries de Fourier</b>	<b>23</b>
III.1 Séries trigonométriques et séries de Fourier	23
III.1.1 Polynômes et séries trigonométriques	23
III.1.2 Coefficients de Fourier d'une fonction	24
III.1.3 Série de Fourier d'une fonction et noyau de Dirichlet	25
III.2 Premiers résultats de convergence ponctuelle	26
III.3 Noyaux de Fejer et convergence des séries de Fourier	28
III.4 Convergence dans $L^2(\mathbb{T})$	29
III.4.1 Rappel sur les espaces de Hilbert	29
III.4.2 Séries de Fourier	30
III.5 Application : synthèse sonore	31
III.6 Exercices	32
<b>IV Transformation de Fourier</b>	<b>37</b>
IV.1 Propriétés de la transformation de Fourier	37
IV.2 Formule d'inversion	42
IV.3 Transformée de Fourier et espace $\mathcal{S}$	44

IV.4 Transformation de Fourier des fonctions de $L^2$ . . . . .	45
IV.5 Analyse du signal à court terme. Fenêtrage . . . . .	46
IV.6 Exercices . . . . .	47
<b>V Distributions</b> . . . . .	<b>53</b>
V.1 Notion de distribution, distribution tempérée . . . . .	53
V.2 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée . . . . .	56
V.3 Mesure spectrale d'un signal. Application aux transmissions . . . . .	58
V.4 Transformée de Hilbert et signal analytique . . . . .	60
V.5 Exercices . . . . .	61
<b>VI Signaux à spectre limité. Échantillonnage</b> . . . . .	<b>65</b>
VI.1 Signaux à spectre limité . . . . .	65
VI.2 Théorèmes d'échantillonnage . . . . .	66
VI.3 Transformée de Fourier discrète . . . . .	69
VI.4 Application : Convertisseur numérique/analogique . . . . .	70
VI.5 Application : Le multiplexage . . . . .	70
VI.6 Exercices . . . . .	71
<b>VII Filtrage des signaux à temps discret</b> . . . . .	<b>73</b>
VII.1 Espaces de signaux à temps discret . . . . .	73
VII.2 Filtrage des signaux à temps discret . . . . .	74
VII.2.1 Linéarité et invariance par translation dans le temps . . . . .	74
VII.2.2 Transformée en $z$ . . . . .	75
VII.2.3 Les filtres rationnels . . . . .	76
VII.3 Applications . . . . .	78
VII.3.1 Échantillonnage. Conversion analogique/numérique . . . . .	78
VII.3.2 Fenêtres . . . . .	78
VII.3.3 Le filtrage en débruitage. . . . .	80
VII.4 Exercices . . . . .	80
<b>VIII Filtrage en temps continu. Applications à la commande</b> . . . . .	<b>83</b>
VIII.1 Notions de base : système, entrée, sortie, régulateur . . . . .	83
VIII.1.1 Systèmes linéaires entrée/sortie causaux. Filtrés . . . . .	83
VIII.1.2 Transformée de Laplace. Fonction de transfert . . . . .	85
VIII.2 Existence de filtres . . . . .	88
VIII.3 Production des sons : tube et membrane . . . . .	90
VIII.4 Diagrammes. Initiation aux boucles de commande . . . . .	91
VIII.4.1 Introduction : Conception de l'amortissement. . . . .	91
VIII.4.2 Boucle de commande. . . . .	92
VIII.4.3 Le P.I.D. . . . .	93
VIII.5 Exercices . . . . .	94

## PRÉAMBULE

Ce document suit essentiellement, jusque dans les exercices, le cours d'Analyse harmonique donné par J.P. Conze, disponible sur sa page internet, et que j'ai repris à sa suite. Je me suis efforcé de compléter l'exposé par une ouverture plus grande sur les applications en traitement de signal et en commande, ce qui m'a contraint à sacrifier certains aspects théoriques et approfondissements présents dans l'original.

Comme le titre l'indique l'approche «aléatoire» du traitement de signal n'est pas abordée ici afin de rendre le cours accessible à un public plus large.

Bernard Delyon

# I

---

## ALGÈBRES DE CONVOLUTION

---

---

### I.1 Algèbres de convolution, cas discret

#### I.1.1 Algèbres de Banach

DÉFINITION I.1. *Un espace vectoriel  $A$  sur  $\mathbb{C}$  muni également d'une opération de multiplication est appelé une algèbre si  $(A, +, \cdot)$  est un anneau et si :*

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y).$$

*On dit que  $A$  est une algèbre de Banach si de plus  $A$  est un normé et complet, et si*

$$\forall x, y \in A, \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|. \tag{I.1}$$

Par exemple l'espace des fonctions continues sur  $[0, 1]$  avec la norme  $\|f\| = \sup_x |f(x)|$  est une algèbre de Banach. L'espace  $\mathbb{R}^d$  muni de la norme euclidienne et du produit terme à terme en est également une. L'espace des matrices  $n \times n$  forme une algèbre de Banach non commutative.

On ne considèrera dans la suite que des algèbres commutatives. Noter que la présence d'une unité n'est pas requise.

La relation (I.1) est fondamentale car elle implique la continuité de la multiplication. Rappelons que dans un espace de Banach, la complétude fait que toute série absolument convergente est convergente. Une propriété intéressante des algèbres de Banach avec une unité est de pouvoir fabriquer facilement des éléments inversibles :

THÉORÈME I.2. *Soit  $A$  une algèbre de Banach possédant une unité  $e$ , et  $x \in A$  tel que  $\|x\| < 1$ . Alors  $e + x$  possède un inverse et*

$$\|(e + x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

*Démonstration:* On vérifie facilement par récurrence que  $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ . Par conséquent la série  $s_n = e - x + \dots + (-x)^{n-1}$  est absolument convergente. Comme

$$s_n(e + x) = e + (-x)^n = (e + x)s_n$$

on conclut en utilisant la continuité de la multiplication. ■

### I.1.2 L'algèbre de convolution ( $\ell^1(\mathbb{Z}), +, *$ )

Pour motiver la convolution des suites, on rappelle que si  $P(x) = \sum_i p_i x^i$  et  $Q(x) = \sum_i q_i x^i$  sont deux polynômes, alors  $P(x)Q(x) = \sum_i r_i x^i$  avec

$$r_i = \sum_j p_{j-i} q_j.$$

Soit  $\ell^1(\mathbb{Z})$  l'espace des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  à valeurs complexes telles que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u(n)| < \infty$ . Sur cet espace, la somme est définie terme à terme. On définit le produit de convolution de la façon suivante :

**DÉFINITION I.3.** Le **produit de convolution**  $u * v$  de deux suites  $u = (u_n)$  et  $v = (v_n)$  dans  $\ell^1(\mathbb{Z})$  est la suite  $u * v$  définie par

$$(u * v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{n-k} v_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

On vérifie aisément que, pour chaque  $n$ , cette série est absolument convergente et que  $u * v$  est dans  $\ell^1(\mathbb{Z})$ , à l'aide du résultat suivant :

**LEMME I.4.** Si  $(x_{i,j})_{i,j}$  est une série à termes positifs indexée par  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , on a :

$$\sum_{i,j} x_{i,j} = \sum_i \left( \sum_j x_{i,j} \right) = \sum_j \left( \sum_i x_{i,j} \right)$$

où la première somme (finie ou non) désigne le maximum sur toutes les sommes finies.

Ces égalités s'étendent aux suites  $y_{i,j}$  à valeurs complexes telles qu'un des trois termes soit fini (et donc les deux autres) pour  $x_{i,j} = |y_{i,j}|$ ; le premier terme est alors l'intégrale par rapport à la mesure de comptage.

L'espace  $\ell^1(\mathbb{Z})$  muni de la norme  $u \mapsto \|u\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|$  est un espace vectoriel normé complet (espace de Banach). On vérifie alors facilement que  $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1, *)$  forme une algèbre de Banach.

**Notation :** Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $\delta_n$  la suite définie par

$$\delta_n(k) = 1, \text{ si } k = n, = 0, \text{ sinon.}$$

L'algèbre  $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1, *)$  a une **unité**, qui est la suite  $\delta_0$ . La convolution par  $\delta_n$  s'identifie à la translation par  $-n$  : pour toute suite  $(u(k))$ , on a  $(\delta_n * u)(k) = u(k - n)$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ .

**Sous-algèbres :** On obtient deux sous-algèbres de  $(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1, *)$  en se restreignant :

1. aux suites à support fini
2. aux suites à support dans  $\mathbb{Z}^+$ .

**Remarque :** De façon générale, si  $u$  et  $v$  sont deux suites nulles pour les indices  $< 0$ , le produit de convolution  $u * v$  est bien défini (même si les suites ne sont pas sommables) et s'écrit :

$$(u * v)(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^n u(k)v(n-k), & \text{pour } n \geq 0, \\ 0, & \text{pour } n < 0. \end{cases}$$

On obtient ainsi l'algèbre de convolution des suites à support dans  $\mathbb{Z}^+$ .

### I.1.3 L'algèbre de convolution $(\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), +, *)$

Soit  $p$  un entier  $> 0$ . Les fonctions à valeurs complexes définies sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire les suites périodiques de période  $p$ , forment un espace vectoriel noté  $\ell(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ . Cet espace est naturellement isomorphe à  $\mathbb{C}^p$ , puisque la donnée d'une suite  $p$ -périodique  $u$  est celle du vecteur  $(u(0), \dots, u(p-1))$ .

DÉFINITION I.5. : *Le produit de convolution de deux suites  $u = (u_n)$  et  $v = (v_n)$  périodiques de période  $p$  est la suite  $p$ -périodique  $u * v$  définie par :*

$$(u * v)(n) = \sum_{k=0}^{p-1} u(n-k)v(k), \quad n = 0, 1, \dots, p-1.$$

On vérifiera sans trop de difficulté que ce produit définit bien une loi interne sur l'espace des suites périodiques de période  $p$ , qui en fait une algèbre. On obtient une algèbre de Banach si on le muni de la norme  $\|u\|_1 = \sum_{k=0}^{p-1} |u(k)|$ .

## I.2 Convolution sur $\mathbb{R}$

DÉFINITION I.6. *On appelle produit de convolution de deux fonctions  $f$  et  $g$  la fonction  $f * g$  définie par :*

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t-s) ds.$$

Il s'agit pour l'instant plus d'une déclaration d'intention que d'une définition puisque la définition de l'intégrale peut poser problème.

### I.2.1 Cas de l'espace $C_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas simple où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues à support compact sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t$ , la fonction  $s \rightarrow f(s)g(t-s)$  est continue à support compact et peut être intégrée ; l'application  $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s) ds$  définit donc une fonction, notée  $f * g$ .

**Support :**  $Supp(f * g) \subset Supp(f) + Supp(g)$ .

On a noté  $A+B = \{x = y+z : y \in A, z \in B\}$ . En effet si  $(f * g)(t) \neq 0$ , il existe  $s$  tel que  $f(s)g(t-s) \neq 0$ , alors  $s \in Supp(f)$  et  $t-s \in Supp(g)$ , et donc nécessairement  $t \in Supp(f) + Supp(g)$ .

**Commutativité.** Par le changement de variables  $z = t-s$  dans la définition on obtient :

$$(f * g)(t) = \int f(s)g(t-s)ds = \int f(t-z)g(z)dz = \int g(z)f(t-z)dz = (g * f)(t).$$

**Associativité.** Soient  $f, g, h$  trois fonctions continues à support compact, on a

$$(f * (g * h))(t) = \int f(z)(g * h)(t-z)dz = \int f(z) \left( \int g(u)h(t-z-u)du \right) dz$$

et par application d'une forme élémentaire du théorème de Fubini (noter que la fonction  $(s, z) \rightarrow f(z)g(s-z)h(t-s)$  est continue à support compact)

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(t) &= \int (f * g)(s)h(t-s)ds = \int \left( \int f(z)g(s-z)dz \right) h(t-s)ds \\ &= \int f(z) \left( \int g(s-z)h(t-s)ds \right) dz \end{aligned}$$

et l'on conclut par le changement de variable  $u = s-z$  dans l'intégrale en  $s$ .

**Continuité.** Si  $g$  est continue à support compact, elle est uniformément continue. Par conséquent, l'expression

$$|(f * g)(t + h) - (f * g)(t)| \leq \int |f(s)| |g(t + h - s) - g(t - s)| ds \leq \sup_x |g(x + h) - g(x)| \int |f(s)| ds$$

tend vers 0 quand  $h \rightarrow 0$ , ce qui prouve la continuité de  $f * g$ . On a finalement démontré le résultat suivant :

**THÉORÈME I.7.** *L'espace  $(C_c(\mathbb{R}), +, *)$  est une algèbre commutative.*

**Absence d'unité.** On montre en exercice que  $C_c(\mathbb{R})$  n'a pas d'unité pour le produit de convolution.

## I.2.2 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Nous traitons maintenant le cas où  $f$  et  $g$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ . Si  $f$  et  $g$  sont intégrables sur  $\mathbb{R}$ , leur **produit de convolution**  $f * g$  est toujours défini de la même façon. Mais son existence est plus difficile à établir. Rappelons tout d'abord le théorème de Fubini

**THÉORÈME I.8.** *Si  $f$  est une fonction borélienne  $\geq 0$  de deux variables alors, la fonction d'une variable  $x \rightarrow \int f(x, y) dy$  est borélienne et*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right) dy \quad (\text{I.2})$$

les trois termes pouvant être infinis.

Soit  $g$  une fonction borélienne telle qu'un des trois termes (et donc les deux autres) soit fini pour  $f(x, y) = |g(x, y)|$ , alors pour presque tout  $x$  la fonction  $g(x, y)$  est intégrable en  $y$ , la fonction  $\int_{\mathbb{R}} g(x, y) dy$  est intégrable en  $x$ , et  $g$  satisfait (I.2).

**LEMME I.9.** *La convolution de deux fonctions  $f$  et  $g$  intégrables sur  $\mathbb{R}$  est bien définie. Le résultat  $f * g$  est encore intégrable et vérifie :*

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

*Démonstration:* Les fonctions  $f$  et  $g$  étant intégrables, la fonction de deux variables  $(t, s) \rightarrow f(t - s)g(s)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ , d'après le théorème de Fubini. On vérifie ensuite facilement que

$$\int (f * g)(t) dt = \int f(t) dt \int g(s) ds.$$

Et comme  $|f * g| \leq |f| * |g|$  on en déduit l'inégalité d'algèbre normée :

$$\|f * g\|_1 \leq \| |f| * |g| \|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1. \quad \blacksquare$$

**THÉORÈME I.10.** *L'opération  $(f, g) \rightarrow f * g$  définit sur  $L^1(\mathbb{R})$  une structure d'algèbre de Banach commutative.*

*Démonstration:* La complétude est admise. La commutativité résulte du changement de  $s$  en  $t - s$ , qui laisse invariante l'intégrale. L'associativité résulte du théorème de Fubini (exercice).  $\blacksquare$

Il est important de noter que, du fait de la commutativité, il y a deux écritures pour la convolution :

$$(f * g)(t) = \int f(t - s)g(s)ds = \int f(s)g(t - s)ds.$$

### I.2.3 Convolution dans les espaces $L^p(\mathbb{R})$

Remarquons que si  $f \in C_c(\mathbb{R})$  (continue à support compact) et  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ , alors  $f * g$  est uniformément continue. Il suffit pour le voir d'écrire :

$$|(f * g)(t+h) - (f * g)(t)| \leq \|g\|_\infty \int |f(t+h-s) - f(t-s)| ds.$$

Cette remarque va nous servir à démontrer le théorème qui suit. Deux cas seront distingués car l'espace  $C_c(\mathbb{R})$  est dense dans tous les  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$  mais pas dans  $L_\infty$  (il est dense dans  $C_0(\mathbb{R})$  pour cette norme).

**THÉORÈME I.11.** *Si  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$ , avec  $1 \leq p, q \leq \infty$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors  $f * g$  est bien définie, bornée et uniformément continue. Si  $1 < p < \infty$ ,  $f * g$  tend vers 0 à l'infini :  $f * g \in C_0(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration:* a) Soient  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$ . L'inégalité de Hölder implique que pour tout  $t$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(s)| |g(t-s)| ds \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

donc la fonction  $s \rightarrow f(s) g(t-s)$  est bien intégrable et l'on a

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Il reste à montrer l'uniforme continuité, et la convergence vers 0 dans le cas  $1 < p < \infty$ .

b) Soit  $p$  tel que  $1 < p < \infty$  (ce qui implique  $1 < q < \infty$ ). D'après la densité de  $C_c(\mathbb{R})$  dans  $L^p(\mathbb{R})$ ,  $L^q(\mathbb{R})$ , il existe des suites  $(f_n)$  et  $(g_n)$  dans  $C_c(\mathbb{R})$  telles que  $\lim_n \|f - f_n\|_p = 0$  et  $\lim_n \|g - g_n\|_q = 0$ . La suite  $(\|f_n\|_p)_{n \geq 1}$  est bornée. On a alors

$$\|f * g - f_n * g_n\|_\infty \leq \|(f - f_n) * g\|_\infty + \|f_n * (g - g_n)\|_\infty \leq \|f - f_n\|_p \|g\|_q + \|f_n\|_p \|g - g_n\|_q,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de la suite  $(f_n * g_n)$  vers  $f * g$ , et donc la continuité de  $f * g$ . De plus, comme  $f_n * g_n$  est à support compact, la limite  $f * g$  est une fonction qui tend vers 0 à l'infini.

c) Soit maintenant  $p = 1$ ,  $q = \infty$ . Il existe une suite  $(f_n)$  dans  $C_c(\mathbb{R})$  telle que  $\lim_n \|f - f_n\|_1 = 0$ . On a alors :

$$\|f * g - f_n * g\|_\infty \leq \|f - f_n\|_1 \|g\|_\infty.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite  $(f_n * g)$  vers  $f * g$ , et donc, comme  $f_n * g$  est uniformément continue (car  $f_n \in C_c(\mathbb{R})$  et  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ), la continuité uniforme de  $f * g$ . ■

La convolée d'une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  et d'une fonction bornée ne tend typiquement pas vers 0 à l'infini. Par exemple, si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g$  constante, alors  $f * g$  est constante.

**Cas de  $L^p * L^q$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ .**

On montre qu'en définissant  $r$  par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$  on a  $L^p * L^q \subset L^r$ . Le cas  $q = 1$  est utile. La démonstration proposée en exercice, exploite l'inégalité de Jensen.

### I.3 Convolution des fonctions périodiques

Pour fixer les idées, on raisonne avec des fonctions de période 1 : on se ramène à ce cas en observant que si  $f$  est  $a$ -périodique,  $x \rightarrow f(ax)$  est 1-périodique. On note  $C(\mathbb{T})$  l'espace des fonctions continues périodiques de période 1. On prendra garde que la continuité au sens des fonctions 1-périodiques impose que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$ , ce qui fait la différence entre  $C(\mathbb{T})$  et  $C([0, 1])$ . En effet le tore de dimension 1,  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , est identifié à l'intervalle  $[0, 1[$  avec la topologie du cercle (tout voisinage de 0 contient un

intervalle de la forme  $]1 - \varepsilon, 1[$ ). L'espace des fonctions périodiques de période 1 s'identifie à l'espace des fonctions définies sur  $\mathbb{T}$ . On peut également identifier cet espace à l'espace des fonctions définies sur l'intervalle  $[0, 1]$  et prenant les mêmes valeurs au bord.

On notera  $L^p(\mathbb{T})$  l'espace formé des (classes de) fonctions de période 1, mesurables et telles que  $|f|^p$  soit intégrable sur un intervalle de période. Par la suite, pour tout  $p \geq 1$ , la notation  $\| \cdot \|_p$  désignera la norme définie sur  $L^p(\mathbb{T})$  par  $\|f\|_p = (\int_0^1 |f|^p dt)^{1/p}$ . Cet espace s'identifie à  $L^p([0, 1])$ .

REMARQUE : Si  $f$  est 1-périodique, l'intégrale  $\int_a^{a+1} f(t) dt$  ne dépend pas de  $a$ . En effet, soit  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $a \leq n < a + 1$ . Nous avons :

$$\int_a^{a+1} f(t) dt = \int_a^n f(t) dt + \int_n^{a+1} f(t) dt = \int_{a-n+1}^1 f(t) dt + \int_0^{a+1-n} f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

DÉFINITION I.12. : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues 1-périodiques. On définit leur produit de convolution  $f * g$  par :

$$(f * g)(t) = \int_0^1 f(s)g(t-s) ds.$$

On notera que cette définition tient compte du fait que les fonctions sont périodiques : l'intégrale est restreinte à une période. Il est clair que  $f * g$  est à son tour périodique de période 1. En utilisant le changement de variable  $s \rightarrow u = t - s$  et la remarque précédente, on obtient :

$$(g * f)(t) = \int_0^1 g(s)f(t-s) ds = \int_{t-1}^t g(t-u)f(u) du = \int_0^1 f(u)g(t-u) ds = (f * g)(t)$$

On démontre que la convolution est une opération interne à  $C(\mathbb{T})$  ( $f * g$  est continue, si  $f$  et  $g$  le sont) et qu'elle est associative. Notons que les fonctions de  $C(\mathbb{T})$  sont uniformément continues et bornées et que  $C(\mathbb{T})$  muni de la norme uniforme est une algèbre de Banach pour le produit ordinaire.

THÉORÈME I.13.  $(C(\mathbb{T}), +, *, \| \cdot \|_\infty)$  est une algèbre de Banach commutative.

De même que sur  $\mathbb{R}$ , la convolution peut être étendue à des classes plus générales de fonctions, avec des résultats et des démonstrations analogues. En particulier

THÉORÈME I.14.  $(L^1(\mathbb{T}), +, *, \| \cdot \|_1)$  est une algèbre de Banach commutative.

Rappelons que l'on a  $L^q(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$  si  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  (contrairement à ce qui se passe sur  $\mathbb{R}$ ).

**Algèbre des polynômes trigonométriques.** Un polynôme trigonométrique (de période 1) est une combinaison linéaire finie des fonctions  $t \rightarrow e^{2\pi ikt}$  :

$$P(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi ikt}.$$

Les polynômes trigonométriques forment une sous-algèbre de  $(C(\mathbb{T}), +, *)$  pour la convolution. De plus :

PROPOSITION I.15. Si  $f$  est une fonction de période 1 intégrable sur  $[0, 1]$ , pour tout polynôme trigonométrique  $P$  de période 1,  $f * P$  est un polynôme trigonométrique de période 1. Si  $Q$  est un autre polynôme trigonométrique de coefficients  $Q_n$ , on a  $(P * Q)_n = P_n Q_n$ .

Démonstration: Soit  $P(t) = \sum_{k=-N}^N a_n e^{2\pi ikt}$ . Remarquons que si l'on note  $c_n(f) = \int_0^1 f(s) e^{-2\pi ins} ds$  le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on a  $c_n(P) = a_n$  et :

$$(f * P)(t) = \int_0^1 f(s) \left( \sum_{k=-N}^N c_n(P) e^{2\pi in(t-s)} \right) ds = \sum_{k=-N}^N c_n(P) c_n(f) e^{2\pi ikt}$$

ce qui prouve la proposition. ■

## I.4 Exercices

### Exercice I.4.1 Annulation d'écho.

Un signal  $x_n$  est affecté d'un écho de sorte que le signal réel  $y_n$  est

$$y_n = x_n + \alpha x_{n-q}$$

pour un certain  $q > 0$  et un  $0 < \alpha < 1$ . On commencera par le cas  $q = 1$

1. Montrer que  $y = x * h$  pour une certaine suite  $(h_n)$ .
2. Montrer que  $h$  admet un inverse pour la convolution et donner son expression. On pourra employer deux méthodes différentes :
  - (a) Noter que (ici  $q = 1$ )  $x_n = y_n - \alpha x_{n-1}$  et en déduire une expression de  $x_n$  en fonction des  $y_i$ .
  - (b) Remarquer que  $\|h - \delta_0\|_1 < 1$  et exploiter un théorème du cours.
3. On suppose qu'il y a plusieurs réflexions :

$$y_n = x_n + \sum_{i=1}^r \alpha_i x_{n-q_i}.$$

Expliciter  $h$  et proposer une condition sous laquelle  $h$  est inversible.

**Exercice I.4.2** Soient  $x$  et  $y$  deux suites définies sur  $\mathbb{Z}$ . Vérifier que le produit de convolution  $x * y$  est bien défini dans les cas suivants :

- $x, y \in \ell^1$ ,
- $x, y \in \ell^2$ ,
- $x \in \ell^\infty, y \in \ell^1$ ,
- $x, y$  à support dans l'ensemble des entiers  $\geq 0$ ,
- $x$  quelconque et  $y$  à support fini.

**Exercice I.4.3**  $(C_c(\mathbb{R}), *)$  et  $(L^1(\mathbb{R}), *)$  n'ont pas d'unité.

Soit  $u$  une fonction  $\geq 0$  à support compact d'intégrale 1. On pourra supposer pour simplifier que le support de  $u$  est contenu dans  $[-1, 1]$ . Pour  $h > 0$  on considère les fonctions  $u_h$  définies par :  $u_h(t) = \frac{1}{h}u(t/h)$ .

Soit  $f \in C_c(\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions continues à support compact sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que :  $(f * u_h)(t) - f(t) = \int (f(t - sh) - f(t))u(s) ds$ .
2. En déduire que  $\lim_{h \rightarrow 0} f * u_h = f$ , la limite étant uniforme.
3. En utilisant ce résultat, prouver que l'algèbre de convolution  $(C_c(\mathbb{R}), *)$  n'a pas d'unité.

*Indication* : Raisonner par l'absurde en appliquant ce qui précède à la fonction  $f$  unité.

**Exercice I.4.4** Continuité des homomorphismes d'algèbre de Banach dans  $\mathbb{C}$ .

On se propose de montrer que tout homomorphisme  $\varphi$  d'une algèbre normée de Banach  $A$  dans  $\mathbb{C}$  (c.-à-d.,  $\varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$ ,  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$  et  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ ) est continu, de norme au plus 1.

1. Soit  $v \in A$  tel que  $\|v\| < 1$ . Montrer que la série  $v + v^2 + \dots + v^n + \dots$  est convergente et que sa somme  $w$  vérifie  $v + vw = w$ . En déduire que  $\varphi(v) \neq 1$ .
2. En déduire qu'il n'existe pas d'élément  $v_0 \in A$  tel que  $|\varphi(v_0)| > \|v_0\|$  (appliquer la question précédente à  $v = v_0/\varphi(v_0)$ ). En déduire que  $|\varphi(a) - \varphi(b)| \leq \|a - b\|$  pour tous  $a, b \in A$ .

**Exercice I.4.5** On se propose de montrer que l'espace vectoriel  $(\ell^1(\mathbb{Z}), +, *)$  muni de la norme  $\|u\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|$  est une algèbre de Banach.

1. Complétude. Pour simplifier les notations on va montrer que  $\ell^1(\mathbb{N})$  est complet (on conclut ensuite facilement en notant que toute suite de Cauchy de  $\ell^1(\mathbb{Z})$  se décompose en deux suites de Cauchy de  $\ell^1(\mathbb{N})$ ...). Soit  $x^n$  une suite de Cauchy de  $\ell^1(\mathbb{N})$ .

- (a) Montrer que pour chaque  $i$ ,  $x_i^n$  converge vers une certaine limite  $x_i^\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$
- (b) Montrer que  $\|x^n\|_1$  converge vers une certaine limite finie (on remarquera que c'est une suite de Cauchy).
- (c) Montrer en utilisant le lemme de Fatou<sup>1</sup> que  $\|x^\infty\|_1$  est inférieur à cette limite.
- (d) Montrer en utilisant le lemme de Fatou que pour tout  $n$   $\|x^n - x^\infty\|_1 \leq \liminf_p \|x^n - x^p\|_1$  puis conclure à la complétude de l'espace.

2. Montrer que  $(\ell^1(\mathbb{Z}), +, *)$  est une algèbre de Banach.

**Exercice I.4.6** Démontrer que  $L^p * L^1 \subset L^p$  en utilisant l'inégalité de Jensen<sup>2</sup> pour majorer  $(f * g)(t)$  (appliquer l'inégalité à une mesure de probabilité bien choisie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue).

---

1. Pour toute suite d'éléments  $y^n \in \ell^1(\mathbb{N})$  positifs ( $y_i^n \geq 0$  pour tous  $n$  et  $i$ ), on a :  $\sum_i \liminf_n y_i^n \leq \liminf_n \sum_i y_i^n$ . La situation typique où l'inégalité est stricte est  $y_i^n = 1_{i=n}$  : «la masse part à l'infini».

2. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité (c.-à-d. positive et d'intégrale 1),  $g$  une fonction  $\mu$ -intégrable réelle et  $f$  une fonction convexe sur  $\mathbb{R}$ , alors :  $f(\int g(x)\mu(dx)) \leq \int f(g(x))\mu(dx)$ .

# II

---

## APPLICATIONS DE LA CONVOLUTION SUR $\mathbb{R}$ ET $\mathbb{T}$

---

---

### II.1 Régularisation par convolution

Nous avons vu que si  $f$  est intégrable et  $g$  bornée,  $f * g$  est continue : la convolution a un effet de régularisation. On va voir que le produit de convolution hérite également, sous certaines conditions, des propriétés de différentiabilité vérifiées éventuellement par l'un ou l'autre des facteurs.

**PROPOSITION II.1.** *Soient  $f$  une fonction intégrable et  $g$  une fonction bornée, dérivable, de dérivée  $g'$  continue et bornée. La fonction  $f * g$  est dérivable et de dérivée  $(f * g)' = f * g'$ .*

*Démonstration:* Intéressons-nous à  $f * g$  au voisinage de  $t \in \mathbb{R}$ . D'après le théorème des accroissements finis

$$h^{-1}|g(t+h-s) - g(t-s)| \leq \|g'\|_{\infty}.$$

La famille de fonctions (dépendant du paramètre  $h$ ) :

$$s \rightarrow \frac{1}{h}f(s)[g(t+h-s) - g(t-s)]$$

est donc majorée par la fonction intégrable fixe  $s \mapsto \|g'\|_{\infty}|f(s)|$  et converge ponctuellement vers  $s \mapsto g'(t-s)f(s)$  ; on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(f * g)(t+h) - (f * g)(t)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \int f(s) \frac{1}{h} [g(t+h-s) - g(t-s)] ds \\ &= \int f(s) g'(t-s) ds \\ &= (f * g')(t). \end{aligned}$$

■

En appliquant la proposition aux dérivées successives de  $f * g$ , on obtient :

**COROLLAIRE II.2.** *Si  $f$  est une fonction intégrable et  $g$  une fonction bornée indéfiniment dérivable à dérivées bornées, la fonction  $f * g$  est indéfiniment dérivable et pour tout entier  $p \geq 1$ ,  $(f * g)^{(p)} = f * g^{(p)}$ .*

*Si  $f$  et  $g$  sont indéfiniment dérivables, bornées et intégrables ainsi que leur dérivées, on a pour tous entiers  $p, q \geq 1$  :  $(f * g)^{(p+q)} = f^{(p)} * g^{(q)}$ .*

**PROPOSITION II.3.** *Si  $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$  et  $g$  est une fonction dérivable intégrable ayant une dérivée continue et intégrable, la fonction  $f * g$  est dérivable, de dérivée  $(f * g)' = f * g'$ .*

*Démonstration:* La fonction  $f * g'$  est bien définie et continue. De plus elle est la dérivée de la fonction  $x \mapsto \int_a^x (f * g')(t) dt$ , où  $a$  est une valeur fixée. Il suffit donc de démontrer que cette dernière fonction est égale à une constante près à la fonction  $f * g$ . On obtient en échangeant l'ordre d'intégration grâce au théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_a^x (f * g')(t) dt &= \int_a^x \int f(s)g'(t-s) ds dt = \int f(s) \left( \int_a^x g'(t-s) dt \right) ds \\ &= \int f(s)[g(x-s) - g(a-s)] ds = (f * g)(x) - (f * g)(a). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**COROLLAIRE II.4.** *Si  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  et  $g$  une fonction indéfiniment dérivable et intégrable ainsi que toutes ses dérivées, la fonction  $f * g$  est indéfiniment dérivable et on a*

$$(f * g)^{(n)} = f * g^{(n)}, \quad \forall n \geq 1.$$

## II.2 Convolution et approximation

### II.2.1 Unités approchées

**DÉFINITION II.5.** *On dit qu'une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions intégrables forme une unité approchée, si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\varphi_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{II.1}$$

$$\int \varphi_n(x) dx = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{II.2}$$

$$\forall \eta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| < \eta} \varphi_n(x) dx = 1. \tag{II.3}$$

La dernière condition signifie que la masse de  $\varphi_n$  se concentre autour de 0. Comme l'intégrale totale vaut 1 la condition (II.3) équivaut à :

$$\forall \eta > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| > \eta} \varphi_n(x) dx = 0.$$

De façon analogue, on dit qu'une famille de fonctions intégrables  $(\varphi_t)_{t > 0}$  forme une unité approchée si (II.3) est satisfait lorsque  $t \rightarrow 0$ .

**Exemple.** Soit  $\varphi$  une fonction intégrable  $\geq 0$ , d'intégrale 1. Alors la suite  $(\varphi_n)$  définie par  $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$  forme une unité approchée. En effet, nous avons  $\varphi_n \geq 0$  son intégrale vaut 1, et, par le changement de variable  $u = nx$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\eta}^{\eta} n\varphi(nx) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n\eta}^{n\eta} \varphi(x) dx = 1.$$

De même la famille  $(\varphi_t)_{t > 0}$  définie par

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{t} \varphi\left(\frac{x}{t}\right)$$

forme une unité approchée.

On va voir que sous des conditions de régularité et d'intégrabilité des fonctions  $\varphi_n$  (p.ex.  $\varphi_n \in C_c^\infty$ ), les fonctions  $f * \varphi_n$  seront régulières et convergeront vers  $f$  en un sens que l'on va préciser.

## II.2.2 Convergence ponctuelle

THÉORÈME II.6. Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite formant une unité approchée. Si  $f$  est une fonction mesurable bornée sur  $\mathbb{R}$  alors

- En tout point  $t$  de continuité de  $f$  la suite  $(f * \varphi_n)(t)$  converge vers  $f(t)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- Si  $f$  est continue la convergence est uniforme sur tout compact. Si  $f$  est uniformément continue la convergence est uniforme.

*Démonstration:* Les fonctions  $\varphi_n$  étant intégrables,  $f * \varphi_n$  est bien définie et est uniformément continue. Soit  $t$  un point de continuité de  $f$ . Montrons que  $\lim_n (f * \varphi_n)(t) = f(t)$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après la continuité de  $f$  en  $t$ , il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $s$  vérifiant  $|s| \leq \eta$ , on ait  $|f(t-s) - f(t)| < \varepsilon$ . Les fonctions  $\varphi_n$  étant positives, d'intégrale 1, on peut écrire :

$$(\varphi_n * f)(t) - f(t) = \int \varphi_n(s)[f(t-s) - f(t)] ds,$$

d'où :

$$\begin{aligned} |(\varphi_n * f)(t) - f(t)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(s) |f(t-s) - f(t)| ds \\ &= \int_{|s| \leq \eta} \varphi_n(s) |f(t-s) - f(t)| ds + \int_{|s| > \eta} \varphi_n(s) |f(t-s) - f(t)| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{|s| \leq \eta} \varphi_n(s) ds + 2\|f\|_{\infty} \int_{|s| > \eta} \varphi_n(s) ds \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_{\infty} \int_{|s| > \eta} \varphi_n(s) ds. \end{aligned}$$

Choisissons  $n_0$  tel que  $\int_{|s| > \eta} \varphi_n(s) ds < \varepsilon$ , pour  $n \geq n_0$ . On obtient alors  $|(\varphi_n * f)(t) - f(t)| \leq \varepsilon(1 + 2\|f\|_{\infty})$ , pour  $n \geq n_0$ . Ceci prouve la convergence annoncée.

L'uniformité de la convergence vient de ce que  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  peut être déterminé indépendamment de  $t$ . ■

## II.2.3 Approximation dans $L^1$

THÉORÈME II.7. Soient  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $(\varphi_n)$  une unité approchée. Alors la suite  $(f * \varphi_n)$  converge vers  $f$  au sens  $L^1$  :

$$\|f * \varphi_n - f\|_1 \rightarrow 0.$$

*Démonstration:* Nous savons que  $f * \varphi_n$  est bien défini. Notons  $T_s f$  la fonction translatée de  $f$  par  $-s$  :  $T_s f(t) = f(t-s)$ . Par passage aux valeurs absolues, on a les majorations :

$$\|f * \varphi_n - f\|_1 \leq \int \int |f(t-s) - f(t)| \varphi_n(s) ds dt = \int \|T_s f - f\|_1 \varphi_n(s) ds$$

(on a utilisé le théorème de Fubini). On a donc, pour  $\delta > 0$  :

$$\|f * \varphi_n - f\|_1 \leq \sup_{|s| \leq \delta} \|T_s f - f\|_1 + 2\|f\|_1 \int_{|s| > \delta} \varphi_n(s) ds.$$

Il reste à appliquer le fait que  $\|T_s f - f\|_1 \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow 0$ . ■

On a un énoncé analogue dans  $L^p$ , pour  $1 \leq p < \infty$ . Nous avons en effet la continuité de la translation en

norme  $L^p$ , ainsi que la majoration suivante (conséquence du théorème de Fubini et de l'inégalité de Jensen<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_n - f\|_p^p &\leq \int \left( \int |f(t-s) - f(t)| \varphi_n(s) ds \right)^p dt \\ &\leq \int \int |f(t-s) - f(t)|^p \varphi_n(s) ds dt = \int \|T_s f - f\|_p^p \varphi_n(s) ds \rightarrow 0. \end{aligned}$$

## II.2.4 Application à l'approximation.

**THÉORÈME II.8.** *Toute fonction uniformément continue bornée est limite uniforme de fonctions indéfiniment dérivables.*

*Démonstration:* D'après le théorème précédent et le corollaire II.2 il suffit de construire une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions indéfiniment dérivables, dont les dérivées de tous les ordres soient intégrables, formant une unité approchée.

Partons de la fonction  $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ . Il est clair que les fonctions  $\varphi_n$  définies par  $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$  sont indéfiniment dérivables et vérifient  $\varphi(x) \geq 0, \forall x$  et

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi} [\arctg x]_0^{\infty} = 1.$$

La suite  $(\varphi_n)$  forme donc une unité approchée. On montre par récurrence sur  $k$  que les dérivées de  $\varphi$  sont de la forme

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{P_k(x)}{(1+x^2)^{k+1}},$$

où les  $P_k$  sont des polynômes de degré  $k$ . Elles sont donc intégrables et bornées sur  $\mathbb{R}$ , de même que les dérivées des fonctions  $\varphi_n$ . ■

Une variante de la construction précédente consiste à utiliser des unités approchées formées de fonctions à support compact. On peut dans ce cas régulariser par convolution des fonctions qui ne seraient pas bornées, mais intégrables sur tout intervalle compact.

On pourra ainsi montrer que toute fonction  $f$  continue est limite uniforme sur tout intervalle compact de fonctions indéfiniment dérivables. (Voir les exercices).

## II.3 Cas des fonctions périodiques

### II.3.1 Unités approchées pour les fonctions périodiques

**DÉFINITION II.9.** *On dit qu'une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions 1-périodiques intégrables sur  $[0, 1]$  forme une unité approchée au sens des fonctions périodiques, si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\varphi_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{II.4}$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \varphi_n(x) dx = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{II.5}$$

$$\forall \eta \in ]0, \frac{1}{2}], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(x) dx = 1. \tag{II.6}$$

Les théorèmes (II.6) et (II.7) se formulent et se démontrent, dans le cadre des fonctions périodiques de façon analogue au cas de  $\mathbb{R}$  (en notant cependant que *toute fonction continue 1-périodique est uniformément continue*). Nous nous bornons à donner l'énoncé :

1. Si  $u$  est une fonction convexe sur un intervalle  $[c, d]$ , si  $\varphi$  est une fonction positive et d'intégrale égale à 1, pour toute fonction  $f$  à valeurs dans  $[c, d]$ , nous avons :  $u(\int f(t)\varphi(t)dt) \leq \int u(f(t))\varphi(t)dt$ . C'est en particulier vrai avec  $u(x) = |x|^p, p \geq 1$ .

THÉORÈME II.10. Soit  $f$  une fonction mesurable 1-périodique et  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite formant une unité approchée au sens des fonctions périodiques.

- Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$  alors  $\|f * \varphi_n - f\|_1 \rightarrow 0$ .
- Si  $f$  est bornée la suite  $((f * \varphi_n)(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(t)$  en tout point  $t$  de continuité de  $f$ .
- Si  $f$  est continue la convergence est uniforme.

**Noyaux de Fejer.** Donnons un exemple important d'une suite de polynômes périodiques qui forme une unité approchée et joue un grand rôle dans l'étude des séries de Fourier. Posons

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k t} \right|^2.$$

Un calcul simple permet d'exprimer le noyau de Fejer  $F_n$  sous les formes suivantes :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin n\pi t}{\sin \pi t} \right|^2, \quad (F_n(t) = n \text{ si } t \in \mathbb{Z}),$$

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{0 \leq j, k \leq n-1} e^{2\pi i(j-k)t} = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{2\pi i k t}. \quad (\text{II.7})$$

Les fonctions  $F_n$  sont donc  $\geq 0$  et d'intégrale 1 (intégrer la dernière somme).

PROPOSITION II.11. La suite  $(F_n)_{n \geq 1}$  forme une unité approchée sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

*Démonstration:* Les fonctions  $F_n$  sont périodiques, de période 1, positives ou nulles, d'intégrale égale à 1. Il reste à vérifier la condition (II.6) ; elle résulte immédiatement de l'inégalité

$$0 \leq F_n(t) \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2 \pi \varepsilon}, \text{ pour } \varepsilon \leq |t| \leq \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

### II.3.2 Application à l'approximation

**Approximation par les polynômes trigonométriques.** Rappelons que, si  $f$  est une fonction 1-périodique, intégrable sur  $[0, 1]$ , et si  $g$  est un polynôme trigonométrique (de période 1),  $f * g$  est un polynôme trigonométrique de période 1.

THÉORÈME II.12. Soit  $f$  une fonction continue périodique de période 1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $P$  (de période 1) tel que  $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$ .

Soit  $f$  une fonction intégrable périodique de période 1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un polynôme trigonométrique  $P$  (de période 1) tel que  $\|f - P\|_1 < \varepsilon$ .

*Démonstration:* Les fonctions  $f * F_n$  sont des polynômes trigonométriques, d'après une remarque précédente. Comme la suite  $(F_n)$  forme une unité approchée (au sens des fonctions périodiques), le résultat est une conséquence du théorème II.10.  $\blacksquare$

#### Exemple d'application du théorème d'approximation

THÉORÈME II.13. Soit  $\alpha$  un nombre irrationnel. Pour toute fonction continue  $f$  1-périodique, on a :

$$\lim_N \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (\text{II.8})$$

*Démonstration:* (1) Supposons d'abord que  $f$  soit une exponentielle complexe,  $f(x) = e^{2\pi ikx}$ . Si  $k = 0$  (II.8) est satisfait. Si  $k \neq 0$  nous avons, en remarquant que  $e^{2\pi ik\alpha} \neq 1$  :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi ikn\alpha} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{2\pi ikN\alpha}}{1 - e^{2\pi ik\alpha}},$$

qui converge bien vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini.

(2) L'équation (II.8) s'étend par linéarité aux polynômes trigonométriques.

(3) Soit maintenant  $f$  une fonction continue de période 1. D'après le théorème (3.5), pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe un polynôme trigonométrique  $P$ , de période 1, tel que  $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$ . On a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) - \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |f(n\alpha) - P(n\alpha)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P(n\alpha) - \int_0^1 P(x) dx \right| \\ &\quad + \int_0^1 |P(x) - f(x)| dx \\ &\leq \varepsilon + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P(n\alpha) - \int_0^1 P(x) dx \right| + \varepsilon. \end{aligned}$$

D'après le (2), le terme médian est  $\leq \varepsilon$  pour  $N$  assez grand, d'où le résultat. ■

## II.4 Exercices

**Exercice II.4.1** Soit  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$  d'intégrale 1 et  $f$  une fonction bornée continuellement dérivable. On pose  $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$  et  $\psi(x) = x\varphi(x)$ . On suppose que  $\psi \in L_1(\mathbb{R})$ . Montrer que :

$$\|f - f * \varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \|\psi\|_1 \|f'\|_\infty.$$

**Exercice II.4.2** Étant donné un réel  $h > 0$ , on note  $\varphi_h = 1_{[-h, h]}$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $[-h, h]$ .

1. Calculer  $\varphi_h * \varphi_1$ . (On pourra supposer  $h \leq 1$ ).
2. Étudier le comportement en tout point  $t \in \mathbb{R}$  de  $\frac{1}{2h}(\varphi_h * \varphi_1)(t)$ , quand  $h \rightarrow 0^+$ .

**Exercice II.4.3**

1. Soit  $\psi$  définie par  $\psi(x) = \exp(-\frac{1}{x})$ , pour  $x > 0$ ,  $\psi(x) = 0$ , pour  $x \leq 0$ . Vérifier que la fonction  $x \rightarrow \psi(x)\psi(1-x)$  est  $C^\infty$  à support compact.  
Construire une suite  $h_n$  de fonctions indéfiniment dérivables formant une unité approchée.
2. Utiliser les fonctions  $h_n$  pour montrer que toute fonction  $f$  continue est limite, uniformément sur tout intervalle compact, de fonctions indéfiniment dérivables.
3. Soit  $f$  une fonction continue à support compact.  
Étudier la suite  $(h_n * f)_{n \in \mathbb{N}}$ , et montrer que toute fonction continue à support compact est limite uniforme de fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

**Exercice II.4.4** Une application de la convolution

Pour  $n \geq 0$ , on considère les fonctions  $g_n$  définies par

$$g_n(x) = \frac{1}{c_n} (1 - x^2)^n 1_{|x| \leq 1}, \quad c_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx.$$

1. a) Montrer la minoration  $c_n > \frac{1}{n+1}, n \geq 0$ .  
 b) Montrer que la famille  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  forme une unité approchée, au sens de la convolution sur  $\mathbb{R}$ .  
 c) Soit  $f$  intégrable. Etudier la convergence de la suite  $(f * g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , si  $f$  est supposée (i) continue ou (ii) uniformément continue.
2. a) Montrer que, si  $f$  est nulle en dehors de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , la restriction de  $f * g_n$  à  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  coïncide avec un polynôme.  
 b) En utilisant ce qui précède, obtenir une preuve du théorème de Weierstrass : *toute fonction continue sur un intervalle compact  $[a, b]$  est limite uniforme de polynômes sur  $[a, b]$ .*

**Exercice II.4.5** Soit une fonction  $u$  intégrable à support compact telle que  $\int u(t) dt = 1$ . On ne suppose pas que  $u \geq 0$ . Soit, pour  $\varepsilon > 0$ ,  $u_\varepsilon$  définie par  $u_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}u(\varepsilon^{-1}t)$ .

1. Soit  $f$  une fonction bornée sur tout compact. Montrer que :  $(u_\varepsilon * f)(t) = \int f(t - \varepsilon s)u(s)ds$ .
2. Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée que  $(u_\varepsilon * f)(t) \rightarrow f(t)$  si  $f$  est continue au point  $t$ .

**Exercice II.4.6** *Unité approchée pour les fonctions périodiques*

Soient  $Q_n$  les polynômes trigonométriques définis par :

$$Q_n(t) = c_n 2^{-n} (1 + \cos 2\pi t)^n = c_n (\cos \pi t)^{2n},$$

où  $c_n$  est tel que  $\int_{-1/2}^{1/2} Q_n(t) dt = 1$ . On considère ici la convolution au sens des fonctions périodiques, de période 1.

1. Montrer que  $c_n/n$  est borné.
2. Montrer que  $Q_n$  est une unité approchée (on utilisera la question précédente).
3. Tracer les graphes de fonctions  $Q_n$  et étudier le comportement de la suite  $(Q_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.
4. En utilisant la convolution par les polynômes  $Q_n$ , montrer que toute fonction  $f$  continue de période 1 à valeurs réelles est limite uniforme de polynômes trigonométriques réels, i.e. de fonctions de la forme :

$$a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos 2\pi kt + \sum_{k=1}^n b_k \sin 2\pi kt.$$

5. Montrer que toute fonction  $f$  continue de période 1 à valeurs réelles et paire ( $f(-t) = f(t)$ ) est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques réels de la forme :

$$a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos 2\pi kt.$$

**Exercice II.4.7** *Résolution d'une équation différentielle à l'aide de la convolution.*

La température à l'instant  $t = 0$  d'une barre métallique est donnée par la fonction  $f(x)$ ,  $x$  étant l'abscisse sur la barre. Par ailleurs, la chaleur se propageant librement, la température à un instant  $t > 0$  est donnée par une fonction  $u(x, t)$  qui doit satisfaire l'équation de la chaleur

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On a donc la condition initiale  $u(\cdot, 0) = f(\cdot)$ . On se propose de trouver une solution à cette équation. Posons

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \varphi_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

1. Montrer que  $\varphi_t$  forme une unité approchée pour  $t$  tendant vers 0.
2. Montrer que  $\varphi(x, t) = \varphi_t(x)$  vérifie l'équation de la chaleur.
3. Soit  $f$  une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que la fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  par  $u(x, t) = (f * \varphi_t)(x)$  vérifie l'équation de la chaleur au bord  $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x)$ .  
*Indication* : La seule difficulté est de montrer que  $\frac{\partial u}{\partial t} = f * \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Pour justifier cette dérivation sous le signe intégral, on utilisera le théorème de convergence dominée ; dans ce but, on majorera pour chaque  $t$  fixé, les rapports  $|\frac{1}{h}[\varphi(x - y, t + h) - \varphi(x - y, t)]|$  par une fonction de  $y$  intégrable, indépendante de  $h$  variant dans un voisinage de 0 (utiliser le théorème des accroissements finis).
4. Considérons maintenant  $\psi_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}$ ,  $t > 0, x \in \mathbb{R}$ .
  - a) Calculer  $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \psi$ .
  - b) Soit  $f$  une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $v(x, t) = (f * \psi_t)(x)$ . De quel problème  $v(x, t)$  est-il solution ? (on se contentera de justifier informellement)

### Exercice II.4.8

DÉFINITION II.14. Une suite de points  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de l'intervalle  $[0, 1]$  est dite équirépartie (on dit aussi uniformément répartie) si, pour tout intervalle  $J = [a, b]$  contenu dans  $[0, 1]$ , on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n 1_J(u_k) = b - a,$$

où  $1_J$  est la fonction caractéristique de  $J$ .

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite équirépartie.
  - (a) Étant donnée une fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$ , montrer que la relation

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_1^n f(u_k) = \int_0^1 f(s) ds, \tag{II.9}$$

est vérifiée si  $f$  est une fonction en escalier et si  $f$  est une fonction continue.

- (b) Montrer que, pour toute fonction intégrable  $f$ , on a la relation

$$\lim_n \int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_1^n f(u_k + t) - \int_0^1 f(s) ds \right| dt = 0.$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dans  $[0, 1]$  telle que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \ell u_k} = 0, \text{ pour tout } \ell \text{ non nul dans } \mathbb{N}.$$

- a) Montrer que la relation (II.9) est vérifiée quand  $f$  est un polynôme trigonométrique de période 1, puis quand  $f$  est une fonction continue.
- b) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est équirépartie.
3. On note  $[t]$  la partie entière d'un nombre réel  $t$ . Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = n\alpha - [n\alpha]$  est équirépartie si et seulement si  $\alpha$  est irrationnel.

### Exercice II.4.9 Prolongement à l'intérieur du disque d'une fonction définie sur le cercle unité

Dans la suite,  $r$  est un paramètre réel,  $0 \leq r < 1$ . On note  $P_r$  la fonction définie, pour  $t \in \mathbb{R}$  par :

$$P_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{2\pi i n t}.$$

On note  $D$  le disque unité ouvert,  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

1. a) Montrer la relation

$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos 2\pi t}.$$

b) Montrer que la famille  $(P_r, 0 \leq r < 1)$  est une famille de fonctions positives, d'intégrale égale à 1 sur  $[0, 1]$ , formant dans la classe des fonctions périodiques de période 1 une unité approchée, quand  $r \rightarrow 1_-$  (i.e. quand  $r$  tend vers 1 par valeurs inférieures.)

*Indication.* On étudiera le comportement de  $P_r(t)$ , quand  $r \rightarrow 1_-$ , pour  $\varepsilon \leq t \leq 1 - \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est un nombre fixé vérifiant  $0 < \varepsilon < 1$ .

2. Soit  $f$  une fonction continue, périodique, de période 1. Montrer que, en un sens que l'on précisera,

$$\lim_{r \rightarrow 1_-} P_r * f = f.$$

3. Soit  $\varphi$  une fonction définie et continue sur le cercle unité et  $c_n = \int_0^1 \varphi(e^{2\pi it}) e^{-2\pi int} dt$ , pour  $n \in \mathbb{Z}$ . On suppose que  $\varphi$  vérifie la condition :  $c_n = 0$  pour tout  $n \leq -1$ .

Montrer qu'il existe une fonction  $\psi$ , définie sur  $D$ , vérifiant les conditions suivantes :

- (i)  $\psi$  est développable en série entière sur  $D$
- (ii)  $\lim_{r \rightarrow 1_-} \psi(re^{it}) = \psi(e^{it})$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

*Indication.* On définira  $\psi$  par  $\psi(z) = \sum_0^\infty z^n c_n$ , et on montrera que cette série est convergente sur  $D$ , puis on utilisera les propriétés de la famille  $(P_r)$  définie plus haut.



# III

---

## SÉRIES DE FOURIER

---

---

La représentation des phénomènes périodiques comme superposition d'harmoniques (fréquences) élémentaires a conduit depuis la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle au développement de la théorie des séries de Fourier. Le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction périodique correspond à une analyse de la fonction, alors que la représentation de la fonction comme la somme de sa série de Fourier, est une opération de synthèse mettant en jeu des problèmes de convergence.

Pour fixer les idées nous supposerons que les fonctions périodiques considérées sont de période 1. Nous noterons  $e_k$  les fonctions exponentielles imaginaires de période 1 :  $e_k(t) = \exp(2\pi ikt)$ .

### III.1 Séries trigonométriques et séries de Fourier

#### III.1.1 Polynômes et séries trigonométriques

Rappelons qu'un polynôme trigonométrique (de période 1) d'ordre  $n$  est une combinaison linéaire finie des fonctions  $e_k$ , pour  $|k| \leq n$ , c'est-à-dire une fonction de la forme

$$P = \sum_{k=-n}^n c_k e_k, \quad P(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi ikt}. \quad (\text{III.1})$$

Rappelons également que la famille de fonctions  $\{e_k, k \in \mathbb{Z}\}$  vérifie les relations d'orthogonalité

$$\int_0^1 e^{2\pi imt} e^{-2\pi int} dt = \begin{cases} 0, & \text{pour } n \neq m \\ 1, & \text{pour } n = m. \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

On en déduit facilement que pour tout  $n$  la famille  $\{e_k, -n \leq k \leq n\}$  forme une base orthonormée de l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des polynômes trigonométriques pour lesquels  $c_k = 0$  si  $|k| > n$ , muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \sum c_k(P) c_k(Q) = \int_0^1 P(t) \overline{Q(t)} dt.$$

En particulier l'écriture de  $P$  sous la forme (III.1) est unique :  $c_n = \int_0^1 P(t) e^{-2\pi int} dt$ .

**DÉFINITION III.1.** *On appelle série trigonométrique toute série formelle de la forme  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi ikt}$  où  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une suite de nombres complexes indexée par  $\mathbb{Z}$ .*

### III.1.2 Coefficients de Fourier d'une fonction

DÉFINITION III.2. Soit  $f$  une fonction périodique, de période 1, intégrable sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on appelle coefficient de Fourier de  $f$  d'ordre  $n$

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt. \quad (\text{III.3})$$

Il résulte immédiatement de (III.3) que les coefficients  $c_n(f)$  dépendent linéairement de  $f$  :

$$c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$$

pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  et vérifient la majoration :

$$|c_n(f)| \leq \|f\|_1$$

la norme  $\|\cdot\|_1$  étant calculée sur  $[0, 1]$ .

Dans le cas où la fonction  $f$  est un polynôme trigonométrique  $P(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k t}$ , les relations d'orthogonalité (III.2) impliquent que les coefficients  $c_k$  sont ses coefficients de Fourier  $c_k(P)$ .

#### Caractérisation d'une fonction par ses coefficients de Fourier

La proposition suivante exprime que l'application qui à une fonction associe la suite de ses coefficients de Fourier est injective, c'est-à-dire que toute fonction de  $L^1(\mathbb{T})$  est déterminée par ses coefficients de Fourier :

PROPOSITION III.3. Soit  $h \in L^1(\mathbb{T})$  telle que  $c_n(h) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Alors  $h(t) = 0$ , pour presque tout  $t$ . Si  $h \in C(\mathbb{T})$ , alors  $h$  est identiquement nulle.

Démonstration: D'après le théorème II.12, il existe une suite de polynômes trigonométriques  $Q_n, n \geq 1$ , telle que les polynômes trigonométriques  $P_n = Q_n * h$  convergent vers  $h$ , en norme  $\|\cdot\|_1$  (uniformément si  $h$  est continue).

Comme  $c_k(P_n) = c_k(Q_n) \cdot c_k(h) = 0$ , les polynômes  $P_n$  sont identiquement nuls. Il en est de même pour  $h$ , qui est la limite en norme  $\|\cdot\|_1$  des  $P_n$ , limite uniforme si  $h \in C(\mathbb{T})$ . ■

Considérons l'espace  $\ell_0(\mathbb{Z})$  formé des suites définies sur  $\mathbb{Z}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et tendant vers 0 à l'infini. C'est une **algèbre normée** pour l'addition et la multiplication ordinaire et la norme du sup :  $\|c\|_\infty = \sup_n |c_n|$ . Par ailleurs, nous avons défini une opération de convolution entre fonctions dans  $L^1(\mathbb{T})$ .

THÉORÈME III.4. L'application  $f \rightarrow (c_n(f), n \in \mathbb{Z})$  est un homomorphisme continu injectif de l'algèbre  $(L^1(\mathbb{T}), +, *, \|\cdot\|_1)$  dans l'algèbre  $(\ell_0(\mathbb{Z}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ . En particulier

$$c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g) \quad (\text{III.4})$$

Démonstration: La propriété d'homomorphisme (III.4) s'obtient en appliquant le théorème de Fubini (observer que la fonction  $(t, s) \rightarrow f(s)g(t-s) e^{-2\pi i n t}$  est dans  $L^1([0, 1]^2)$ ) :

$$\begin{aligned} c_n(f * g) &= \int_0^1 \left( \int_0^1 f(s)g(t-s) ds \right) e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \int_0^1 f(s) e^{-2\pi i n s} \left( \int_0^1 g(t-s) e^{-2\pi i n (t-s)} dx \right) ds \\ &= c_n(f) \cdot c_n(g). \end{aligned}$$

La majoration  $\sup_n |c_n(f)| \leq \|f\|_1$  assure la continuité de cet homomorphisme. L'injectivité est établie dans la proposition III.3. La propriété  $\lim_n |c_n(f)| = 0$  fait l'objet du lemme qui suit. ■

LEMME III.5. (Riemann-Lebesgue) Pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{T})$ , on a  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |c_n(f)| = 0$ .

Démonstration: C'est satisfait si  $f$  est un polynôme trigonométrique. Sinon, soit  $P$  un polynôme trigonométrique tel que  $\|f - P_\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon$ , on a

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f - P_\varepsilon)| + |c_n(P_\varepsilon)| \leq \varepsilon + |c_n(P_\varepsilon)|$$

qui peut être rendu arbitrairement petit en choisissant  $\varepsilon$  petit puis  $n$  grand. ■

### Régularité et décroissance des coefficients

Une simple intégration par parties montre que, si  $f$  est de classe  $C^p$ ,  $p \geq 1$ , les coefficients de Fourier de  $f$  sont de l'ordre de  $n^{-p}$  :

PROPOSITION III.6. Soit  $p$  un entier  $\geq 1$ . Si  $f$  est de classe  $C^p(\mathbb{T})$ , on a

$$c_n(f^{(p)}) = (2\pi in)^p c_n(f) \quad (\text{III.5})$$

et donc  $c_n(f) = o(n^{-p})$  (i.e.  $\lim_n n^p c_n(f) = 0$ ) en vertu du lemme de Riemann-Lebesgue

Démonstration: Pour  $f$  dans  $C^1(\mathbb{T})$ , nous avons en intégrant par parties

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt = \frac{1}{2\pi i n} \int_0^1 f'(t) e^{-2\pi i n t} dt = \frac{c_n(f')}{2i\pi n}.$$

Pour  $f \in C^p(\mathbb{T})$ , nous obtenons (III.5) par récurrence. ■

### III.1.3 Série de Fourier d'une fonction et noyau de Dirichlet

Étant donnée une fonction  $f$  dans  $L^1(\mathbb{T})$ , on appelle série de Fourier de  $f$  la série trigonométrique

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{2\pi i k t}.$$

On se pose le problème de la convergence de la suite des sommes partielles symétriques définies par

$$S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{2\pi i k t}.$$

Notons que chaque terme est

$$c_k(f) e^{2\pi i k t} = \int_0^1 f(s) e^{2i\pi k(t-s)} ds = (f * e_k)(t), \quad e_k(t) = e^{2\pi i k t}.$$

La somme partielle  $S_n(f)$  d'ordre  $n$  peut s'écrire sous la forme :

$$S_n(f)(t) = (D_n * f)(t) \quad (\text{III.6})$$

où l'on a posé

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{2i\pi k t} = \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\sin \pi t}, \quad (2n+1 \text{ si } t \in \mathbb{Z}).$$

Le polynôme trigonométrique  $D_n$  est appelé **noyau de Dirichlet** d'ordre  $n$ ,  $n \geq 1$ .

**Forme réelle des séries de Fourier.** Si  $f$  est une fonction à valeurs réelles, on représentera plutôt les sommes partielles de la série de Fourier de  $f$  sous forme réelle, obtenue en décomposant les exponentielles en cosinus et sinus :

$$a_0(f) + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos 2\pi k t + \sum_{k=1}^n b_k(f) \sin 2\pi k t$$

où l'on a posé  $a_0(f) = \int_0^1 f(t) dt$  et pour  $n \geq 1$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = 2 \int_0^1 f(t) \cos 2\pi n t dt, \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = 2 \int_0^1 f(t) \sin 2\pi n t dt.$$

Si  $f$  est paire, les  $b_n(f)$  sont nuls, et si  $f$  est impaire les  $a_n(f)$  sont nuls.

On verra plus tard que la famille de fonctions  $\{1, \sqrt{2} \cos 2\pi n t, \sqrt{2} \sin 2\pi n t, n \geq 1\}$  forme une base ortho-normée de  $L^2(\mathbb{T})$ .

## III.2 Premiers résultats de convergence ponctuelle

Le problème général de la convergence ponctuelle des séries de Fourier est un problème difficile, qui a joué un rôle important dans le développement de l'analyse réelle aux XIXe et XXe siècles et en particulier en théorie de l'intégration.

Des résultats partiels peuvent être obtenus facilement, si l'on fait des hypothèses sur les coefficients de Fourier ou sur la régularité des fonctions. Commençons par un premier résultat élémentaire de convergence.

**THÉORÈME III.7.** *Si  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est une suite telle que  $\sum |c_n| < \infty$ , alors la série  $\sum_{n=-p}^p c_n e^{2\pi i n t}$  converge uniformément vers une fonction continue et périodique, de période 1, dont le coefficient de Fourier d'ordre  $n$  est égal à  $c_n$ .*

*Démonstration:* Puisque  $\sum_n \|c_n e^{2\pi i n t}\|_\infty = \sum_n |c_n| < \infty$ , la convergence de la série  $\sum c_n e^{2\pi i n t}$  est normale dans  $C([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  et donc uniforme. La limite  $f$  est clairement continue périodique. De plus

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt = \int_0^1 \lim_n \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k t} e^{-2\pi i n t} dt.$$

On peut permuter l'intégrale et la limite par application du théorème de convergence dominée, puis permuter l'intégrale et la sommation. Les relations d'orthogonalité (III.2) impliquent alors  $c_n(f) = c_n$ . ■

On peut maintenant montrer le théorème d'inversion :

**THÉORÈME III.8.** *Soit  $f \in C(\mathbb{T})$  telle que  $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)| < \infty$ . On a, pour tout  $t$  :*

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2\pi i n t}$$

et la convergence vers  $f$  des sommes partielles  $S_n f$  de sa série de Fourier est uniforme.

*Démonstration:* Soit  $g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{2\pi i n t}$ . D'après le théorème III.7, les coefficients de Fourier de  $g$  et ceux de  $f$  coïncident :  $c_n(g) = c_n(f)$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ . Les coefficients de Fourier de  $f - g$  sont donc nuls. Il reste à appliquer la proposition III.3. ■

### Régularité et décroissance rapide

**DÉFINITION III.9.** *Une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est dite à décroissance rapide si elle vérifie*

$$\forall p \geq 1, \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} |n^p c_n| = 0.$$

**THÉORÈME III.10.** *Soit  $f$  une fonction continue 1-périodique. Une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  soit dans  $C^\infty(\mathbb{T})$  est que ses coefficients de Fourier forment une suite à décroissance rapide.*

*Démonstration:* Supposons  $f$  de classe  $C^\infty$ . D'après la proposition III.6,  $c_n(f) = o(n^{-p})$  pour tout  $p \geq 1$ . Donc la suite  $c_n(f)$  est à décroissance rapide.

Inversement, supposons qu'on ait  $\forall p \geq 1, c_n(f) = o(n^{-p})$ . Alors la série de Fourier  $\sum c_n(f) e^{2\pi i n t}$  converge uniformément vers  $f$ , d'après le théorème III.8. De même, pour tout  $p \geq 1$ , la série des dérivées  $p$ -ièmes  $\sum (2\pi i n)^p c_n(f) e^{2\pi i n t}$  converge normalement. Un résultat classique sur les suites de fonctions montre que ceci implique la dérivabilité de  $f$  à l'ordre  $p$ , pour tout entier  $p \geq 1$  et que  $f^{(p)}$  est la somme de la série formée des dérivées  $p$ -ièmes. ■

## Exemples de séries de Fourier

EXEMPLE 1 : On considère la fonction  $f$  de période 1, qui sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  est définie par  $f(t) = 1 - 2|t|$ .

Cette fonction étant paire,  $c_n(f)$  est réel pour tout  $n$ . Ses coefficients de Fourier sont donnés, après calcul, par  $c_0(f) = \frac{1}{2}$ ,  $c_n = \frac{2}{\pi^2 n^2}$ , si  $n$  est impair,  $= 0$  sinon,  $n \geq 1$ . La série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  étant convergente et  $f$  continue, nous pouvons appliquer le théorème III.8. On a, pour  $|t| \leq \frac{1}{2}$ ,

$$1 - 2|t| = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)t}{(2k+1)^2},$$

la convergence étant de plus uniforme. En faisant  $t = 0$ , on obtient la relation  $\pi^2 = 8 \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-2}$ .

EXEMPLE 2. On considère maintenant la fonction  $f$  impaire de période 1 définie par  $f(0) = 1$  et

$$f(t) = \text{signe}(t), \quad t \in [-1/2, 1/2[.$$

Cette fonction est continue sauf aux points de la forme  $\frac{p}{2}, p \in \mathbb{Z}$ . Sa série de Fourier est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4 \sin 2\pi(2k+1)t}{\pi (2k+1)}.$$

Le théorème III.8 ne peut s'appliquer car  $\sum |b_n| = +\infty$ . Prenons  $t = 0$ . La série se réduit à  $0 \neq f(0)$ ; il n'y a donc pas convergence au point 0 vers  $f(0)$  (notons cependant que l'on trouve la demi-somme des limites à gauche et à droite de  $f$  en 0, ce qui est en relation avec l'exercice III.6.11).

En revanche si nous prenons  $t = \frac{1}{4}$ , la série de Fourier converge en ce point (série alternée) et sa somme est égale à  $f(\frac{1}{4})$ . Ceci provient d'un résultat à venir : pour une fonction  $f$  vérifiant la condition  $|c_n(f)| \leq K|n|$ , il y a convergence de la série de Fourier de  $f$  en tout point de continuité de  $f$ .

**Le théorème de Dirichlet.** Nous allons montrer la convergence  $\lim_n S_n f(t) = f(t)$ , sous une condition de régularité de  $f$  au point  $t$ .

DÉFINITION III.11. Une fonction  $f$  définie sur un voisinage de  $t \in \mathbb{R}$  est dite höldérienne d'ordre  $\alpha$  au point  $t$ , s'il existe  $\delta > 0$  et  $M$  fini tels que :

$$|f(t+s) - f(t)| \leq M|s|^\alpha, \quad \text{pour tout } s \text{ tel que } |s| \leq \delta.$$

Elle est dite lipschitzienne si l'on peut choisir  $\alpha = 1$  (c'est le cas si  $f$  est dérivable en  $t$ ).

Elle est dite globalement höldérienne d'ordre  $\alpha$  si cette inégalité est satisfaite en tout point avec un  $M$  indépendant du point.

THÉORÈME III.12. Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$  est höldérienne d'ordre  $\alpha > 0$  au point  $t$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f(t)$ .

REMARQUE. Pour le cas où  $f$  est discontinue en  $t$ , voir l'exercice III.6.11.

Démonstration:  $t$  est fixé. Définissons la fonction  $g$  par

$$g(s) = \frac{f(t-s) - f(t)}{\sin \pi s}, \quad \text{pour } 0 < |s| \leq \frac{1}{2}.$$

On définit  $g$  arbitrairement en 0, par exemple  $g(0) = 0$ . En tenant compte du fait que  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_n(t) dt = 1$ , pour tout  $n \geq 1$ , on a, d'après (III.6) :

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) - f(t) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(t-s) - f(t)) D_n(s) ds \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(s) \sin((2n+1)\pi s) ds \\ &= \frac{1}{2i} (c_{2n+1}(g) - c_{-2n-1}(g)). \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est intégrable sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  (car bornée par  $M|s|^{\alpha-1}$  au voisinage de 0, disons  $|s| \leq \delta$ , et inférieure à  $(|f(t-s)| + |f(t)|)/\sin(\pi\delta)$  ailleurs). Le lemme de Riemann-Lebesgue implique la convergence vers 0 de la suite de ses coefficients de Fourier. La convergence vers 0 de  $S_n(f)(t) - f(t)$  en résulte. ■

**COROLLAIRE III.13.** *Si  $f \in L^1(\mathbb{T})$  est nulle sur un intervalle ouvert  $I$ , alors  $\lim_n S_n f(t) = 0, \forall t \in I$ .*

On voit donc que, si deux fonctions intégrables  $f$  et  $g$  coïncident sur un voisinage d'un point  $t$ , alors la différence  $S_n f(t) - S_n g(t)$  tend vers 0, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . La convergence de la série de Fourier d'une fonction  $f$  en un point  $t$  ne dépend donc que des valeurs de  $f$  sur un voisinage arbitraire de  $t$ .

### III.3 Noyaux de Fejer et convergence des séries de Fourier

**Convergence en moyenne des séries de Fourier.** Jusqu'ici nous n'avons obtenu la convergence vers  $f$  de la série de Fourier d'une fonction  $f$  que sous des hypothèses restrictives de régularité portant sur  $f$ . Nous allons maintenant examiner la convergence sous des hypothèses plus générales.

Tout est basé sur l'identité suivante :

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} D_k = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{k=-l}^l e^{2\pi i k t} \right) = \sum_{k=-n}^n \left( 1 - \frac{|k|}{n} \right) e^{2\pi i k t} = F_n(t) = \frac{1}{n} \left| \frac{\sin n\pi t}{\sin \pi t} \right|^2. \quad (\text{III.7})$$

On retrouve le noyau de Fejer. On a vu au § II.3.1 que la suite des  $F_n$  forme une unité approchée sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . Ce résultat et les théorèmes de convergence pour les identités approchées appliqués à la suite des convolées

$$\frac{1}{n} \sum_0^{n-1} S_k(f) = F_n * f$$

impliquent le théorème :

**THÉORÈME III.14.** *Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . On a la convergence dans  $L^1$  :*

$$\|n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f - f\|_1 \rightarrow 0.$$

*Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{T}$  la convergence est uniforme.*

Notons qu'en vertu de (III.7),  $F_n * f$  s'écrit également comme une série de Fourier pondérée :

$$n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} S_k f = \sum_{-n}^n \left( 1 - \frac{|k|}{n} \right) c_k(f) e^{2\pi i k t}. \quad (\text{III.8})$$

**Retour aux sommes partielles : un raffinement.** Le théorème précédent montre, sous certaines conditions assez générales, la convergence des moyennes des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que sous des hypothèses convenables sur l'ordre de grandeur des coefficients de  $f$ , on peut établir la convergence des sommes partielles elles-mêmes, autrement dit la convergence de la série de Fourier. Nous aurons besoin du lemme général d'analyse qui va suivre.

**DÉFINITION III.15.** *On dit qu'une suite  $(S_n, n = 1, 2, \dots)$  converge en moyenne ou au sens de Cesàro vers une limite  $\ell$ , si les moyennes  $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n$  convergent vers  $\ell$ .*

On montre facilement que la convergence au sens habituel implique la convergence au sens de Cesàro, ce qui reste vrai si  $S_n$  est à valeurs dans un espace vectoriel. La réciproque est fautive : prendre par exemple  $S_n = (-1)^n$  ; on a cependant

LEMME III.16. Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $(S_n)$  une suite de vecteurs telle que  $n\|S_n - S_{n-1}\| \leq C$ , pour une constante  $C$ , alors

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n S_k - \ell \right\| \rightarrow 0 \iff \|S_n - \ell\| \rightarrow 0.$$

*Démonstration:* En remplaçant  $S_n$  par  $S_n - \ell$ , on peut se ramener au cas où  $\ell = 0$ . Pour  $n \geq m$ , on a

$$(n-m)S_n = \sum_{k=1}^n S_k - \sum_{k=1}^m S_k + (S_{m+2} - S_{m+1}) + 2(S_{m+3} - S_{m+2}) + \cdots + (n-m-1)(S_n - S_{n-1}).$$

Pour  $\alpha > 0$  donné, soit  $N(\alpha)$  un entier tel que

$$\forall n \geq N(\alpha), \quad \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^n S_k \right\| \leq \alpha.$$

Soient deux entiers  $n, m \geq N(\alpha)$ , on déduit de la relation précédente

$$\|S_n\| \leq \frac{1}{(n-m)} \left( n\alpha + m\alpha + C \frac{1+2+\cdots+(n-m-1)}{m} \right) = \alpha \frac{n+m}{n-m} + C \frac{n-m-1}{2m}.$$

Choisissons  $m$  tel que

$$n - 2n\sqrt{\alpha} \leq m \leq n - n\sqrt{\alpha}.$$

Si  $n$  est assez grand on a bien  $m > N(\alpha)$  et on a alors, puisque le facteur de  $C$  est décroissant en  $m$  et le facteur de  $\alpha$  croissant

$$\|S_n\| \leq \alpha \frac{2n - n\sqrt{\alpha}}{n\sqrt{\alpha}} + C \frac{2n\sqrt{\alpha} - 1}{2(n - 2n\sqrt{\alpha})} = \sqrt{\alpha}(2 - \sqrt{\alpha}) + C \frac{\sqrt{\alpha}}{1 - 2\sqrt{\alpha}}.$$

Comme  $\alpha$  est arbitraire, ceci prouve que  $S_n$  tend vers 0. ■

THÉORÈME III.17. Si  $f$  est une fonction périodique continue telle que la suite  $|nc_n(f)|$  soit bornée, alors  $S_n f$  converge uniformément vers  $f$ .

*C'est en particulier le cas si  $f$  est continue monotone par morceaux.*

*Démonstration:* On sait que  $\left\| \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} S_n f - f \right\|_\infty \rightarrow 0$ . Il suffit alors d'appliquer le lemme car l'hypothèse garantit bien que  $n\|S_n - S_{n-1}\|_\infty = n\|c_n(f)e_n + c_{-n}(f)e_{-n}\|_\infty \leq C$ .

La deuxième partie fait l'objet de l'exercice III.6.9. ■

## III.4 Convergence dans $L^2(\mathbb{T})$

Nous allons exploiter la propriété d'espace de Hilbert de  $L^2(\mathbb{T})$  et les relations d'orthogonalité (III.2) vérifiées par les exponentielles  $e_n$  pour étudier le comportement en norme  $\|\cdot\|_2$  des séries de Fourier.

### III.4.1 Rappel sur les espaces de Hilbert

DÉFINITION III.18. Soit  $H$  un espace vectoriel sur  $K$ ,  $K = \mathbb{R}$  ou  $K = \mathbb{C}$ . Un produit scalaire sur  $H$  est une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $H \times H$  dans  $K$  tel que pour tous  $x, y, z \in H$  et  $\lambda \in K$

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle = 0 &\implies x = 0 \\ \langle x, y \rangle &= \overline{\langle y, x \rangle} \\ \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

L'application  $x \rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  est alors une norme sur  $H$ . Si  $(H, \|\cdot\|)$  est complet on dit que  $H$  est un espace de Hilbert et s'il existe une partie dénombrable totale dans  $H$  (i.e. dont les combinaisons linéaires finies forment une partie dense) il est dit séparable.

L'espace  $L^2([0, 1]) = L^2(\mathbb{T})$  est un espace de Hilbert séparable pour le produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\bar{g}(t)dt$  puisque les polynômes trigonométriques à coefficients rationnels y sont denses (car denses dans  $C(\mathbb{T})$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ ). L'espace

$$\ell^2(\mathbb{N}^*) = \left\{ x \in K^{\mathbb{N}^*}, \sum_i |x_i|^2 < \infty \right\}, \quad \langle x, y \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i$$

est également un espace de Hilbert séparable.

Si l'espace n'est pas complet, on le dit préhilbertien, p.ex.  $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_2)$ , et son complété est un espace de Hilbert.

THÉORÈME III.19. (Bases orthogonales) Soit  $H$  un espace de Hilbert séparable.

(a) Soit  $(e_n)_{n \geq 1}$  une famille totale de vecteurs deux à deux orthogonaux alors pour tout  $x \in H$  :

$$\|x - \sum_{i=1}^n x_i e_i\| \rightarrow 0, \quad x_i = \langle x, e_i \rangle$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2.$$

(b) Il existe toujours une telle suite  $e_n$  (base orthogonale).

(c) Pour tout  $n$  le vecteur  $\sum_{i=1}^n x_i e_i$  est la projection orthogonale de  $x$  sur l'espace  $H_n$  engendré par  $(e_1, \dots, e_n)$  :

$$\langle x - \sum_{i=1}^n x_i e_i, y \rangle = 0, \quad y \in H_n.$$

(d) L'application

$$H \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}^*)$$

$$x \mapsto (x_i)_{i \geq 1}$$

est une isométrie bijective.

La base est ici indexée par les entiers positifs mais on peut prendre n'importe quel ensemble dénombrable, en particulier  $\mathbb{Z}$ .

### III.4.2 Séries de Fourier

Soit  $f \in L^2(\mathbb{T})$ . La fonction  $f$  est intégrable sur  $[0, 1]$  et on peut considérer sa série de Fourier et les sommes partielles formées par les polynômes trigonométriques  $S_n(f)$ . On a vu que  $e_n$  forme une base orthogonale de  $L^2(\mathbb{T})$  et que  $S_n(f)$  est donc la projection orthogonale de  $f$  sur le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions  $e_{-n}, \dots, e_n$ . On a également en vertu du théorème III.19 :

THÉORÈME III.20. (Identité de Bessel-Parseval) Pour toute fonction  $f$  dans  $L^2(\mathbb{T})$ , on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2.$$

**Forme réelle de l'égalité de Bessel-Parseval.** Les fonctions  $\{1, \sqrt{2} \cos 2\pi nt, \sqrt{2} \sin 2\pi nt, n \geq 0\}$  forment également une base orthogonale de  $L^2(\mathbb{T})$  (puisqu'elles sont orthogonales et engendrent les  $e_n$ ) Soit  $f$  dans  $L^2(\mathbb{T})$  et

$$f(t) = a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos 2\pi nt + \sum_1^\infty b_n \sin 2\pi nt$$

sa série de Fourier sous forme trigonométrique. L'égalité de Bessel-Parseval s'écrit :

$$\|f\|_2^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty |a_n|^2 + \frac{1}{2} \sum_1^\infty |b_n|^2.$$

### Une application.

**THÉORÈME III.21.** Si  $f \in C^1(\mathbb{T})$  alors on a  $\sum_{-\infty}^\infty |c_n(f)| < +\infty$ . Par suite,  $f$  est la somme de sa série de Fourier (avec convergence normale).

*Démonstration:* Pour obtenir ce résultat, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz puis l'égalité de Bessel-Parseval appliquée à  $f'$  :

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} |c_n(f)| &= \sum_{n \neq 0} |nc_n(f)| \frac{1}{|n|} \leq \left( \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n \neq 0} n^2 |c_n(f)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\pi^2}{3} \right)^{1/2} \frac{1}{2\pi} \left( \sum_n |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \|f'\|_2 < \infty. \end{aligned}$$

La série  $\sum_{-\infty}^\infty |c_n(f)|$  est donc convergente et on termine la démonstration en appliquant le théorème III.8. ■

**Remarque.** Un théorème relativement récent et difficile (théorème de Carleson) permet d'établir la convergence *presque partout* de la série de Fourier d'une fonction  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , pour  $p > 1$ . Ce résultat est faux pour  $p = 1$  : on peut construire une fonction de  $L^1(\mathbb{T})$  dont la série de Fourier ne converge en aucun point<sup>1</sup> !

## III.5 Application : synthèse sonore

Nous donnons dans ce paragraphe quelques idées de méthodes de synthèse sonore utilisées par exemple dans les synthétiseurs<sup>2</sup>.

**Synthèse de signaux périodiques.** Les signaux périodiques se rencontrent couramment dans la nature, même si l'hypothèse de périodicité est une approximation d'une réalité plus complexe : la période d'une note de musique est l'inverse de sa fréquence, celle d'une voyelle (dans sa partie stationnaire) est la période de vibration des cordes vocales (voir la figure VIII.1 page 91 ; la période dépend donc peu de la voyelle mais essentiellement du locuteur, et également de l'intonation). Voici trois méthodes typiques que l'on peut combiner.

▷ **SUPERPOSITION.** Si  $T$  est la période, la façon la plus naturelle est de se donner une suite de coefficients de Fourier et de poser

$$f(t) = \operatorname{Re} \sum_k a_k e^{2i\pi kt/T}$$

Les fréquences  $k/T$  sont les harmoniques.  $\omega = 2\pi/T$  est la pulsation.

1. Voir le livre de Zygmund, *Trigonometric series*, §VIII.4.  
2. On trouvera des compléments dans le livre *Mathematics and Music*, par Dave Benson, disponible à l'adresse <http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/math-music.html>

▷ **FILTRAGE.** On peut aussi partir d'un signal de base  $f(t)$  de période  $T$  et lui appliquer un filtre. Le filtrage sera étudié ultérieurement ; on peut considérer ici qu'il s'agit d'une convolution par une fonction fixe :

$$f \mapsto f * h$$

$$\sum_k c_k(f) e^{ik\omega t} \mapsto \sum_k c_k(h) c_k(f) e^{ik\omega t}$$

ce qui revient à atténuer certaines fréquences ( $|c_k(h)| < 1$ ) et en amplifier d'autres ( $|c_k(h)| > 1$ ). Par exemple  $f(t)$  est un signal en créneau dont la fréquence correspond à la note (un tel signal ressemble à la vibration d'une anche d'instrument) puis le filtre modifiera le timbre.

Une famille de tels sons  $f_1(t), f_2(t), \dots$  est appelée une «table d'ondes».

▷ **MODULATION DE FRÉQUENCE.** L'idée la plus simple est (méthode de John Chowning)

$$f(t) = \cos(k\omega t + \alpha \cos(l\omega t))$$

où  $k$  et  $l$  sont des entiers (a priori petits) à choisir. On peut également reboucler, ce qui donne l'équation à résoudre

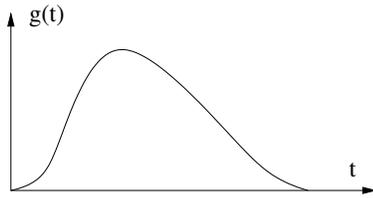
$$f(t) = \cos(\omega t + \alpha f(t)).$$

Si  $|\alpha| < 1$  il y a une unique solution (appliquer le théorème du point fixe sur  $\mathbb{R}$  pour chaque valeur de  $t$ ) qui peut s'obtenir comme limite dans  $C([0, 2\pi/\omega], \|\cdot\|_\infty)$  de la suite (méthode de Picard)

$$f_{n+1}(t) = \cos(\omega t + \alpha f_n(t)).$$

**Modulation d'amplitude.** Les méthodes du paragraphe précédent ne permettent que de fabriquer des briques élémentaires qui reconstituent l'information localement stationnaire (périodique) de la phrase sonore (p.ex. chaque note). Il faut ensuite remettre ces briques en contexte puis les raccorder. Ceci se fait typiquement par un travail en modulation d'amplitude.

Prenons le cas d'une note de musique. On a pu jusqu'à présent au mieux reconstruire la partie stationnaire de la note (note tenue) ; il reste à créer l'attaque (partie très importante en termes de réalisme) et la fin. Pour cela on se donne un gabarit  $g(t)$  (nul en zéro et croissant plus ou moins vite selon l'effet désiré) par lequel on multiplie ponctuellement le signal obtenu précédemment. Voici un exemple avec une attaque relativement douce et une atténuation progressive :



Un exemple simple à simuler consiste à prendre un signal périodique triangulaire et à le moduler par un gabarit de la forme  $(1-x)_+$ . On obtient un son rappelant la clarinette (ou le basson...).

## III.6 Exercices

**Exercice III.6.1** *Un cas particulier de convergence des séries trigonométriques : méthode d'Abel.*

Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de réels positifs. Soit  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels telle que, pour tous  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $|\sum_k^l b_j| \leq M$ , où  $M$  est une constante.

1. Montrer l'inégalité :  $|\sum_n^p a_j b_j| \leq M a_n$ . On pourra commencer par montrer que

$$a_n b_n + \dots + a_p b_p = b_n(a_n - a_{n+1}) + (b_{n+1} + b_n)(a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots \\ + (b_{p-1} + \dots + b_n)(a_{p-1} - a_p) + (b_p + \dots + b_n)a_p.$$

2. On suppose, de plus, que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers zéro. Montrer, en utilisant la question précédente, la convergence de la série  $\sum_n a_n b_n$ .
3. Dédire de ce qui précède le théorème suivant :  
*Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite à termes positifs décroissante et tendant vers zéro, la série  $\sum_n a_n e^{2i\pi n t}$  converge pour tout  $t \notin \mathbb{Z}$ . La convergence est uniforme sur tout compact de  $]0, 1[$ .*

**Exercice III.6.2**

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $g \in C(\mathbb{T})$  valant  $g(t) = 1 - |t|$  sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .
2. En utilisant la fonction  $g$ , calculer les sommes des séries :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \text{ puis } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

3. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction  $f \in C(\mathbb{T})$  valant  $f(t) = (1 - 2|t|)^2$  sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . En déduire les valeurs des séries  $\sum_1^\infty n^{-2}$ , et  $\sum_1^\infty n^{-4}$ .

**Exercice III.6.3** Soit  $f \in C^1([0, 1])$  telle que  $f(0) \neq f(1)$  ( $f$  ne s'identifie pas à une fonction de  $C(\mathbb{T})$ ). Montrer que les coefficients de Fourier de  $f$  sont d'ordre  $1/n$ .

De manière générale, les discontinuités introduisent un terme en  $1/n$  dans les coefficients de Fourier.

**Exercice III.6.4**

1. Montrer que pour tous  $t \geq 0$  et  $n \geq 1$  entier on a  $\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k t^{2k} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k t^{2k}$ .
2. En déduire que  $\frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(1) = 1$ .

**Exercice III.6.5** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Calculer la série de Fourier associée à  $f(t) = \exp(\alpha e^{i2\pi t})$  (indication : ne pas calculer d'intégrale mais utiliser le développement de l'exponentielle) et en déduire la relation

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{(n!)^2} = \int_0^1 e^{2\alpha \cos(2\pi t)} dt.$$

**Exercice III.6.6 Inégalité de Wirtinger**

Soit  $f$  continue sur  $\mathbb{T}$ , de classe  $C^1([0, 1])$ , telle que  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f dt = 0$

1. Montrer que la relation  $c_n(f') = 2i\pi n c_n(f)$  reste vraie (bien que  $f$  ne soit pas  $C^1$  sur  $\mathbb{T}$ ).
2. Montrer l'inégalité

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt \geq 4\pi^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt.$$

3. Chercher les fonctions  $f$  pour lesquelles il y a égalité et montrer que la constante  $4\pi^2$  ne peut pas être améliorée.
4. Généraliser l'inégalité précédente aux fonctions périodiques de période  $a$  et de classe  $C^1([0, a])$ .

5. Montrer que si l'on lève la condition d'intégrale nulle mais que l'on impose que  $f$  s'annule en un point, on a toujours l'inégalité mais cette fois avec  $\pi^2$  au lieu de  $4\pi^2$  (fabriquer une fonction deux fois plus longue et d'intégrale nulle).

**Exercice III.6.7** Calcul de  $I = \int_0^\infty t^{-2} \sin^2 t \, dt$

1. Soit  $\delta \in ]0, \frac{1}{2}[$ . Soit  $f$  la fonction de période 1, définie sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  par  $f(t) = 1_{|t| \leq \delta}$ . Calculer les coefficients de Fourier de  $f$ .
2. Par l'égalité de Parseval démontrer que  $\sum_1^\infty \frac{\sin^2(2\pi n\delta)}{n^2\delta} = \pi^2(1 - 2\delta)$ .
3. En déduire la valeur  $I$ .

**Exercice III.6.8** Soit  $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$  et  $\varphi$  la fonction périodique, de période 1, définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{pour } |x| < \delta, \\ \frac{1-2|x|}{1-2\delta}, & \text{pour } \delta \leq |x| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier (sous forme réelle) de la fonction  $\varphi$ .
2. Montrer la convergence de la série de Fourier de  $\varphi$  vers  $\varphi$  en tout point. (On donnera un énoncé précis du théorème employé.)
3. Exprimer en fonction de  $\delta$  la somme des séries  $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi n\delta) - (-1)^n}{n^2}$  et  $\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2\pi n\delta)}{n^2}$ .
4. Utiliser l'identité de Parseval et un passage à la limite pour obtenir une expression de  $\sum_{n=0}^\infty (2n+1)^{-4}$ .

**Exercice III.6.9** Coefficients de Fourier des fonctions monotones par morceaux

1. Montrer que si  $f$  est monotone sur  $[a, b]$  on a  $\pi n \left| \int_a^b f(t) \cos(2\pi nt) \, dt \right| \leq |f(a)| + |f(b)|$ . On utilisera la deuxième formule de la moyenne :

*Étant données deux fonction  $f$  et  $g$  à valeurs réelles,  $f$  monotone sur  $[a, b]$  et  $g$  intégrable sur  $[a, b]$ , il existe  $c \in [a, b]$  tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t) \, dt = f(a) \int_a^c g(t) \, dt + f(b) \int_c^b g(t) \, dt.$$

2. En déduire que si  $f$  est une fonction monotone par morceaux, il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $n \neq 0$  :  $|c_n(f)| < \frac{C}{|n|}$ .

**Exercice III.6.10** Montrer que si  $f$  est de classe  $C^p$ , on a :  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n^{p-1}c_n(f)| < \infty$ .

**Exercice III.6.11** Cas d'une discontinuité.

1. Soit  $f \in L^1(\mathbb{T})$ . Montrer que si la fonction  $x \mapsto f(x) + f(2t - x)$  satisfait les hypothèses du théorème III.12, alors  $S_n f(t)$  converge vers  $f(t)$  (on remarquera que du fait que  $D_n(x) = D_n(-x)$ , la fonction  $g(x) = f(2t - x)$  satisfait  $S_n g(t) = S_n f(t)$ ).
2. En déduire que si  $h \in L^1(\mathbb{T})$  est discontinue en  $t$  mais höldérienne sur deux intervalles de la forme  $]t - \varepsilon, t[$  et  $]t, t + \varepsilon[$ , alors  $S_n h(t)$  converge vers  $m = (h(t_-) + h(t_+))/2$ .  
Indication : considérer la fonction  $f$  qui coïncide avec  $h$  sauf en  $t$  où elle vaut  $m$  et appliquer le 1.

**Exercice III.6.12** Coefficients de Fourier d'une fonction höldérienne

1. Montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction  $f$  1-périodique peuvent être exprimés sous la forme :

$$c_n(f) = \int_0^1 \frac{1}{|n|} \sum_{k=0}^{|n|-1} f\left(\frac{s}{|n|} + \frac{k}{|n|}\right) e^{-2\pi i \operatorname{sign}(n)s} \, ds, n \neq 0.$$

2. Montrer que les coefficients de Fourier d'une fonction  $f$  globalement höldérienne d'ordre  $\alpha$  satisfont à l'inégalité :

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha}, \quad n \neq 0$$

Indication : on remarquera que dans l'intégrale on peut retrancher la valeur de la somme en 0.

### Exercice III.6.13

1. On note  $f$  la fonction périodique, de période 1 et paire, définie sur  $[0, \frac{1}{2}[$  par :  $f(t) = \sqrt{t}$ .  
Montrer une majoration des coefficients de Fourier de  $f$  de la forme

$$n^{3/2}|a_n(f)| \leq C$$

où  $C$  est une constante (on fera un changement de variable et des intégrations par parties).

2. Etudier la convergence vers  $f$  de la série de Fourier de  $f$ .  
3. La fonction  $f$  est-elle (localement) höldérienne en tout point  $t \in \mathbb{R}$ ?  
Quelle est la (meilleure) valeur de l'ordre  $\alpha$  suivant le point  $t$ ?  
4. On considère la fonction  $g$  dérivée de  $f$  (définie pour  $t \notin \mathbb{Z}$ ). Etudier le comportement de la série de Fourier de  $g$ .

### Exercice III.6.14

1. Soit  $(e_n)$  un système orthonormé dans un espace préhilbertien  $V$ . Montrer que pour tout  $f \in V$ , on a  $\sum_n |\langle f, e_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2$  (on pourra s'intéresser à  $\langle \sum_{n=1}^p \langle f, e_n \rangle e_n, f \rangle$ ).  
2. En particulier, montrer que si  $f \in L^2(\mathbb{T})$ ,  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \langle f, e_n \rangle = 0$ , où ici  $e_n$  est  $e_n(t) = \exp(2\pi i n t)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .  
3. En déduire, par densité de  $L^2(\mathbb{T})$  dans  $L^1(\mathbb{T})$ , le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) e^{2\pi i n t} dt = 0, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{T}).$$

### Exercice III.6.15 Phénomène de Gibbs

La non-uniformité de la convergence de la suite des sommes partielles, pour une fonction discontinue, se traduit par le phénomène de Gibbs : au voisinage d'une discontinuité, les sommes partielles laissent apparaître un pic qui se déplace vers la discontinuité sans décroître :

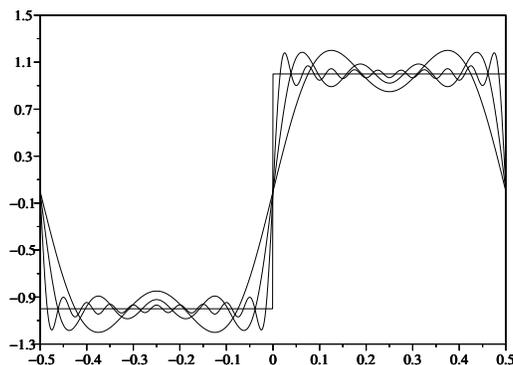


FIGURE III.1 – La fonction  $S_n(t)$  pour  $n = 2, 4, 10$  et  $f(t) = \text{signe}(t)$ .

On note  $f$  la fonction 1-périodique nulle en 0 définie sur  $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$  par  $f(t) = \text{signe}(t)$ .

1. a) En utilisant la relation  $\sin 4\pi(n+1)t - \sin 4\pi nt = 2 \sin 2\pi t \cos 2\pi(2n+1)t$ , établir la relation

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos 2\pi(2k+1)t = \frac{\sin 4\pi nt}{\sin 2\pi t}, \quad 2t \notin \mathbb{Z}.$$

- b) Calculer la série de Fourier de  $f$  sous forme complexe et sous forme réelle.

c) Montrer la relation  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ .

2. On note  $S_n(t)$  la somme partielle d'ordre  $2n-1$  de la série de Fourier de  $f$ .

Calculer  $\lim_n S_n(t)$ , pour tout point  $t \in \mathbb{R}$ .

3. a) Montrer que  $S_n(t) = 4 \int_0^t \frac{\sin 4\pi ns}{\sin 2\pi s} ds$ .

- b) En déduire la convergence et la valeur de  $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin u}{u} du$ .

*Indication.* considérer pour tout  $t \in (0, \frac{1}{2})$ , la fonction  $\varphi_t$  1-périodique définie sur  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  par

$$\varphi_t(s) = 1_{[0,t]}(s) \left( \frac{1}{2\pi s} - \frac{1}{\sin 2\pi s} \right)$$

et montrer que ses coefficients de Fourier tendent vers 0.

En déduire que  $S_n(t) - \frac{2}{\pi} \int_0^{4\pi nt} \frac{\sin u}{u} du \rightarrow 0$  puis conclure.

- c) Montrer que, pour  $\lambda > 0$  fixé, on a

$$\lim_n S_n\left(\frac{\lambda}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{4\pi\lambda} \frac{\sin u}{u} du.$$

*Indication :*  $S_n\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{4\pi t} \frac{\sin s}{s} ds + \int_0^{\frac{t}{n}} \phi_{\frac{t}{n}}(s) \sin 4\pi ns ds$ , et  $\phi_{\frac{t}{n}}$  est bornée.

- d) En prenant  $\lambda = \frac{1}{4}$ , montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\sup_{t \in [0, \frac{1}{2}]} S_n(t) - f(t) \geq \alpha, \text{ pour tout } n.$$

On estimera  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}$  à l'aide d'un changement de variables.

# IV

---

## TRANSFORMATION DE FOURIER

---

---

### IV.1 Propriétés de la transformation de Fourier

Rappelons que, pour  $p \in [1, \infty[$ , l'espace  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  est formé des fonctions mesurables telles que  $|f|^p$  soit intégrable. On le munit de la semi-norme  $\|\cdot\|_p$  définie par  $\|f\|_p = (\int_0^1 |f|^p dt)^{1/p}$ . L'espace normé  $L^p(\mathbb{R})$  est l'espace des classes d'équivalence de fonctions dans  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ , pour la relation d'équivalence définie par l'égalité presque partout.

DÉFINITION IV.1. Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . La transformée de Fourier de  $f$  est la fonction notée  $\widehat{f}$  ou  $\mathcal{F}(f)$  définie par

$$\mathcal{F}(f)(u) = \widehat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i u t} dt. \quad (\text{IV.1})$$

L'application linéaire  $f \rightarrow \mathcal{F}f$  est appelée **transformation de Fourier**.

On notera le choix de la constante  $-2\pi$  intervenant dans la définition de la transformée de Fourier évitant la présence d'un facteur dans la formule d'inversion. Un autre choix classique de cette constante est  $-1$ .

THÉORÈME IV.2. La transformée  $\widehat{f}(u)$  est bien définie pour toute valeur de  $u$ . La fonction  $\widehat{f}$  est une fonction continue et tendant vers 0 à l'infini ( $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ ), vérifiant :  $\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$ .

Démonstration: La fonction  $t \rightarrow e^{-2\pi i u t} f(t)$  est clairement intégrable et on a la majoration :

$$\|\widehat{f}\|_{\infty} \leq \sup_u \int_{\mathbb{R}} |e^{2\pi i u t} f(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

Montrons que  $\widehat{f}$  est continue. On a :

$$|\widehat{f}(u+h) - \widehat{f}(u)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi i h t} - 1| |f(t)| dt.$$

La fonction dans l'intégrale, à droite, est majorée par la fonction intégrable  $2|f(t)|$  et tend vers 0, pour  $t$  fixé, quand  $h$  tend vers 0. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que l'intégrale tend vers 0, quand  $h$  tend vers 0. La convergence  $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \widehat{f}(u) = 0$  est montrée dans le lemme ci-dessous. ■

LEMME IV.3. (Riemann-Lebesgue) Pour toute fonction  $f$  intégrable, on a

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \widehat{f}(u) = 0.$$

*Démonstration:* Pour  $f = 1_{[a,b]}$ , nous avons :

$$\widehat{f}(u) = \int_a^b e^{-2\pi i t u} dt = \frac{e^{-2\pi i u b} - e^{-2\pi i u a}}{-2\pi i u}$$

qui converge vers 0 quand  $|u|$  tend vers l'infini. Cette propriété s'étend par linéarité aux fonctions en escalier. Soit maintenant  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $g$  en escalier tel que  $\|f - g\|_1 < \varepsilon$ , alors

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(u)| \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(u) - \widehat{g}(u)| + |\widehat{g}(u)| \leq \|\widehat{f} - \widehat{g}\|_\infty + \limsup_{|u| \rightarrow \infty} |\widehat{g}(u)| \leq \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Effet d'une translation sur la transformée de Fourier.** Notons  $g(t) = f(t + h)$ . Nous avons :

$$\widehat{g}(u) = \int f(t + h) e^{-2\pi i t u} dt = e^{2\pi i u h} \int f(t) e^{-2\pi i t u} dt = e^{2\pi i u h} \widehat{f}(u).$$

La translation de  $h$  se traduit par une multiplication par  $e^{2\pi i u h}$  dans le domaine de Fourier. À l'inverse on voit immédiatement que  $\mathcal{F}(e^{-2\pi i h \cdot} f)(u) = \widehat{f}(u + h)$ . Attention aux signes !

**Effet d'une homothétie sur la transformée de Fourier.** Notons maintenant  $g(t) = f(at)$ .

$$\widehat{g}(u) = \int f(at) e^{-2\pi i t u} dt = |a|^{-1} \int f(t) e^{-2\pi i t u/a} dt = |a|^{-1} \widehat{f}(a^{-1}u).$$

Une homothétie se traduit dans le domaine de Fourier par une homothétie inverse avec un facteur.

**Exemple 1 : Fonction caractéristique d'intervalle.**

$$\mathcal{F}(1_{[a,b]})(u) = e^{-\pi i u(b+a)} \frac{\sin \pi u(b-a)}{\pi u}, \quad (= b-a \text{ si } u=0).$$

En particulier, si l'intervalle est symétrique, on a :

$$\mathcal{F}(1_{[-b,b]})(u) = \frac{\sin 2\pi b u}{\pi u}.$$

On note que  $\widehat{1}_{[b,b]} \notin L^1(\mathbb{R})$ , ce qui montre que  $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ .

**Exemple 2 :**  $\psi(t) = e^{-|t|}$ . La transformée de Fourier de  $\psi$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi)(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} e^{-2\pi i u t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(1+2\pi i u)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{(1-2\pi i u)t} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(1+2\pi i u)t} dt + \int_{-A}^0 e^{(1-2\pi i u)t} dt \\ &= \frac{1}{1+2\pi i u} + \frac{1}{1-2\pi i u} \\ &= \frac{2}{1+4\pi^2 u^2}. \end{aligned}$$

**Exemple de calcul par la méthode des résidus :**  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ . En intégrant sur un demi-cercle  $\gamma$  centré à l'origine, de rayon  $R$ , dans le demi-plan positif, on obtient, pour  $u > 0$ ,

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iuz}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{iut}}{1+t^2} dt + i \int_0^\pi \frac{e^{iuR(\cos \theta + i \sin \theta)}}{1+R^2 e^{2i\theta}} R e^{i\theta} d\theta = (1) + (2).$$

Par la formule des résidus, on a, pour  $R > 1$ ,

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iuz}}{1+z^2} dz = \pi e^{-u}.$$

Quand  $R$  tend vers  $+\infty$ , la quantité (1) converge, vers l'intégrale cherchée et la quantité (2), qui est majorée en module par  $\int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1} d\theta$ , tend vers 0.

Pour  $u < 0$ , se ramène par conjugaison de l'intégrale à  $u > 0$ , ce qui conduit à la même valeur, et l'on obtient finalement :

$$\widehat{f}(u) = \pi e^{-2\pi|u|}.$$

**Transformée de Fourier et parité.** Soit  $f$  une fonction intégrable. Nous avons :

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{f}(u)} &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{2\pi i u t} dt = \widehat{\overline{f}}(-u), \\ \widehat{f}(-u) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi i u t} dt = \int_{\mathbb{R}} f(-t) e^{-2\pi i u t} dt. \end{aligned}$$

En particulier :

- Si  $f$  est à valeurs réelles :  $\widehat{f}(-u) = \overline{\widehat{f}(u)}$ . En particulier  $|\widehat{f}|$  est paire.
- Si  $f$  est paire (ou impaire) alors  $\widehat{f}$  aussi.
- Si  $f$  est paire et à valeurs réelles alors  $\widehat{f}$  aussi.

**Régularité et transformée de Fourier.** Le but de ce paragraphe est de montrer que plus  $f$  est intégrable (ou rapidement décroissante, en un sens précisé plus bas) plus  $\widehat{f}$  est régulière, et réciproquement. C'est un grand principe de la transformée de Fourier.

LEMME IV.4. Si  $f$  est intégrable et si  $\int |tf(t)| dt < \infty$ , alors  $\widehat{f} \in C^1$  et

$$\frac{d}{du} \widehat{f}(u) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} t e^{-2\pi i t u} f(t) dt.$$

*Démonstration:* Nous avons, pour  $h \neq 0$ ,

$$\frac{1}{h} [\widehat{f}(u+h) - \widehat{f}(u)] = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t u} \left( \frac{e^{-2\pi i h t} - 1}{h} \right) f(t) dt.$$

L'inégalité  $\left| \frac{e^{ia} - 1}{a} \right| \leq 1$ , vérifiée pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , et l'hypothèse d'intégrabilité de  $t \rightarrow tf(t)$  permettent de passer à la limite quand  $h$  tend vers 0 dans la relation précédente, en appliquant le théorème de Lebesgue. D'où le résultat. Ainsi  $\frac{d}{du} \widehat{f}$  existe et est, au coefficient  $-2\pi i$  près, la transformée de Fourier de la fonction  $t \rightarrow tf(t)$  qui est intégrable par hypothèse. ■

Plus généralement on a pour  $p$  entier  $\geq 1$  :

PROPOSITION IV.5. Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et si  $\int |t^p| |f(t)| dt < \infty$ , alors  $\widehat{f}$  est de classe  $C^p$  et

$$\frac{d^p}{du^p} \widehat{f}(u) = (-2\pi i)^p \int_{\mathbb{R}} t^p e^{-2\pi i t u} f(t) dt, \forall u \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration:* Élémentaire par récurrence. ■

Sous les conditions de la proposition, on a donc montré qu'on obtient les dérivées successives de  $\widehat{f}$  en dérivant sous le signe somme. Nous avons également le résultat suivant où les rôles de la dérivation et de la multiplication on été permutés :

LEMME IV.6. Si  $f$  est une fonction intégrable et de classe  $C^1$  telle que  $f'$  soit intégrable, la transformée de Fourier de sa dérivée est donnée par :

$$\widehat{f'}(u) = 2\pi i u \widehat{f}(u), \forall u \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration:* Par intégration par parties, nous obtenons :

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t) e^{-2\pi i u t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f'(t) e^{-2\pi i u t} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( [f(t) e^{-2\pi i u t}]_{-A}^A + 2\pi i u \int_{-A}^A f(t) e^{-2\pi i u t} dt \right).$$

Montrons que  $\lim_{A \rightarrow \pm\infty} f(A) = 0$ , ce qui entraînera, en passant à la limite, le résultat. On peut écrire :

$$f(A) = f(0) + \int_0^A f'(y) dy;$$

Donc, puisque  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , la limite de  $f(A)$  pour  $A$  tendant vers  $+\infty$  existe. Cette limite est nécessairement nulle car sinon on ne pourrait avoir  $\int_0^\infty |f'(t)| dt < +\infty$ . On montre de même que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} f(-A) = 0$ . ■

D'où le résultat pour tout  $p \geq 1$ , dont la démonstration est immédiate par récurrence :

PROPOSITION IV.7. Si  $f$  est de classe  $C^p$  et si les fonctions  $f, f', \dots, f^{(p)}$  sont intégrables nous avons :

$$\widehat{f^{(p)}}(u) = (2\pi i u)^p \widehat{f}(u), \forall u \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, pour  $u \rightarrow \infty$  on a

$$\widehat{f}(u) = o(|u|^p).$$

**Effet sur la convolution.** Montrons que la transformée de Fourier échange la convolution et la multiplication au sens ordinaire.

PROPOSITION IV.8. Si  $f$  et  $g$  sont intégrables, on a :

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

*Démonstration:* La fonction  $(t, s) \rightarrow f(t-s)g(s)e^{2\pi i u t}$  étant intégrable sur  $\mathbb{R}^2$ , on peut appliquer le théorème de Fubini. Les détails sont laissés en exercice. ■

**Transformée de Laplace.** Soit  $f$  une fonction mesurable. On définit formellement sa transformée de Laplace  $\mathcal{L}f$  par

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-zt} dt.$$

De façon précise, le domaine de définition  $D_f$  de la transformée de Laplace est le sous-ensemble du plan complexe :

$$D_f = \left\{ z \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-zt}| dt < \infty \right\}.$$

D'après la relation sur les modules :  $|f(t) e^{-zt}| = |f(t)| e^{-\operatorname{Re}(z)t}$ , le domaine  $D_f$  est formé de droites verticales dans le plan complexe. On montre (cf. exercice) que  $D_f$  est de la forme  $D_f = I \times \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle (au sens large) de  $\mathbb{R}$ . Le domaine de définition est donc une bande verticale, qui peut être un demi-plan ou le plan tout entier. Tous les cas se présentent : ce domaine peut être vide (prendre  $f(t) = e^{t^2}$ ), coïncider avec un demi-plan de la forme  $\operatorname{Re}(z) > a$  (prendre  $f(t) = e^{at} 1_{[0, \infty[}(t)$ ), etc...

Si le domaine de définition de  $\mathcal{L}f$  contient l'axe imaginaire, ce qui est le cas si  $f$  est intégrable, la restriction à l'axe imaginaire de la transformée de Laplace coïncide avec la transformée de Fourier (au coefficient  $2\pi$  près).

Dans le cas de fonctions à support dans la demi-droite  $\mathbb{R}^+$ , la transformée de Laplace prend la forme :

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-zt} dt$$

et si  $f$  est à croissance au plus polynomiale  $D_f$  contient au moins le demi-plan droit.

Dans le cas où  $f$  est une fonction intégrable à support compact, alors sa transformée de Laplace est définie dans tout le plan complexe et est analytique (et sa transformée de Fourier est développable en série entière) (cf. exercice).

**Transformée de Laplace de la fonction de Laplace-Gauss.** Calculons la transformée de Laplace de

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}.$$

La méthode est basée sur les propriétés des *fonctions analytiques*. Notons avant tout l'identité suivante valable pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int e^{-t^2/2}e^{\alpha t} dt = e^{\alpha^2/2} \int e^{-(t-\alpha)^2/2} dt = e^{\alpha^2/2} \int e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}e^{\alpha^2/2}$$

d'après le calcul classique (cf. exercice) de  $\int e^{-t^2/2} dt$ .

D'après la relation  $|e^{-t^2/2} e^{-zt}| = e^{-t^2/2} e^{-\operatorname{Re}(z)t}$ , l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-zt} dt$  existe, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Avant de calculer sa valeur, montrons qu'elle définit une fonction analytique de  $z$ .

LEMME IV.9. *La fonction  $z \rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-zt} dt$  est analytique dans le plan complexe. Le coefficient de  $z^n$  est  $\frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} t^n dt$ .*

*Démonstration:* On a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-zt} dt = \int_{\mathbb{R}} \lim_N \sum_{n=0}^N z^n \frac{(-t)^n}{n!} e^{-t^2/2} dt.$$

On va appliquer le théorème de convergence dominée pour faire sortir la somme et faire ainsi apparaître une série entière. On a la majoration :

$$\left| \sum_{n=0}^N z^n \frac{(-t)^n}{n!} e^{-t^2/2} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \frac{|t|^n}{n!} e^{-t^2/2} = e^{-t^2/2} e^{|z||t|}.$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée et

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-zt} dt = \lim_N \left( \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^N z^n \frac{1}{n!} e^{-t^2/2} t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} t^n dt. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE IV.10. *On a pour tout  $z \in \mathbb{C}$*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-zt} dt = e^{z^2/2}.$$

*Démonstration:* Les fonctions  $z \rightarrow e^{z^2/2}$  et  $z \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} e^{-zt} dt$  sont toutes les deux analytiques sur  $\mathbb{C}$ . D'après le calcul pour  $z$  réel, elles coïncident sur l'axe réel. Donc elles sont égales partout. ■

On obtient la transformée de Fourier de  $\varphi$  à partir de l'expression de sa transformée de Laplace en faisant  $z = 2\pi i u$  :

$$\widehat{\varphi}(u) = e^{-2\pi^2 u^2}. \quad (\text{IV.2})$$

**Remarque.** On a

$$(\mathcal{F}\widehat{\varphi})(t) = \sqrt{2\pi}(\mathcal{F}(\varphi(2\pi u)))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\varphi}(u/2\pi) = \varphi(t).$$

Posons, pour  $\sigma > 0$ ,

$$\varphi_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma}\varphi(t/\sigma).$$

alors on déduit facilement de ce qui précède que  $\mathcal{F}\widehat{\varphi}_\sigma = \varphi_\sigma$  et  $\widehat{\varphi}_\sigma = e^{-2\pi^2\sigma^2 u^2}$ . En particulier :

$$\varphi_\sigma(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\sigma(u) e^{2\pi i u t} du. \quad (\text{IV.3})$$

## IV.2 Formule d'inversion

Soit  $f$  une fonction intégrable. Nous avons vu que sa transformée de Fourier  $\widehat{f}$  est bien définie, continue, bornée et vérifie :  $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ , et qu'en général,  $\widehat{f}$  n'est pas à son tour intégrable.

Si l'on fait l'hypothèse additionnelle que  $\widehat{f}$  est à son tour intégrable, alors l'intégrale  $\int \widehat{f}(u) e^{2\pi i u t} du$  est bien définie pour tout  $t$  réel.

**THÉORÈME IV.11. (d'inversion)** *Si  $f$  est intégrable et si sa transformée de Fourier  $\widehat{f}$  est intégrable, on a, pour presque tout réel  $t$  (pour tout  $t$ , si  $f$  est continue) :*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) e^{2\pi i t u} du. \quad (\text{IV.4})$$

Avant de démontrer ce résultat, faisons deux remarques.

a) L'application  $\mathcal{F}^{-1}$  définie pour  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$  par

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(u) e^{2\pi i t u} du = \widehat{\varphi}(-t)$$

est appelée *transformée de Fourier inverse*. Les transformations  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}^{-1}$  sont effectivement inverses l'une de l'autre d'après (IV.4), à condition de restreindre leur domaine de définition au sous-espace formé des fonctions  $f$  intégrables telles que  $\widehat{f}$  soit intégrable.

b) Pour un  $u \neq 0$  fixé, la fonction  $e_u : t \mapsto e^{2\pi i t u}$  est un signal à valeurs complexe de fréquence  $|u|$ , de période  $T = |u|^{-1}$ . La fréquence est le nombre de répétitions du signal périodique par unité de temps ; cette grandeur physique, homogène à l'inverse d'un temps, est mesurée en Hertz (notation Hz) si le temps est mesuré en secondes. La formule (IV.4) permet d'exprimer, sous les conditions de validité du théorème, un signal comme une superposition des signaux élémentaires  $e_u$  («fréquence pure»).

**LEMME IV.12.** *Soit  $\varphi_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ . Si  $f$  est intégrable, on a*

$$(f * \varphi_\sigma)(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) \widehat{\varphi}_\sigma(u) e^{2\pi i u t} du.$$

*Démonstration:* En exploitant (IV.3) il vient

$$(f * \varphi_\sigma)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)\varphi_\sigma(s)ds = \int_{\mathbb{R}} f(t-s) \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_\sigma(u)e^{2\pi ius} du \right) ds.$$

Les fonctions  $f$  et  $\widehat{\varphi}_\sigma$  étant intégrables, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\int \int f(t-s)\widehat{\varphi}_\sigma(u)e^{2\pi ius} duds = \int \int \widehat{\varphi}_\sigma(u)f(t-s)e^{-2\pi iu(t-s)}e^{2\pi iut} dsdu = \int \widehat{\varphi}_\sigma(u)\widehat{f}(u)e^{2\pi iut} du. \quad \blacksquare$$

*Preuve du théorème d'inversion :* La formule établie dans le lemme est la formule d'inversion pour la fonction  $f * \varphi_\sigma$ . En appliquant le lemme précédent avec  $\sigma = \frac{1}{n}$ , on obtient :

$$(f * \varphi_{1/n})(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) e^{-2\pi^2 u^2/n^2} e^{2\pi iut} du. \quad (\text{IV.5})$$

À droite, on applique le théorème de convergence dominée (l'intégrand est borné par  $|\widehat{f}(u)|$ ) et la limite est bien  $\int \widehat{f}(u) e^{2\pi iut} du$ .

À gauche, on observe que la suite  $(\varphi_{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$  forme une identité approchée. Si  $f$  est continue, on a donc

$$\lim_n (f * \varphi_{1/n})(t) = f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

ce qui implique l'égalité (IV.4), pour tout  $t$ .

Si  $f$  n'est pas continue, on sait qu'il y a convergence en norme  $L^1$ . D'après un théorème d'intégration, il existe une sous-suite pour laquelle la convergence a lieu pour presque tout  $t$ . En passant à la limite le long de cette sous-suite dans (IV.5), on prouve que l'égalité (IV.4) est bien réalisée pour presque tout  $t$ .  $\blacksquare$

**COROLLAIRE IV.13.** (*Injectivité de la transformation de Fourier*) *Si deux fonctions intégrables  $f$  et  $g$  ont la même transformée de Fourier, elles sont égales presque partout.*

*Démonstration:* La fonction  $h = f - g$  vérifie les hypothèses de la formule d'inversion et  $\widehat{h} = 0$ ; il en résulte que  $h = 0$ .  $\blacksquare$

**PROPOSITION IV.14.** *Pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , on a :*

$$\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 \leq \|f\|_1 \|\widehat{f}\|_1.$$

*Démonstration:* Considérons l'intégrale

$$\int \int f(t)\overline{\widehat{f}(u)} e^{-2\pi iut} dudt.$$

Elle est bien définie par hypothèse et en vertu du théorème de Fubini, on peut intégrer d'abord en  $u$ , ce qui conduit à  $\|f\|_2^2$  ou d'abord en  $t$  ce qui conduit à  $\|\widehat{f}\|_2^2$ .  $\blacksquare$

**COROLLAIRE IV.15.** *Si  $f$  est de classe  $C^2$  bornée et intégrable, avec  $f'$  et  $f''$  intégrables, on a*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)e^{2\pi iut} du.$$

*Démonstration:* Il s'agit de vérifier que  $\widehat{f}$  est intégrable. Etant continue, elle est intégrable sur tout compact. Nous savons de plus que  $|\widehat{f}(u)| = o(u^{-2})$  (cf. proposition IV.7). Elle est donc intégrable.  $\blacksquare$

### IV.3 Transformée de Fourier et espace $\mathcal{S}$

Nous recherchons un espace convenable de fonctions intégrables sur lequel la transformée de Fourier définit une bijection. Notons que si  $f$  est à support compact, alors  $\widehat{f}$  est la restriction à l'axe réel d'une fonction analytique et ne peut donc être à support compact. Un tel espace ne peut donc être formé de fonctions à support compact.

DÉFINITION IV.16. Une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  est dite à décroissance rapide si elle vérifie :

$$\forall \text{ entier } n \geq 1, \exists C_n \text{ tel que } |f(t)| \leq \frac{C_n}{1 + |t|^n}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

On appelle  $\mathcal{S}$  (comme Schwartz) la classe des fonctions  $f$  qui sont dérivables à tous les ordres et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées. On a donc, par définition :

$$f \in \mathcal{S} \iff \forall p, n, \exists C_{n,p} \left| \frac{d^p f}{dt^p}(t) \right| \leq \frac{C_{n,p}}{1 + |t|^n}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

On note que si une fonction  $f$  est dans  $\mathcal{S}$ , elle est intégrable et bornée, ainsi que toutes ses dérivées. Elle est également dans  $L^p(\mathbb{R})$ , pour tout  $p \geq 1$ , et en particulier de carré intégrable.

PROPOSITION IV.17. L'espace  $\mathcal{S}$  est une algèbre de fonctions pour la multiplication (au sens ordinaire) qui est stable par dérivation et multiplication par les polynômes.

La démonstration est laissée en exercice.

**Exemples.** Il est clair que toute fonction  $f$  qui est  $C^\infty$  à support compact est dans  $\mathcal{S}$ . La fonction  $\varphi$  définie par  $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$  est également dans  $\mathcal{S}$ . En effet, on montre facilement par récurrence sur  $k$  que les dérivées successives de  $\varphi$  sont de la forme  $\varphi^{(k)}(t) = P_k(t) e^{-t^2/2}$  où  $P_k$  est un polynôme de degré  $k$ .

THÉORÈME IV.18. La transformée de Fourier définit une bijection de  $\mathcal{S}$  sur lui-même. Pour toute fonction  $f \in \mathcal{S}$ , on a pour tout  $p \geq 0$  :

$$\frac{d^p}{du^p} \widehat{f}(u) = (-2\pi i)^p \int_{\mathbb{R}} t^p f(t) e^{-2\pi i u t} dt \quad (\text{IV.6})$$

$$\widehat{f^{(p)}}(u) = (2\pi i u)^p \widehat{f}(u). \quad (\text{IV.7})$$

Toute fonction  $f \in \mathcal{S}$  satisfait  $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$  ainsi que la formule d'inversion :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u) e^{2\pi i u t} du, \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration:* On note que  $f$  satisfait aux hypothèses des propositions IV.5 et IV.7 et donc les deux formules la dérivation à l'ordre  $p$  sont vérifiées.

Si  $f \in \mathcal{S}$ , l'équation (IV.7) implique que la fonction  $\widehat{f}$  est à décroissance rapide; l'équation (IV.6) implique alors que ses dérivées, qui sont transformées de Fourier de fonctions de  $\mathcal{S}$  sont également à décroissance rapide.

Comme  $\widehat{f}$  est intégrable, l'indépendance de Parseval est satisfaite, et la formule d'inversion peut être appliquée. On en déduit que la transformation de Fourier est une bijection de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{S}$ . ■

COROLLAIRE IV.19. L'espace  $\mathcal{S}$  est une sous-algèbre de convolution de  $L^1(\mathbb{R})$  :  $f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}$ .

*Démonstration:*  $\mathcal{S}$  étant stable par produit ordinaire, nous avons, pour  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{S}$  :

$$f * g = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * g)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)) \in \mathcal{S}. \quad \blacksquare$$

**Densité de  $\mathcal{S}$ .** Il reste à vérifier que l'espace  $\mathcal{S}$  est assez «gros». En utilisant, par exemple, un procédé de convolution, on montre facilement le résultat d'approximation suivant :

PROPOSITION IV.20. *Toute fonction continue à support compact est limite uniforme d'une suite de fonctions de  $\mathcal{S}$  de support inclus dans un compact fixe.*

*Démonstration:* On sait qu'il existe une fonction  $\psi \geq 0$  à support compact et  $C^\infty$  telle que  $\int \psi(t) dt = 1$ . Notons  $\psi_n(t) = n\psi(nt)$ . La suite  $(\psi_n)$  forme une identité approchée, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Si  $f$  est une fonction continue à support compact,  $f * \psi_n$  est  $C^\infty$  à support compact et on a, au sens de la convergence uniforme :  $\lim_n(f * \psi_n) = f$ . ■

Cette méthode nécessite la construction de  $\psi$ , mais fournit une approximation des fonctions à support compact par des fonctions  $C^\infty$  à **support compact**, donc a fortiori dans  $\mathcal{S}$ .

COROLLAIRE IV.21. *L'espace  $\mathcal{S}$  est dense en norme uniforme dans  $C_0(\mathbb{R})$  et dense en norme  $\| \cdot \|_p$ , dans  $L^p(\mathbb{R})$ , pour  $1 \leq p < \infty$ .*

## IV.4 Transformation de Fourier des fonctions de $L^2$

Pour définir la transformée de Fourier des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  qui ne sont pas intégrables, une difficulté se présente : on ne peut pas la définir directement à l'aide d'une intégrale, comme pour les fonctions intégrables. Ainsi des fonctions très simples comme  $t \rightarrow t^{-1}1_{[1, \infty[}(t)$  ou  $t \rightarrow t^{-1} \sin t$ , qui sont de carré intégrable, mais non intégrables sur  $\mathbb{R}$ , n'ont pas de transformée de Fourier définie directement par la formule (IV.1).

La propriété d'isométrie va permettre de l'étendre de  $\mathcal{S}$  à tout  $L^2(\mathbb{R})$ .

LEMME IV.22. *Soient  $(E, d)$  et  $(F, \delta)$  deux espaces métriques complets et  $f$  une application définie sur une partie  $E_0$  dense dans  $E$  à valeurs dans  $F$ . Si  $f$  est uniformément continue, elle s'étend à  $E$  en une unique application continue à valeurs dans  $F$ . Cette application est uniformément continue.*

*Démonstration:* Comme  $f$  est uniformément continue, il existe une suite  $\varepsilon_k$  telle que

$$d(x, y) \leq \varepsilon_k \implies \delta(f(x), f(y)) \leq 1/k$$

Soit  $x \in E$  et  $x_n$  une suite de points de  $E_0$  convergeant vers  $x$ . Comme  $x_n$  est de Cauchy, l'uniforme continuité de  $f$  fait que  $f(x_n)$  est également de Cauchy : soit  $k > 0$ , si  $n$  et  $p$  sont assez grand  $d(x_n, x_p) \leq \varepsilon_k$  et donc  $\delta(f(x_n), f(x_p)) \leq 1/k$ . Elle converge donc vers une limite  $\bar{f}(x)$  qui ne dépend pas de  $x_n$ , car pour toute autre suite  $x'_n \rightarrow x$ , la suite entrelacée  $f(x_n), f(x'_n), f(x_{n+1}), f(x'_{n+1}), \dots$  converge.  $\bar{f}(x)$  coïncide bien avec  $f$  sur  $E_0$  car le raisonnement précédent est valide avec  $x_n = x$ .

Il reste à montrer l'uniforme continuité. Si  $x, y \in E$  sont tels que  $d(x, y) \leq \varepsilon_k/2$  on peut trouver une suite de points  $x_n$  et  $y_n$  convergeant vers  $x$  et  $y$  telles que  $d(x_n, y_n) \leq \varepsilon_k$ , d'où  $\delta(f(x_n), f(y_n)) \leq 1/k$  et donc  $\delta(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq 1/k$ . ■

THÉORÈME IV.23. *Il existe une isométrie surjective  $\mathcal{F}$  de l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  sur lui-même,*

$$\int |f(t)|^2 dt = \int |\mathcal{F}f(u)|^2 du, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (\text{IV.8})$$

*qui sur  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  coïncide avec la transformée de Fourier définie par (IV.1). De plus, si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on a*

$$\int f(u) \mathcal{F}g(u) du = \int g(u) \mathcal{F}f(u) du. \quad (\text{IV.9})$$

*Démonstration:* Par densité de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2$  on peut étendre  $\mathcal{F}$  en une application continue sur  $L^2$ . La formule (IV.8) vraie sur la partie dense  $\mathcal{S}$  reste valide par continuité.

La surjectivité de  $\mathcal{F}$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  résulte de la surjectivité dans  $\mathcal{S}$  : soient  $g \in L^2(\mathbb{R})$  et  $(\psi_n)$  une suite dans  $\mathcal{S}$  telle que  $\|g - \psi_n\|_2 \rightarrow 0$ . Alors la suite de Cauchy  $\mathcal{F}^{-1}\psi_n$  converge vers une fonction  $h$  de  $L^2(\mathbb{R})$  et on a  $\mathcal{F}h = \lim_n \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\psi_n = \lim_n \psi_n = g$ .

La relation (IV.9) est une simple conséquence du théorème de Fubini si  $f$  et  $g$  sont dans  $L^1$  et s'étend ensuite de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  à  $L^2(\mathbb{R})$  par densité. ■

## Corrélation et transformée de Fourier

DÉFINITION IV.24. Soit  $f$  une fonction de carré intégrable. La fonction d'auto-corrélation  $R_f$  de  $f$  est définie comme :

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t-\tau)} dt.$$

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} R_f(-\tau) &= \overline{R_f(\tau)} \\ |R_f(\tau)| &\leq R_f(0) = \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

On note que la fonction  $R_f$  est bien définie si  $f$  est de carré intégrable (dans ce cas elle est bornée et même continue, tendant vers 0 à l'infini), mais n'est pas nécessairement intégrable ou de carré intégrable.

En notant que la transformée de Fourier de  $t \mapsto \overline{f(-t)}$  est le complexe conjugué de  $\widehat{f}$ , et en appliquant les propriétés de la convolution, on obtient :

PROPOSITION IV.25. Soit  $f$  une fonction intégrable on a :  $\widehat{R}_f(u) = |\widehat{f}(u)|^2$ . Cette fonction est appelée densité spectrale de puissance.

## IV.5 Analyse du signal à court terme. Fenêtrage

En pratique on observe des signaux sur un intervalle de temps fini  $[-T, T]$ . Une première méthode pour calculer  $\widehat{x}(u)$  est de l'approcher par

$$\widehat{x}_r(u) = \int_{-T}^T x(s)e^{-2i\pi us} ds = \widehat{xw}_r(u) = (\widehat{x} * \widehat{w}_r)(u)$$

où  $w_r = 1_{[-T, T]}$  est la fenêtre rectangulaire; mais on peut également introduire une fenêtre arbitraire  $w$  à support sur  $[-T, T]$  ce qui donne

$$\widehat{x}_w(u) = \int_{-T}^T x(s)w(s)e^{-2i\pi us} ds = (\widehat{x} * \widehat{w})(u).$$

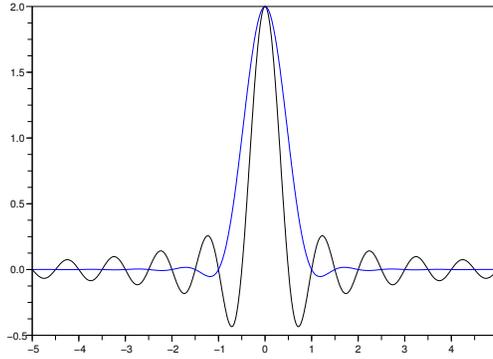
L'idéal est que  $\widehat{w}$  soit une unité de la convolution, ce qui est bien entendu impossible car sinon on pourrait reconstituer tout le signal à partir de sa restriction à l'intervalle  $[-T, T]$ . On peut essayer toutefois de la rendre  $\widehat{w}$  proche d'une bonne approximation de l'unité, c'est-à-dire une fonction d'intégrale 1 concentrée au voisinage de 0, ce qui heuristiquement va impliquer que  $w$  sera une fonction régulière valant 1 en 0. Notons que  $\widehat{w}_r = \frac{\sin 2\pi uT}{\pi u}$  est de ce point de vue assez mauvais. Il n'y a pas de solution universelle à ce problème. Un choix classique utilisé en pratique est la fenêtre de Hann  $w_h$  :

$$w_h(s) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi s/T))1_{[-T, T]}$$

qui donne

$$\widehat{w}_h(u) = \frac{\sin(\pi uT)}{2\pi u(1 - 4u^2T^2)}.$$

Le figure suivante montre  $\widehat{w}_r$  et  $\widehat{w}_h$ .



On voit que  $w_h$  est bien meilleure bien que le lobe principal soit élargi. On peut encore améliorer la vitesse de décroissance de  $\widehat{w}$  à l'infini en augmentant la régularité mais le lobe principal s'élargira d'autant. Il y a donc un compromis à réaliser.

Le sujet des fenêtres sera à nouveau abordé au chapitre VII.

## IV.6 Exercices

**Exercice IV.6.1** Soit  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$  d'intégrale 1 et  $f$  une fonction bornée continuellement dérivable. On suppose que  $f$  et  $f'$  appartiennent à  $L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ . On pose

$$\varphi_n(x) = n\varphi(nx).$$

1. Exprimer  $\widehat{\varphi}_n(x)$  à l'aide de  $\widehat{\varphi}$ .
2. A-t-on convergence de  $\widehat{\varphi}_n$  vers une limite? En quel sens? Démontrer que cette convergence ne peut avoir lieu ni uniformément ni dans  $L_1(\mathbb{R})$ .

On pose  $\psi(x) = x\varphi(x)$  et l'on suppose dans toute la suite que  $\psi \in L_1(\mathbb{R})$ .

4. Majorer  $\|\widehat{\varphi}'\|_\infty$  à l'aide de  $\psi$ . En déduire une borne pour  $\|\widehat{\varphi}'_n\|_\infty$ .
5. Déduire de ce qui précède que :  $\|f - f * \varphi_n\|_2 \leq \frac{2\pi}{n} \|\psi\|_1 \|f'\|_2$ .

### Exercice IV.6.2

1. Soit  $\lambda > 0$ ; pour  $n$  entier  $\geq 1$ , calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$x_n(t) = \exp(-\lambda t) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} 1_{[0, \infty[}(t).$$

Commencer par  $n = 1$ .

2. Calculer  $x_n * x_p$  en utilisant la transformée de Fourier.
3. On rappelle que la fonction  $\Gamma$  est définie, pour  $\text{Re}(z) > 0$  par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Pour  $\alpha$  paramètre réel  $> 0$ , on note  $x_\alpha$  la fonction (densité de la loi gamma de paramètre  $\alpha$ ) définie par :

$$x_\alpha(t) = \Gamma(\alpha)^{-1} t^{\alpha-1} e^{-t} 1_{[0, \infty[}(t).$$

Par une méthode d'intégrale curviligne sur un contour fermé du plan complexe, montrer que la transformée de Fourier de  $x_\alpha$  est  $u \mapsto (1 + 2\pi i u)^{-\alpha}$ .

**Exercice IV.6.3** Calcul de  $I = \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt$

Calculer  $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+s^2)/2} dt ds$  en utilisant le passage en coordonnées polaires. En déduire  $I$ .

**Exercice IV.6.4** Soit  $f$  une fonction mesurable sur  $\mathbb{R}$ . On considère le domaine sa transformée de Laplace et son domaine de définition

$$\mathcal{L}f(z) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-tz}, \quad D_f = \{z \in \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-zt}| dt < \infty\}.$$

On se propose de montrer que  $\mathcal{L}f$  est développable en série entière au voisinage de tout point intérieur à  $D_f$ .

1. Montrer que  $D_f$  est formé de droites verticales dans le plan complexe.
2. Montrer que pour  $y_0 \leq y \leq y_1$  et  $t \in \mathbb{R}$  on a  $e^{-yt} \leq e^{-y_0t} + e^{-y_1t}$ .  
En déduire que  $D_f$  est de la forme  $D_f = I \times \mathbb{R}$ , où  $I$  est un intervalle (au sens large) de  $\mathbb{R}$ .
3. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer la convexité de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$

$$y \mapsto \ln \left( \int_{\mathbb{R}} |f(t)| e^{yt} dt \right).$$

4. On suppose que la bande  $D_f$  est d'intérieur non vide. Soit  $z_0$  un point de l'intérieur de  $D_f$ . On peut choisir deux réels  $x_0$  et  $x_1$  tels que :  $x_0 < \operatorname{Re}(z_0) < x_1$  et

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-x_0t} dt < \infty, \quad \int_{-\infty}^0 |f(t)| e^{-x_1t} dt < \infty.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, montrer que  $\mathcal{L}f$  est développable en série entière sur le disque  $D(z_0, r)$  de centre  $z_0$  et de rayon  $r$ , où  $r = \inf(\operatorname{Re}(z_0) - x_0, x_1 - \operatorname{Re}(z_0))$ .

**Exercice IV.6.5** Montrer en utilisant le théorème de convergence dominée, que, si  $f$  est intégrable et à support compact, alors sa transformée de Laplace est définie dans le plan complexe et analytique.

**Exercice IV.6.6** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  est höldérienne d'ordre  $\alpha$  pour un  $0 < \alpha \leq 1$  et que l'on peut écrire la majoration dans la condition de Hölder sous la forme :

$$|f(t+h) - f(t)| \leq C(t)|h|^\alpha, \quad \forall h, t \in \mathbb{R}, \tag{IV.10}$$

avec une fonction  $C(t)$  intégrable.

1. Montrer que, si la fonction  $f$  vérifie (IV.10) alors :

$$\sup_u |u|^\alpha |\widehat{f}(u)| < \infty.$$

2. Montrer que toute fonction  $g$  intégrable et de classe  $C^2$ , telle que  $g'$  et  $g''$  soient intégrables, satisfait aux conditions de la formule d'inversion de Fourier.
3. Montrer que si l'on suppose seulement que  $g$  est dérivable, telle que sa dérivée  $g'$  soit intégrable et vérifie (IV.10) pour un  $\alpha \in ]0, 1]$ , la fonction  $g$  satisfait encore aux conditions de la formule d'inversion de Fourier.

**Exercice IV.6.7** On note  $\varphi$  la fonction  $t \rightarrow e^{-t^2/2}$ .

1. Montrer que si  $f$  est intégrable, alors  $f * \varphi$  est  $C^\infty$ .
2. A-t-on  $f * \varphi \in \mathcal{S}$ ? (considérer sa transformée de Fourier)

**Exercice IV.6.8** Calcul de  $I = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin t}{t} dt$

1. En intégrant par partie (et en prenant  $1 - \cos t$  comme primitive de  $\sin t$ ), montrer la relation

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \left( \frac{\sin t}{t} \right)^2 dt.$$

2. En représentant la fonction  $t \rightarrow \frac{\sin t}{t}$  comme une transformée de Fourier, en déduire la valeur de  $I$ .

**Exercice IV.6.9** *Formule de sommation de Poisson*

1. Soit  $T > 0$ . On considère une fonction  $f$  continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , telle que la série  $u(t) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(tT + nT)$  converge uniformément sur tout compact et telle que la série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n/T)|$  soit absolument convergente.

- a) Montrer que les coefficients de Fourier de  $u$  sont  $c_n(u) = \hat{f}(n/T)$

$$\hat{f}(n/T) = \int_0^1 u(t) e^{-2\pi i n t} dt.$$

- b) En déduire la formule de Poisson

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + nT) = T^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n/T) e^{2\pi i n t / T}. \quad (\text{IV.11})$$

En particulier, on a  $\sum_n f(n) = \sum_n \hat{f}(n)$ .

2. Application :

- a) En prenant  $f(t) = e^{-r|t|}$ ,  $r > 0$ , en déduire la formule :

$$\frac{1 + e^{-r}}{1 - e^{-r}} = \frac{2}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4r}{r^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

- b) On prend maintenant, pour  $\sigma > 0$ ,  $f(t) = \exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})$ . Quelle relation obtient-on?

**Exercice IV.6.10** *Recherche de fonctions égales à leur transformée de Fourier*

On rappelle qu'une fonction  $f$  est de classe  $C^p$ , pour un entier  $p \geq 1$ , si elle est dérivable jusqu'à l'ordre  $p$  et si  $f^{(p)}$  est continue.

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - 4\pi^2 t^2 y(t) = \lambda y(t) \quad (\text{IV.12})$$

où  $\lambda$  est une constante. On note  $\varphi$  la fonction définie par  $\varphi(t) = e^{-\pi t^2}$ .

1. Montrer que pour tout polynôme  $H$ , la fonction  $\varphi_H$  définie par  $\varphi_H(t) = H(t)\varphi(t)$  a toutes ses dérivées intégrables.
2. Montrer que si  $f$  est une solution intégrable de l'équation (IV.12), de classe  $C^2$  avec ses deux premières dérivées intégrables, alors sa transformée de Fourier vérifie également (IV.12).
3. Montrer que  $\varphi$  est (à une constante multiplicative près) l'unique solution de (IV.12) pour  $\lambda = -2\pi$ , qui soit intégrable.

En déduire un calcul de la transformée de Fourier de  $\varphi$ .

4. On cherche des solutions de (IV.12) de la forme  $\varphi_H(t) = H(t)\varphi(t)$ , où  $H$  est un polynôme de degré  $n$ . Montrer qu'il existe une solution  $\varphi_H$  de (IV.12), avec  $H$  de degré  $n$  (et de terme de degré  $n$  non nul) si, et seulement si,  $\lambda = -2\pi(2n + 1)$ .

5. En déduire une famille de fonctions égales (à une constante multiplicative près) à leur transformée de Fourier.

**Exercice IV.6.11** *Étude d'une équation fonctionnelle*

1. On se propose de déterminer les fonctions  $\varphi$  intégrables qui vérifient l'équation fonctionnelle :

$$\varphi(2x) + \varphi(2x - 1) = \varphi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}. \quad (\text{IV.13})$$

- a) Exprimer les transformées de Fourier des fonctions

$$\varphi_1 : x \rightarrow \varphi(2x) \text{ et } \varphi_2 : x \rightarrow \varphi(2x - 1)$$

à l'aide de la transformée de Fourier  $\widehat{\varphi}$  de  $\varphi$ .

- b) En déduire une relation fonctionnelle, notée (\*), vérifiée par  $\widehat{\varphi}$ .  
c) Montrer que la fonction

$$\varphi(u) = e^{-\pi i u} \frac{\sin \pi u}{\pi u} \quad (= 1 \text{ si } u = 0)$$

est solution de (2) et qu'elle est la seule solution de (\*) qui soit continue et égale à 1 pour  $u = 0$ .

- d) Quelles sont les fonctions  $\varphi$  intégrables solutions de (IV.13)?  
2. (Généralisation)

- a) Par un procédé analogue déterminer les solutions intégrables de l'équation fonctionnelle :

$$2\varphi(2x) + \varphi(2x - 1) + \varphi(2x + 1) = 2\varphi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

- b) On considère, plus généralement, l'équation fonctionnelle

$$\sum_{k=-N}^N a_k \varphi(2x - k) = \varphi(x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \quad (\text{IV.14})$$

où  $N$  est un entier  $\geq 2$  et les  $a_k, k = -N, \dots, N$ , sont des constantes réelles.

Donner une condition nécessaire sur les coefficients  $a_k$  pour que l'équation (IV.14) possède une solution  $f$  intégrable d'intégrale égale à 1.

**Exercice IV.6.12** *Etude d'équations différentielles*

1. On considère l'équation différentielle

$$y(t) + y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}. \quad (\text{IV.15})$$

- a) Soit  $y$  une fonction intégrable solution de (1). Déterminer la transformée de Fourier de  $y$ .  
b) En déduire que l'équation (IV.15) a une solution de classe  $C^1$  bornée intégrable et une seule.  
Exprimer cette solution en utilisant la fonction d'erreur notée erf définie par

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-s^2/2} ds.$$

- c) Retrouver ce résultat en résolvant directement (1).  
2. On considère maintenant l'équation différentielle

$$y(t) - y''(t) = g(t), \quad (\text{IV.16})$$

où  $g$  est une fonction intégrable dont la transformée de Fourier est intégrable. On recherche les solutions  $y$  de classe  $C^2$  de (IV.16) qui sont intégrables et tendent vers 0 à l'infini.

- a) Déterminer la transformée de Fourier d'une telle solution  $y$ , si elle existe.  
En déduire que  $y$  est égale à  $g * h$ , où  $h$  est définie par  $h(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$ .
- b) Montrer que la fonction  $t \rightarrow t^2 \widehat{g * h}(t)$  est intégrable.  
En déduire que  $g * h$  est de classe  $C^2$  et est solution de (2).
- c) Déduire de ce qui précède que (2) a une solution et une seule de classe  $C^2$ , intégrable et tendant vers 0 à l'infini.
- d) Calculer cette solution lorsque  $g = h$ . Retrouver directement ce résultat.



# V

---

## DISTRIBUTIONS

---

---

### V.1 Notion de distribution, distribution tempérée

Soit  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ou simplement  $\mathcal{D}$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur  $\mathbb{R}$ . On définit la convergence d'une suite  $(\varphi_n)$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  vers une fonction  $\varphi$  au sens de la topologie de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  de la façon suivante :

$$\left( \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi \right) \iff \left( \begin{array}{l} \text{(i) les fonctions } \varphi_n \text{ restent à support dans un compact fixe} \\ \text{(ii) } \forall k \geq 0, \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

On vérifie qu'il existe bien une topologie dont ces suites sont les suites convergentes ; c'est un point délicat. De plus cette topologie est séparée (deux fonctions différentes sont contenues dans des ouverts disjoints).

**DÉFINITION V.1.** On appelle **distribution** toute forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  qui est continue pour la topologie de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . On note  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  l'espace des distributions. Une distribution  $\lambda$  est donc une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  telle que

$$\left( \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi \right) \implies (\lambda(\varphi_n) \rightarrow \lambda(\varphi)).$$

Une des grandes difficultés dans l'étude mathématique avancée des distributions (que nous ne ferons pas ici) est que ni  $\mathcal{D}$  ni son dual ne sont des espaces vectoriels normés. Heureusement, en pratique, toute distribution agira sur un certain espace normé  $E$  (plus grand que  $\mathcal{D}$ , p.ex.  $L^1(\mathbb{R})$  ou  $C^2(\mathbb{R})$ ...) et donc sera un élément du dual de  $E$ , ce qui permet de revenir à un cadre fonctionnel plus classique. Le cadre général des distributions a toutefois comme on va le voir l'avantage d'une remarquable simplicité formelle.

**EXEMPLE 1 : LES FONCTIONS LOCALEMENT INTÉGRABLES.** Si une fonction  $f$  est localement intégrable la distribution associée est l'application

$$\varphi \mapsto \int \varphi(t)f(t)dt.$$

On vérifie facilement, en utilisant des approximations de l'unité et les résultats du chapitre II, la propriété d'injectivité suivante : *deux fonctions intégrables distinctes représentent deux distributions différentes*. Cette propriété essentielle sera utilisée très souvent. C'est pour cela que l'on appelle également les distributions «fonctions généralisées».

En revanche les fonctions  $1_{[0,1]}$  et  $1_{]0,1[}$  définissent la même distribution car elle coïncident comme fonction de  $L_1$ .

**EXEMPLE 2 : LES MESURES FINIES.** Rappelons qu'une mesure finie réelle sur  $\mathbb{R}$  est une application linéaire réelle continue sur  $C_0(\mathbb{R})$ . On démontre qu'une telle application linéaire a forcément la forme

$$\mu(f) = \mu_+(f) - \mu_-(f), \quad f \in C_0(\mathbb{R})$$

où  $\mu_+$  et  $\mu_-$  sont des mesures positives finies sur  $\mathbb{R}$  muni de la tribu de Borel (dans le cas complexe il faut rajouter deux termes  $i\mu_+(f)$  et  $-i\mu_-(f)$ ). Les mesures finies définissent des distributions, la vérification est immédiate. De même pour les mesures localement finies (finies sur tout compact).

On a la propriété d'injectivité essentielle : *deux mesures localement finies distinctes définissent deux distributions différentes*. Ceci vient de la densité de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  dans  $C_0(\mathbb{R})$  : si  $\mu$  est une mesure finie telle que  $\mu(\varphi) = 0$  pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , alors  $\mu(f) = 0$  pour toute fonction  $f \in C_0(\mathbb{R})$  et donc  $\mu$  est la mesure nulle.

EXEMPLE 3 : LES DÉRIVATIONS. La forme linéaire  $\varphi \rightarrow \lambda(\varphi) = \varphi'(0)$  est une distribution.

Plus généralement, si l'on se donne un nombre fini de points  $(a_1, \dots, a_n)$ , et de masses  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , on obtient une distribution en posant  $\lambda(\varphi) = \sum_k \alpha_k \varphi^{(k)}(a_k)$ .

EXEMPLE 4 : LA VALEUR PRINCIPALE  $vp(\frac{1}{t})$ . Si  $\varphi$  est à support compact et de classe  $C^1$ , on peut définir l'intégrale  $\int \frac{\varphi(t)}{t} dt$  au sens de la valeur principale par

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq A} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt$$

On vérifiera (exercice V.5.8) que cette formule définit une distribution, notée  $vp(\frac{1}{t})(\varphi)$ .

## Dérivation d'une distribution

DÉFINITION V.2. Soit  $\lambda \in \mathcal{D}'$ . On appelle dérivée de  $\lambda$  la distribution  $\lambda'$  définie par

$$\lambda'(\varphi) = -\lambda(\varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

C'est bien une distribution car

$$(\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi) \implies (\varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} \varphi').$$

Soit  $f$  une fonction localement intégrable et  $\lambda$  la distribution associée,  $\lambda(\varphi) = \int \varphi(x)f(x)dx$ , alors, sa dérivée, que l'on appelle « dérivée de  $f$  au sens des distributions » est

$$\varphi \mapsto - \int \varphi' f dt.$$

Si  $f$  a une dérivée continue, alors la formule d'intégration par parties montre que la dérivée de  $f$  en tant que distribution s'identifie à la fonction  $f'$ . La dérivation au sens des distributions est donc compatible avec celle des fonctions de classe  $C^1$ .

EXEMPLE : DÉRIVÉE DE  $f(x) = 1_{x \geq 0}$  AU SENS DES DISTRIBUTIONS.

Soit  $\lambda$  la distribution associée à  $f$ . Pour toute fonction-test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  on a :

$$\lambda'(\varphi) = -\lambda(\varphi') = - \int_0^\infty \varphi'(t) dt = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

D'où  $\lambda' = \delta_0$ .

De façon générale l'existence de discontinuités (de première espèce) pour une fonction  $\varphi$  entraîne la présence de masses de Dirac dans l'expression de la dérivée de  $\varphi$  considérée comme une distribution.

On montrera en exercice que la dérivée au sens des distributions d'une fonction en escalier  $\sum_j c_j 1_{[a_j, b_j]}$  (somme finie) est donnée par  $\sum_j c_j (\delta_{a_j} - \delta_{b_j})$ .

## Approximation d'une distribution par une fonction régulière.

Si  $\lambda$  est une distribution et  $\varphi$  une fonction dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on définit la convolée  $\lambda * \varphi$  par  $(\lambda * \varphi)(t) = \lambda(\varphi_t)$ , où  $\varphi_t(s) = \varphi(t - s)$ . On peut vérifier que pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\lambda(\varphi * \psi) = (\lambda * \varphi)(\psi)$$

(utiliser que  $(\varphi * \psi)(t) = \lim n^{-1} \sum_k \varphi(t - k/n)\psi(k/n)$  où la limite a lieu dans  $\mathcal{D}$ ). On en déduit la relation :

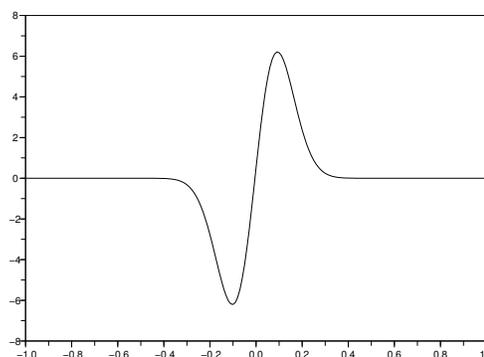
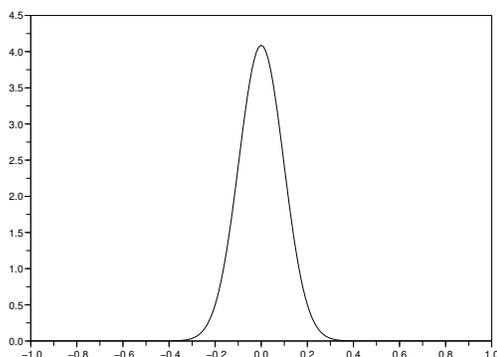
$$(\lambda * \varphi)' = \lambda' * \varphi = \lambda * \varphi'.$$

Donc si  $\varphi_n$  est une approximation de l'unité constituée de fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  les distributions  $\lambda_n = \lambda * \varphi_n$  qui sont des fonctions approximent  $\lambda$  au sens où pour toute  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  on a

$$\lambda_n(\psi) = \lambda(\varphi_n * \psi) \longrightarrow \lambda(\psi)$$

car  $\varphi_n * \psi \longrightarrow \psi$  dans  $\mathcal{D}$  (à vérifier).

Par exemple l'approximation de la masse de Dirac en zéro est simplement la suite  $\varphi_n$  et l'approximation de sa dérivée n'est autre que  $\varphi'_n$ . La figure suivante illustre  $\varphi_n$  et  $-\varphi'_n$  : on voit bien comment l'intégrale  $\int f(x)\varphi_n(x)dx$  fait une moyenne des valeurs de  $f$  au voisinage de 0 tandis que  $-\int f(x)\varphi'_n(x)dx$  fait la différence d'une moyenne après et d'une moyenne avant, ce qui approxime bien  $f'(0)$ .



## Opérations sur les distributions.

Ce qui vient d'être dit explique pourquoi on appelle parfois les distributions «fonctions généralisées». Il y a toutefois une différence majeure avec les fonctions : **en général le produit de deux distributions n'existe pas**. Par exemple  $1_{[0,1]}$  et  $1_{]0,1[}$  définissent la même distribution  $\varphi \mapsto \int_0^1 \varphi(s)ds$  et le produit de cette distribution par  $\delta_0$  pose visiblement problème. De même, si une fonction  $f$  est localement intégrable mais que son carré n'est pas localement intégrable (ex :  $f(x) = x^{-1/2}$ ) on ne peut pas interpréter  $f^2$  comme une distribution.

En revanche on peut toujours faire le produit d'une distribution par une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

## Distributions tempérées.

On choisit maintenant comme espace de fonctions-tests l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  formé des fonctions indéfiniment dérivables qui sont à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées ; en d'autres termes  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  si pour tout indice de dérivation  $\alpha$  et tout entier  $p$ , il existe une constante  $C_{\alpha,p}$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |t|^p |\varphi^{(\alpha)}(t)| = 0.$$

On met sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  la topologie définie par (convention  $x^0 = 1$ ) :

$$\left( \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \varphi \right) \iff \left( \forall k, p \geq 0, \| |t|^p (\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)) \|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \right)$$

DÉFINITION V.3. On appelle **distribution tempérée** toute forme linéaire sur l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , qui est continue pour la topologie de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Si  $\lambda$  est une distribution tempérée, la restriction de  $\lambda$  à  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  définit une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , et l'examen des topologies montre que cette forme linéaire est continue pour la topologie de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . C'est donc une distribution.

On peut montrer que le plongement de l'espace des distributions tempérées dans l'espace des distributions est injectif : deux distributions tempérées distinctes sont des distributions distinctes (ce n'est pas immédiat ! Ceci implique en particulier qu'il n'existe pas de distribution tempérée qui permettent de quantifier la vitesse de décroissance de l'argument  $\varphi$  vers 0 à l'infini).

EXEMPLES.

1. Nous avons vu que toute fonction localement intégrable  $f$  peut être considérée comme une distribution. Si  $f$  est à croissance au plus polynomiale, c'est-à-dire s'il existe une constante  $C$  et un entier  $m$  tels que  $|f(t)| \leq C|t|^m, \forall t$ , alors la distribution associée est tempérée. En effet, si  $\varphi$  est dans  $\mathcal{S}$ , alors  $\varphi f$  est intégrable, et on montre facilement que la convergence de la suite  $(\varphi_n)$  dans  $\mathcal{S}$  entraîne la convergence de la suite des intégrales  $(\int \varphi_n f dt)$  vers  $(\int \varphi f dt)$ .
2. Toute mesure finie définit une distribution tempérée. En effet, si une suite  $(\varphi_n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  converge au sens de la topologie de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  vers  $\varphi$ , alors elle converge vers  $\varphi$  au sens de la convergence uniforme et on a bien, si  $\mu$  est une mesure finie,  $\lim_n \mu(\varphi_n) = \mu(\varphi)$ .
3. De même, pour toute mesure  $\mu$  finie, pour tout entier  $p \geq 0$ , la mesure  $f \rightarrow \int f(t) t^p d\mu(t)$ , qui a une densité  $t^p$  par rapport à  $\mu$ , définit une distribution tempérée.
4. Plus généralement, on peut multiplier une distribution tempérée par un polynôme : le résultat est encore une distribution tempérée.

## V.2 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

La formule

$$\int \hat{f}(t)\varphi(t)dt = \int f(t)\hat{\varphi}(t)dt$$

montre que la transformée de Fourier d'une fonction  $f$ , vue comme une distribution, n'est autre que l'action de  $f$  sur la transformée de Fourier de la fonction test. Ceci suggère la définition suivante pour la transformée de Fourier d'une distribution tempérée :

DÉFINITION V.4. Soit  $\lambda$  une distribution tempérée. La transformée de Fourier  $\mathcal{F}\lambda = \hat{\lambda}$  de  $\lambda$  est définie par :

$$\hat{\lambda}(\varphi) = \lambda(\hat{\varphi}), \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Cette formule définit bien la valeur de  $\hat{\lambda}$  sur l'espace des fonctions-tests : en effet, on vérifiera en exercice, en utilisant les résultats du § IV.3 que la formule précédente définit effectivement une distribution tempérée.

Si  $\lambda$  est associée à une fonction  $f$  (c.-à-d.  $\lambda(\varphi) = \int \varphi(x)f(x)dx$ ) on vérifie facilement en utilisant la formule (IV.9) que  $\hat{\lambda}$  associée à la fonction  $\hat{f}$ . Cette définition peut donc se voir comme une façon détournée de définir la fonction  $\omega \mapsto \lambda(e^{-2i\pi\omega \cdot})$  qui n'est a priori pas définie (...car c'est une distribution).

Les fonctions qui non intégrables, mais dont la croissance est «raisonnable» fournissent des exemples pour lesquels la transformée de Fourier n'est pas définie au sens habituel, mais l'est au sens des distributions.

Le théorème d'inversion se déduit immédiatement de ce que  $\mathcal{F}^{-1}$  est l'inverse de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{S}$  :

THÉORÈME V.5.  $\mathcal{F}$  définit une bijection sur l'espace des distributions tempérées, d'inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  défini par

$$(\mathcal{F}^{-1}\lambda)(\varphi) = \lambda(\mathcal{F}^{-1}\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

THÉORÈME V.6. Soit  $\mu$  une mesure finie. Alors sa transformée de Fourier au sens des distributions est donnée par la fonction continue

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t u} \mu(du).$$

*Démonstration:* La continuité des  $f$  est une simple application du théorème de Lebesgue. On a pour  $\varphi \in \mathcal{S}$ , par application du théorème de Fubini :

$$\mu(\widehat{\varphi}) = \int \int e^{-2i\pi t u} \varphi(t) dt \mu(du) = \int \left( \int e^{-2i\pi t u} \mu(du) \right) \varphi(t) dt = \int f(t) \varphi(t) dt \quad \blacksquare$$

### Exemples.

1.  $f(t) = 1$ . Soit  $\lambda$  la distribution associée à  $f$ . Pour  $\varphi \in \mathcal{S}$ , on a :

$$\widehat{\lambda}(\varphi) = \int \widehat{\varphi}(u) du = \varphi(0).$$

La dernière égalité provient de l'application de la formule d'inversion.

On pourra écrire, en utilisant une notation simplifiée :  $\mathcal{F}(1) = \delta_0$ .

2. Soit  $\lambda$  une distribution de la forme :  $\lambda(f) = f^{(k)}(t)$ , alors  $\widehat{\lambda}(\omega) = (-2i\pi\omega)^k e^{-2i\pi t \omega}$  (exercice).
3.  $f(t) = t$ . Cette fonction n'est pas intégrable. Elle définit une distribution tempérée  $\lambda$  dont on peut calculer la transformée de Fourier de  $f$  au sens des distributions : si  $\varphi \in \mathcal{S}$  est une fonction-test, on doit avoir :

$$\widehat{\lambda}(\varphi) = \int t \widehat{\varphi}(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int \mathcal{F}(\varphi')(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \varphi'(0) = \frac{-1}{2\pi i} \delta'_0(\varphi).$$

Le calcul utilise le fait que les fonctions de  $\mathcal{S}$  ainsi que leurs dérivées sont intégrables et ont une transformée de Fourier intégrable. On a donc :

$$\widehat{f} = \frac{-1}{2\pi i} \delta'_0.$$

4.  $f(t) = \sum_k c_k e^{2\pi i a_k t}$ , avec  $\sum_k |c_k| < \infty$ . Pour calculer sa transformée de Fourier au sens des distributions, calculons, pour une fonction-test  $\varphi$ , la quantité  $\mathcal{F}f(\varphi)$ . On a :

$$\widehat{f}(\varphi) = \int \widehat{\varphi}(u) \sum_k c_k e^{2\pi i a_k u} du = \sum_k c_k \varphi(a_k) = \sum_k c_k \delta_{a_k}(\varphi).$$

D'où  $\widehat{f} = \sum_k c_k \delta_{a_k}$ .

En particulier si  $f$  est 1-périodique et que sa série de Fourier est sommable, on a :  $\widehat{f} = \sum_k c_k(f) \delta_k$ .

5.  $f(t) = 1_{[0, \infty[}(t)$ . On verra en exercice que :  $\widehat{f}(u) = \frac{1}{2} \delta_0(u) + \frac{1}{2i\pi} vp(\frac{1}{u})$ .

6. Le «peigne de Dirac» :  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT}$ . On montrera en exercice, que  $\widehat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n/T}$ .

Le théorème suivant montre la cohérence de la transformée de Fourier au sens des distributions avec la théorie des séries de Fourier, si l'on identifie une suite à une somme de masses de Dirac aux entiers avec les poids correspondants :

THÉORÈME V.7. Soit  $f$  une fonction 1-périodique, intégrable sur  $[0, 1]$ , de coefficients de Fourier  $c_n$ . Alors sa transformée de Fourier au sens des distributions est donnée par la mesure

$$\sum_n c_n \delta_n.$$

La transformée inverse de cette mesure est donc  $f$ .

Démonstration: Soit  $\varphi \in \mathcal{S}$ . Remarquons qu'en vertu du théorème de Fubini :

$$\int f(t) \widehat{\varphi}(t) dt = \sum_q \int_0^1 f(t) \widehat{\varphi}(t+q) dt = \int_0^1 f(t) \left( \sum_q \widehat{\varphi}(t+q) \right) dt.$$

On sait que la suite  $f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k f$  converge vers  $f$  dans  $L_1([0, 1])$  (th. III.14), donc, puisque la fonction  $\psi(t) = \sum_q \widehat{\varphi}(t+q)$  est bornée

$$\int f(t) \widehat{\varphi}(t) dt = \int_0^1 f(t) \psi(t) dt = \lim_n \int_0^1 f_n(t) \psi(t) dt = \lim_n \int f_n(t) \widehat{\varphi}(t) dt$$

et, en utilisant la formule (III.8)

$$\int f_n(t) \widehat{\varphi}(t) dt = \int \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{2i\pi kt} \widehat{\varphi}(t) dt = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k \varphi(k)$$

qui converge bien vers  $\sum c_k \varphi(k)$  par application du théorème de convergence dominée. ■

### V.3 Mesure spectrale d'un signal. Application aux transmissions

Rappelons qu'une mesure finie sur  $\mathbb{R}$  est une application linéaire continue sur  $C_0(\mathbb{R})$  et qu'elle a forcément la forme

$$\mu(f) = \mu_+(f) - \mu_-(f) + i\mu_{i+}(f) - i\mu_{i-}(f)$$

où chacun des quatre termes est une mesure positive finie sur  $\mathbb{R}$  muni de la tribu de Borel.

Considérons la classe des fonctions (des signaux) qui peuvent être représentés comme transformée de Fourier d'une mesure finie sur l'espace des fréquences : ce sont les signaux  $f$  qui peuvent s'écrire sous la forme

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i t u} \mu(du), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{V.1}$$

où  $\mu$  est une mesure finie. C'est la représentation d'un signal comme superposition de termes périodiques. Cette représentation n'est pas toujours possible. En effet si  $\mu$  est finie, sa transformée de Fourier est nécessairement continue.

DÉFINITION V.8. On dit qu'un signal  $f : t \rightarrow f(t), t \in \mathbb{R}$  possède une **mesure spectrale**  $\mu$ , si  $f$  peut être représenté sous la forme (V.1), où  $\mu$  est une mesure finie sur l'espace des fréquences.

On a la caractérisation suivante :

THÉORÈME V.9. Un signal  $f$  possède une mesure spectrale si et seulement si sa transformée de Fourier (au sens des distributions) est une mesure finie. Dans ce cas, la mesure spectrale est cette transformée de Fourier.

*Démonstration:* En effet si  $f$  admet une mesure spectrale  $\mu$ , alors la transformée Fourier de  $f$  associée à toute fonction test  $\varphi$  la valeur

$$\int f(t)\widehat{\varphi}(t)dt = \int f(u)\widehat{\varphi}(t)e^{2i\pi ut} dt \mu(du) = \int \varphi(u)\mu(du)$$

par application du théorème de Fubini et de la formule d'inversion, ce qui prouve de théorème dans le sens aller. Si maintenant la transformée de Fourier de  $f$  est une mesure  $\mu$ , en fonction de ce qui précède la fonction  $g(t) = \int e^{2i\pi ut}\mu(du)$  admet également  $\mu$  comme transformée de Fourier et donc  $\widehat{f-g}$  étant nul,  $f-g$  également. ■

**Signaux à spectre discret.** Si  $f$  est de période  $\tau > 0$ , sa mesure spectrale est portée par le réseau  $\{n\tau^{-1}, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Supposons  $f$  intégrable sur  $[-\frac{1}{2}\tau, \frac{1}{2}\tau]$  avec une série de Fourier ( $\tau$ -périodique) sommable :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2\pi i n \frac{t}{\tau}}, \quad c_n(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t\tau) e^{-2\pi i n t} dt.$$

La mesure spectrale de  $f$  est la mesure discrète  $\mu = \sum_n c_n \delta_{n\tau^{-1}}$ .

REMARQUE : Un signal peut avoir une mesure spectrale discrète sans être périodique : par exemple  $f(t) = \cos(2\pi t) + \cos(2\pi\sqrt{2}t)$  est non périodique (à vérifier !) et a pour mesure spectrale la mesure discrète  $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1) + \frac{1}{2}(\delta_{-\sqrt{2}} + \delta_{\sqrt{2}})$ .

**Mesure spectrale des signaux à valeurs réelles.** Soit  $f$  un signal à valeurs réelles, de mesure spectrale  $\mu$ . Ecrivons  $\mu$  sous la forme

$$\mu = \mu_1 + i\mu_2,$$

avec  $\mu_1$  et  $\mu_2$  mesures réelles.  $\mu_1$  peut être explicitement définie par  $\mu_1(\varphi) = \text{Re}(\mu(\varphi))$  si  $\varphi$  est bornée à valeurs réelle; de même pour  $\mu_2$ . On a donc pour toute fonction test  $\varphi$  à valeurs réelles :

$$\mu_1(\varphi) = \text{Re}(\mu(\varphi)) = \text{Re}\left(\int f\widehat{\varphi}\right) = \text{Re}\left(\int f\widehat{\varphi}\right) = \text{Re}\left(\int f\widehat{\varphi(-\cdot)}\right) = \mu_1(\varphi(-\cdot)).$$

Cette relation s'étend par linéarité aux fonctions  $\varphi$  complexes et par densité des fonctions test dans  $L_1(\mu_1)$  aux fonctions mesurables bornées (car  $\mu_1$  est finie). En somme  $\mu_1$  est paire. En appliquant ce résultat à  $\varphi 1_{\mathbb{R}_-}$  on en déduit que

$$\mu_1(\varphi) = \mu_1((\varphi + \varphi(-\cdot))1_{\mathbb{R}_+}).$$

De même on obtient que  $\mu_2$  est impaire et donc  $\mu_2(\varphi) = \mu_2((\varphi - \varphi(-\cdot))1_{\mathbb{R}_+})$ . En appliquant ces deux dernières identités à  $\varphi(t) = e^{2i\pi ut}$  avec  $f(u) = \mu_1(\varphi) + i\mu_2(\varphi)$  on obtient la

PROPOSITION V.10. *Si  $f$  admet  $\mu$  comme mesure spectrale, et si  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$  est la décomposition de  $\mu$  en partie réelle et partie imaginaire, alors  $\mu_1$  est paire,  $\mu_2$  est impaire et*

$$f(t) = 2 \int_0^\infty \cos(2\pi ut) \mu_1(du) - 2 \int_0^\infty \sin(2\pi ut) \mu_2(du). \quad (\text{V.2})$$

## Application : Transmissions

Les longueurs d'ondes utilisées en transmissions hertzienne vont typiquement du kilomètre (grande ondes) au décimètre (télévision), ce qui correspond à des fréquences de l'ordre de  $10^5$  à  $10^9$  Hz.

La règle du jeu est que chaque émetteur peut envoyer des signaux dont la mesure spectrale est portée par un intervalle  $I_p = [\omega_0 - \delta, \omega_0 + \delta]$ , voisinage de la fréquence porteuse  $\omega_0$ . Ces intervalles étant disjoints pour deux émetteurs distincts, il n'y a pas de brouillage.

Ces fréquences n'ont rien à voir avec celles du signal à communiquer. Il faut donc convertir l'information à transmettre en un signal de mesure spectrale portée par  $I_p$ . Par exemple si l'on veut transmettre une constante  $c$ , la méthode la plus simple est d'envoyer le signal  $c \cos(\omega_0 t)$ .

En pratique le signal à transmettre est soit le signal analogique (parole, musique...), soit un signal digital à valeurs typiquement 0 ou 1 (signal analogique numérisé codé).<sup>1</sup>

**Modulation d'amplitude.** Si  $x$  est l'information à transmettre, on envoie le signal

$$y(t) = x(t) \cos(\omega_0 t)$$

On voit que si la mesure spectrale de  $x(t)$  est sur  $[-\delta, \delta]$ ,  $y(t)$  est bien porté par  $I_p$ .

**Modulation de fréquence.** On envoie

$$y(t) = \cos\left(\omega_0 t + \alpha \int_0^t x(s) ds\right)$$

Ici la mesure spectrale de  $y$  est difficile à étudier précisément. Remarquons toutefois au passage que la fréquence instantanée du signal, définie comme la dérivée de l'intérieur du cosinus, vaut  $\omega(t) = \omega_0 + \alpha x(t)$ .

Il est expérimentalement admis (règle de Carson) que si  $x(t)$  est dans la bande  $[-\omega_x, \omega_x]$  et si  $2\omega_x + 2\alpha\|x\|_\infty \leq \delta$  alors 98% de la puissance de  $y(t)$  est portée par  $I_p : \int_{I_p} |\hat{y}(s)|^2 ds \geq 0,98 \|\hat{y}\|^2$ .

## V.4 Transformée de Hilbert et signal analytique

DÉFINITION V.11. Soit  $x$  un signal à valeurs réelles de mesure spectrale  $\mu$  ne portant pas 0

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t u} \mu(du), \quad \mu(\{0\}) = 0.$$

Le signal analytique associé à  $x$  est le signal  $z$  dont la mesure spectrale est la restriction à  $\mathbb{R}_+$  de  $2\mu$  :

$$z(t) = 2 \int_0^{\infty} e^{2\pi i t u} \mu(du).$$

Nous allons voir que  $x$  est la partie réelle de  $z$  et préciser la relation existant entre  $x$  et  $y = \text{Im}(z)$ .

PROPOSITION V.12.  $x$  est la partie réelle de  $z$ . La mesure spectrale de  $y = \text{Im}(z)$ , est  $-i \text{sign}(u) \mu(du)$ .

*Démonstration:* La première affirmation est une conséquence immédiate de (V.2). La mesure spectrale de  $y = -i(z - x)$  est nécessairement  $-i(2\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+} - 1)\mu = -i \text{sign}(u)\mu$ . ■

**Analyticité du signal analytique.** Le signal  $z$  est prolongeable en une fonction analytique dans tout le demi-plan complexe supérieur.

En effet définissons le prolongement de  $z$  au demi-plan fermé  $\{t + is, s \geq 0\}$  par :

$$z(t + is) = \int_0^{\infty} e^{2\pi i u(t+is)} \mu(du).$$

Cette intégrale existe pour  $s \geq 0$ , car  $|e^{2\pi i u(t+is)}| = e^{-2\pi u s} \leq 1$ . Cette fonction est bien continue sur  $\{t + is, s \geq 0\}$  par application du théorème de convergence dominée. On vérifie qu'elle est analytique sur  $\{t + is : s > 0\}$  : il suffit d'appliquer de théorème de dérivation sous le signe d'intégration pour vérifier que  $\frac{\partial z}{\partial s} = i \frac{\partial z}{\partial t}$ . Les détails sont laissés en exercice.

1. On trouvera des compléments particulièrement clairs à l'adresse [www.essi.fr/~leroux/transmission](http://www.essi.fr/~leroux/transmission).

## La transformée de Hilbert

DÉFINITION V.13. La transformée de Hilbert d'une fonction  $f$  est la fonction  $Hf$  définie formellement par :

$$Hf(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |s|} f(t+s) \frac{ds}{s}.$$

On verra à l'exercice V.5.8 que cette limite est bien définie pour toute fonction  $f$  de classe  $C^1$  à support compact et que l'application  $f \rightarrow Hf$  définit un opérateur isométrique pour la norme  $\|\cdot\|_2$  ; il peut donc s'étendre à  $L^2(\mathbb{R})$  tout entier en vertu du lemme IV.22. Dans le domaine de Fourier cet opérateur est simplement la *multiplication* par la fonction  $-i \operatorname{sgn}(u) : \widehat{Hf}(u) = -i \operatorname{sgn}(u) \widehat{f}(u)$ . En particulier  $H^2 f = -f$ ,  $H(\cos(\omega t)) = \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\omega t)$ ,  $H(\sin(\omega t)) = -\operatorname{sgn}(\omega) \cos(\omega t)$ .

On a donc :

PROPOSITION V.14. Si  $x \in L_2(\mathbb{R})$ ,  $y$  est la transformée de Hilbert de  $x$ .

On dit que  $x$  et  $y$  sont conjugués : ce sont les restrictions à l'axe réel de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une fonction holomorphe dans le demi-plan supérieur.

THÉORÈME V.15. (Bedsonian, 1962) Si  $x_B, x_H \in L_2(\mathbb{R})$ , sont deux fonctions telles que  $x_B$  est à spectre sur  $[-a, a]$  est  $x_H$  à son spectre sur le complémentaire, alors  $H(x_F x_H) = x_F H(x_H)$ .

Une conséquence est la suivante : si  $x$  s'écrit comme une modulation d'amplitude d'une fréquence donnée

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} \left( A(t) e^{i(\omega t + \varphi)} \right)$$

et si  $A$  a son spectre dans  $]-\omega, \omega[$ , alors

$$|A(t)| = |x(t) + iHx(t)|$$

La transformée de Hilbert a permis de retrouver l'enveloppe du signal.

## V.5 Exercices

### Exercice V.5.1

1. Montrer que la dérivée au sens des distributions d'une fonction en escalier  $\sum_j c_j 1_{[a_j, b_j]}$  (somme finie) est donnée par  $\sum_j c_j (\delta_{a_j} - \delta_{b_j})$ .
2. Montrer que  $f \mapsto f'(0)$  définit bien une distribution, mais pas une mesure finie.

### Exercice V.5.2

1. Montrer qu'une fonction  $\psi \in \mathcal{D}$  est d'intégrale nulle si et seulement si elle est la dérivée d'une fonction de  $\mathcal{D}$ .
2. Trouver les distributions  $\lambda$  telles que  $\lambda' = 0$ . Pour cela, on pourra fixer  $\phi_0$  d'intégrale 1 et remarquer que pour tout  $\psi \in \mathcal{D}$ ,  $\psi - (\int \psi) \cdot \phi_0$  est d'intégrale nulle.
3. Montrer que les distributions  $\lambda$  telles que  $\lambda' = \delta_0$  sont les fonctions  $1_{x>0} + a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Exercice V.5.3** Soit  $f(t) = \frac{T^2}{4} - t^2$ , pour  $|t| < \frac{T}{2}$ , = 0 sinon.

1. Calculer la transformée de Fourier de  $f$  par un calcul direct.
2. Dériver deux fois  $f$  au sens des distributions et vérifier sur cet exemple la relation entre dérivation et transformation de Fourier.

**Exercice V.5.4** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $\mathbb{R}$  telle que  $|x_n|$  converge vers  $+\infty$ .

1. Montrer que l'application  $\lambda : \phi \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \phi^{(n)}(x_n)$  définit une distribution.
2. Calculer pour tout  $N$  la transformée de Fourier de  $\lambda_N : \phi \mapsto \sum_{n=0}^N \phi^{(n)}(x_n)$ .
3. Pourquoi ne peut-on pas calculer la transformée de Fourier de  $\lambda$ ? (On n'attend pas de contre-exemple explicite)

**Exercice V.5.5** Calculer les transformées de Fourier (au sens des distributions) des cinq signaux suivants :

$$t^n, Y(t)t^n, e^{\alpha t}, Y(t)e^{\alpha t}, \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2\pi n\omega t.$$

On se restreindra aux valeurs de  $\alpha \in \mathbb{C}$  pour lesquelles la fonction est une distribution tempérée.

**Exercice V.5.6** *Le «peigne de Dirac».* Soit  $T, a \in \mathbb{R}$ . On considère la mesure définie par  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{nT+a}$ , où  $\delta_x$  désigne la masse de Dirac au point  $x$

1. Montrer que  $\mu$  est une distribution tempérée.
2. Calculer la transformée de Fourier de  $\mu$  en utilisant la formule de Poisson (IV.11).
3. À un signal sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  identifié à un signal périodique  $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , on associe la mesure  $\mu_u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n u_n$ . Calculer la transformée de Fourier de  $\mu_u$ .

**Exercice V.5.7** Soit  $\varphi$  une fonction  $C^1$  par morceaux, avec limite à gauche et à droite aux points de discontinuité. On supposera qu'il n'y a qu'un nombre fini de points de discontinuité sur tout intervalle borné.

Calculer la dérivée de la distribution de densité  $\varphi$ .

En particulier, quelle est la dérivée au sens des distributions d'une fonction en escalier ?

**Exercice V.5.8** *La distribution «valeur principale de  $\frac{1}{t}$ ».*

Pour toute fonction  $\varphi$  dérivable en 0 on note  $\tilde{\varphi}$  la fonction telle que  $\varphi(t) = \varphi(0) + t\tilde{\varphi}(t)$ .

1. Montrer que la distribution

$$\varphi \mapsto vp\left(\frac{1}{t}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, A \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq A} \frac{\varphi(t)}{t} dt,$$

est bien définie et est une distribution tempérée.

On montrera en particulier que si  $\varphi$  est à support dans l'intervalle  $[-L, L]$  on a

$$vp\left(\frac{1}{t}\right)(\varphi) = \int_{-L}^L \tilde{\varphi}(t) dt.$$

2. Soit  $\varphi$  une fonction-test à support dans l'intervalle  $[-L, L]$ . Montrer que

$$\int_0^A \tilde{\varphi}(u) du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0) \int_{\varepsilon \leq |t| \leq L} \frac{1 - e^{-2\pi i A t}}{2\pi i t} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{-L}^L (1 - e^{-2\pi i t A}) \tilde{\varphi}(t) dt$$

et en déduire que

$$\int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(u) du = \frac{1}{2} \varphi(0) + \frac{1}{2\pi i} vp\left(\frac{1}{t}\right)(\varphi).$$

On admettra la relation  $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}$ .

3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction échelon  $1_{[0, \infty[}$ .
4. En déduire la transformée de Fourier de  $\text{sign}(t)$ .
5. En déduire la transformée de Fourier de  $vp\left(\frac{1}{t}\right)$ .
6. En déduire que pour toute fonction  $f \in \mathcal{S} : Hf = \mathcal{F}^{-1} \left( -i \text{sign}(t) \hat{f}(t) \right)$ .
7. En déduire que  $H$  s'étend à tout  $L_2(\mathbb{R})$  en une isométrie.

# VI

---

## SIGNAUX À SPECTRE LIMITÉ ÉCHANTILLONNAGE

---

---

Dans ce chapitre nous examinons sous quelles conditions un signal échantillonné (c'est-à-dire observé aux temps  $n\tau$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , multiples d'un pas d'échantillonnage  $\Delta > 0$ ) peut être reconstruit. Le théorème d'échantillonnage de Shannon relie le choix du pas  $\Delta$  à la taille du support  $[-F, F]$  de la mesure spectrale du signal supposé à «spectre limité».

### VI.1 Signaux à spectre limité

**DÉFINITION VI.1.** *Un signal  $f$  de mesure spectrale  $\mu$  est dit à spectre limité ou à largeur de bande finie, si  $\mu$  est à support compact.*

**THÉORÈME VI.2.** *Si la mesure spectrale  $\mu$  d'un signal  $f$  est contenue dans un intervalle compact  $[-F, F]$ , (on dit aussi dans la bande de fréquences  $[-F, F]$ ), alors le signal (la fonction)*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i u t} \mu(du) = \int_{-F}^F e^{2\pi i u t} \mu(du)$$

*peut être prolongée en une fonction analytique dans tout le plan complexe.*

*Démonstration:* On définit le prolongement par :

$$f(t + is) = \int_{-F}^F e^{2\pi i u(t+is)} d\mu(u) = \sum_0^{\infty} \frac{(2\pi i)^n}{n!} (t + is)^n \int_{-F}^F u^n \mu(du).$$

Pour vérifier la convergence de la série à l'aide du théorème de Lebesgue, on utilise la majoration, vérifiée pour tout  $N \geq 0$  et pour  $|t + is| \leq \rho$ ,

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(2\pi i)^n}{n!} (t + is)^n u^n \right| \leq \sum_0^{\infty} \frac{(2\pi)^n}{n!} |t + is|^n |u|^n = e^{2\pi |t+is| |u|}$$

et l'intégrabilité de la fonction  $u \rightarrow e^{2\pi |t+is| |u|}$  si  $\mu$  est à support compact. ■

Nous venons de voir qu'un signal à spectre limité est analytique et donc en particulier  $C^\infty$ . Nous allons montrer que l'on peut majorer ses dérivées successives en fonction  $F$ . Noter que la borne du théorème est atteinte pour  $f(t) = e^{2i\pi Ft}$  :

THÉORÈME VI.3. (Bernstein) Soit  $f$  un signal à spectre limité contenu dans l'intervalle compact  $[-F, F]$ . Alors  $f$  est indéfiniment dérivable et on a, pour tout entier  $k \geq 0$ , et pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$  :

$$\|f^{(k)}\|_p \leq (2\pi F)^k \|f\|_p. \quad (\text{VI.1})$$

REMARQUE : En prenant  $f(x) = \cos(2\pi x/F)$ , on voit que la constante est optimale.

*Démonstration.* Nous avons vu que  $f$  a des dérivées à tous les ordres. Montrons la majoration sur les dérivées. Il suffit d'établir la formule (VI.1) pour  $k = 1$ , le cas général s'obtenant par récurrence (en effet, si  $\mu$  est la mesure spectrale (supposée bornée) de  $f$ , les dérivées  $f^{(k)}$  ont pour mesure spectrale  $(2\pi i u)^k \mu$ , qui est encore à support dans  $[-F, F]$ ).

Remarquons également qu'il suffit de montrer le théorème dans le cas  $F = 1/2$ , le cas général s'obtenant en posant  $g(x) = f(x/2F)$ , dont la mesure spectrale est définie par  $\mu_g(\varphi) = \int_{-F}^F \varphi(t/2F) \mu(dt)$  qui a bien pour support  $[-1/2, 1/2]$ .

Considérons la fonction  $\varphi$  obtenue en périodisant la fonction égale à  $u e^{-\pi i u}$  sur  $[-1/2, 1/2[$  en une fonction 1-périodique. Les coefficients de Fourier de  $\varphi$  sont donnés par :

$$c_k = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i k u} \varphi(u) du = \int_{-1/2}^{1/2} u e^{-2\pi i u(k + \frac{1}{2})} du = \frac{(-1)^{k+1} i}{2\pi^2 (k + \frac{1}{2})^2}.$$

En écrivant  $\varphi$  comme la somme de sa série de Fourier ( $\varphi$  est continue et sa série de Fourier est uniformément convergente), on obtient en restriction à l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$  :

$$u e^{-\pi i u} = \sum_k c_k e^{2\pi i u k}.$$

En faisant  $u = 1/2$  on obtient que  $\sum |c_k| = 1/2$ . On peut écrire  $f'(t)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\pi i \int_{-1/2}^{1/2} u e^{2\pi i u t} \mu(du) = 2\pi i \int_{-1/2}^{1/2} u e^{-\pi i u} e^{2\pi i u(t + \frac{1}{2})} \mu(du) \\ &= 2i\pi \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i u k} e^{2\pi i u(t + \frac{1}{2})} \mu(du), \end{aligned}$$

d'où, en intégrant sur le compact  $[-1/2, 1/2]$  la série uniformément convergente figurant à l'intérieur de l'intégrale :

$$f'(t) = 2i\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i(t + \frac{1}{2} + k)u} \mu(du) = 2i\pi \sum_{-\infty}^{\infty} c_k f(t + \frac{1}{2} + k).$$

On a donc

$$\|f'\|_p \leq 2\pi \|f\|_p \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k| = \pi \|f\|_p. \quad \blacksquare$$

## VI.2 Théorèmes d'échantillonnage

DÉFINITION VI.4. On appelle *sinus cardinal* la fonction continue, définie par  $\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ . La fonction  $\text{sinc}$  et la fonction  $1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$  sont transformées de Fourier l'une de l'autre.

REMARQUE : Certains auteurs définissent  $\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

THÉORÈME VI.5. Si le signal  $f$  est de carré intégrable et sa transformée de Fourier est à support dans  $[-F, F]$ , on a :

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2F}\right) \operatorname{sinc}(2Ft - n) \quad (\text{VI.2})$$

où  $f$  est la version continue du signal :  $f(t) = \int \widehat{f}(u)e^{2\pi iut} du$ . La série (VI.2) est absolument convergente pour tout  $t$ .

*Démonstration:* Quitte à appliquer le théorème à  $f(u/2F)$  dont la transformée de Fourier a son support sur  $[-1/2, 1/2]$ , on peut supposer que  $F = 1/2$ . Écrivons la série de Fourier de  $\widehat{f}(-u)$  comme fonction de  $L_2([-1/2, 1/2])$  :

$$\widehat{f}(u) = \sum_k c_k e^{-2i\pi k u}, \quad c_k = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi k u} \widehat{f}(u) du = f(k) \quad (\text{VI.3})$$

L'identité (VI.3), vraie dans  $L_2([-1/2, 1/2])$ , s'étend à  $L_2(\mathbb{R})$  si l'on multiplie les deux membres par  $1_{|u| \leq 1/2}$ . La continuité dans  $L_2(\mathbb{R})$  de la transformée de Fourier inverse implique alors que

$$f(t) = \mathcal{F}\left(\sum_k c_k e^{i\pi k u} 1_{|u| \leq 1/2}\right)(t) = \sum_k c_k \mathcal{F}(e^{2i\pi k u} 1_{|u| \leq 1/2})(t) = \sum_k c_k \mathcal{F}(1_{|u| \leq 1/2})(t - k)$$

qui est bien l'équation cherchée à condition que les deux membres soient continus. Il suffit de vérifier que la série (VI.2) est normalement convergente sur tout compact ; mais c'est une conséquence de

$$\sum_{|n| > N} |c_n \operatorname{sinc}(t - n)| \leq \frac{1}{\pi} \left( \sum_{|n| > N} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{|n| > N} (t - n)^{-2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare$$

**Cas général.** Considérons plus généralement un signal  $f$  dont la mesure spectrale  $\mu$  est à support dans l'intervalle  $[-F, F]$  :

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi iut} \mu(du) = \int_{-F}^F e^{2\pi iut} \mu(du).$$

Démontrons la forme générale suivante du théorème d'échantillonnage de Shannon :

THÉORÈME VI.6. Si le signal  $f$  a une mesure spectrale  $\mu$  à support dans un intervalle  $[-F, F]$ , il est déterminé par son échantillonnage  $f(nT)_{n \in \mathbb{Z}}$ , pourvu que le pas d'échantillonnage  $T$  vérifie

$$T < \frac{1}{2F}.$$

Si la mesure ne charge pas les extrémités, on peut prendre  $T = \frac{1}{2F}$ .

*Démonstration:* Supposons d'abord que  $\mu$  ne charge pas les extrémités de l'intervalle. Les quantités

$$f(n) = \int_{-F}^F e^{2\pi iun} \mu(du)$$

étant connues, on a accès à  $\int_{-F}^F P(u) \mu(du)$  pour tout polynôme trigonométrique  $P(u)$  et donc pour toute fonction  $2F$ -périodique continue (par approximation uniforme). Comme  $\mu$  ne charge pas les extrémités de l'intervalle, toute fonction continue sur  $[-F, F]$ , peut être approchée dans  $L^1(\mu)$  par des fonctions continues  $2F$ -périodiques (c'est une application élémentaire du théorème de Lebesgue) ; on a donc accès à  $\int_{-F}^F \varphi(u) \mu(du)$  pour  $\varphi$  continue sur l'intervalle, ce qui caractérise bien  $\mu$ . Ceci démontre la deuxième partie.

Soit maintenant  $T < 1/2F$ . Si la mesure  $\mu$  est à support dans  $[-F, F]$ , elle est évidemment aussi à support dans un intervalle  $[-1/2T, 1/2T]$  et la mesure ne charge plus les bornes. Par conséquent, on peut conclure en vertu de ce qui précède.  $\blacksquare$

**Exemple.** Soit  $f(t) = \sin(2\pi t)$ . La mesure spectrale de  $f$  est  $\mu = \frac{1}{2i}(\delta_1 - \delta_{-1})$ . Ici  $F = 1$  et la mesure spectrale charge les deux extrémités de l'intervalle  $[-F, F]$ .

Si l'on choisit comme pas d'échantillonnage  $T = \frac{1}{2F} = \frac{1}{2}$ , on a  $f(nT) = \sin(\pi n) = 0$ . Le signal  $f(t)$  a le même échantillonnage que la fonction nulle. Il faut donc prendre un pas d'échantillonnage plus petit que  $\frac{1}{2F}$ , par exemple  $T = \frac{1}{4}$ , correspondant à  $F = 2$ . On obtient alors, en écrivant formellement la formule d'échantillonnage (voir exercice 8 pour une justification), cette fois-ci pour la fonction  $\cos 2\pi t$  :

$$\cos 2\pi t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \cos(\pi n/2) \frac{\sin 4\pi t}{4\pi t + \pi n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \frac{\sin 4\pi t}{2t + p},$$

d'où

$$\frac{1}{\sin 2\pi t} - \frac{1}{2\pi t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p \neq 0} \frac{(-1)^p}{t + p/2} = \frac{4t}{\pi} \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{4t^2 - p^2}.$$

**Mesure spectrale du signal échantillonné. Repliement spectral.** Revenons à la formule de Poisson (IV.11)

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t + nT) = T^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n/T) e^{2\pi i n t / T}$$

qui se réécrit, si on l'applique à  $\widehat{f}$  et en remplaçant  $T$  par  $1/T$

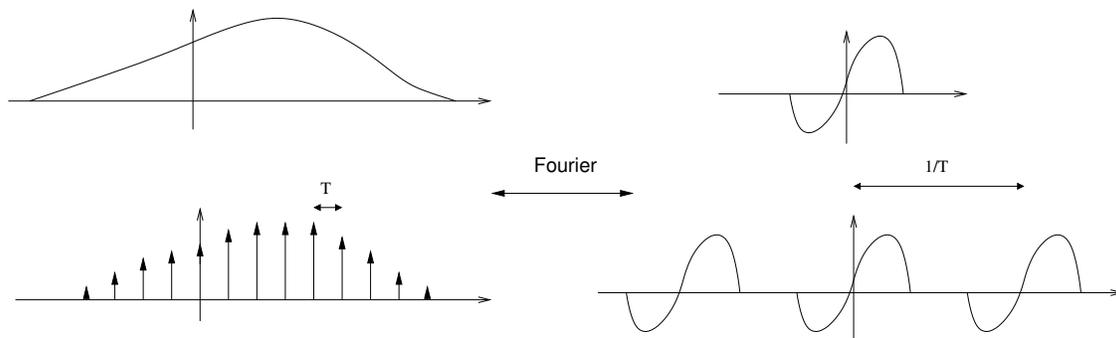
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(t + n/T) = T \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) e^{-2\pi i n t T}. \quad (\text{VI.4})$$

Ces formules sont valides si par exemple  $|f(t)| + |\widehat{f}(t)| \leq c/(1+t^2)$ . Si  $t \in [-F, F]$  et  $T \leq 1/2f$ , le membre de gauche vaut  $\widehat{f}(t)$ , ce qui montre bien pourquoi la connaissance des  $f(nT)$  permet de retrouver  $f$ . Ces deux formules expriment respectivement les deux affirmations suivantes :

*La transformée de Fourier du signal périodisé à période  $T$  est la version  $1/T$ -discrétisée de sa transformée de Fourier.*

*La transformée de Fourier du signal discrétisé à période  $T$  est la version  $1/T$ -périodisée de la mesure spectrale du signal.*

Elles peuvent s'illustrer ainsi :



Si  $T$  augmente on observe une superposition des contributions des fréquences modulo  $1/T$ , appelée «repliement spectral», qui empêche de reconstruire le signal original à partir de son échantillonnage.

La première affirmation se généralise aux signaux possédant une mesure spectrale : Soit  $f$  de mesure spectrale  $\mu$ . Faisons correspondre au signal échantillonné à pas  $T$  la mesure  $\nu_T = T \sum_n f(nT) \delta_{nT}$  (dans l'esprit du théorème V.7). Notons que pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{S}$  on a

$$\lim_{T \rightarrow 0} \nu_T(\varphi) = \int f(t) \varphi(t) dt$$

ce qui justifie le choix de la normalisation. On peut définir la mesure spectrale du signal échantillonné comme la transformée de Fourier de  $\nu_T$ . Pour la calculer observons que pour  $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} T \sum_n f(nT) \widehat{\varphi}(nT) &= T \sum_n \int e^{2i\pi nTt} \widehat{\varphi}(nT) \mu(dt) = \sum_n \int \varphi(t + n/T) \mu(dt) \\ &= \int \varphi(t) \sum_n \mu(dt + n/T). \end{aligned}$$

On a donc :

*La mesure spectrale du signal discrétisé à période  $T$  (identifié à  $\nu_T$ ) est la version  $1/T$ -périodisée de la mesure spectrale du signal.*

### VI.3 Transformée de Fourier discrète

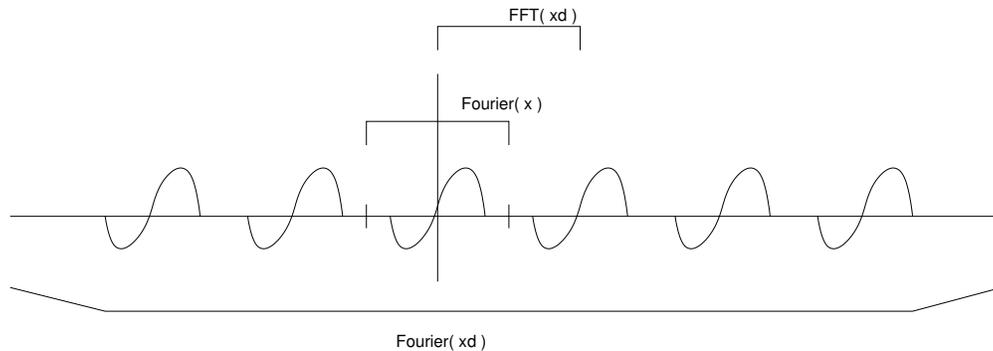
La formule (VI.4) exprime que *si le signal a une largeur de bande inférieure à  $2F$ , sa transformée de Fourier coïncide avec la somme de Riemann correspondante du moment que la discrétisation est faite à un pas inférieur à  $1/F$ , et à condition de restreindre cette somme de Riemann (périodique) à la bande.*

Soit donc un signal  $x$  est discrétisé à pas  $\delta$  sur un intervalle  $I = [T_0, T_0 + n\delta]$ ,  $y(k) = x(T_0 + k\delta)$ ; posons  $F = 1/(2\delta)$ . On aura le calcul suivant pour la DFT (discrete Fourier transform) de  $y$ , l'égalité centrale étant valide si la mesure spectrale de  $x$  a son support dans  $[-F, F]$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n y(j) e^{-2i\pi kj/n} &\simeq \sum_{j=-\infty}^{+\infty} y(j) e^{-2i\pi kj/n} \\ &= P_n \int x(T_0 + t\delta) e^{-2i\pi kt/n} dt \\ &= P_n \int x(T_0 + tn\delta) e^{-2i\pi kt} ndt \\ &= 2F e^{4i\pi kFT_0} \widehat{x}_d(2Fk/n), \end{aligned}$$

où  $P_n$  indique la  $n$ -périodisation de la fonction de  $k$ , et  $\widehat{x}_d$  est la  $2F$ -périodisée de  $\widehat{x}$  (c.-à-d. la transformée du signal discrétisé). Le «  $\simeq$  » vient de la troncature à  $I$  (Notons qu'on ne peut avoir à la fois  $\widehat{x}$  et  $x$  à support compact sans que  $x$  soit nul; nous sommes donc ici dans un domaine où les approximations sont inévitables).

Comme  $k$  va de 1 à  $n$  (c'est la convention pour la DFT) on obtient donc le spectre de  $x$  sur  $[0, F]$  comme cette suite sur  $\{1, \dots, n/2\}$  et sur  $[-F, 0]$  comme cette suite sur  $\{n/2 + 1, \dots, n\}$ . Un algorithme rapide (particulièrement si  $n$  est une puissance de 2) calcule la DFT : la FFT (fast Fourier transform).



On voit que  $\widehat{x}$  est échantillonné à un pas qui est l'inverse de la longueur de  $I$ . La seule solution pour augmenter la résolution fréquentielle est donc d'élargir  $I$ . Une astuce informatique (appelée «zero padding») pour

le faire est d'ajouter à droite de  $x$  des zéros supplémentaires (c.-à-d. faire comme sur  $x$  était effectivement à support sur  $I$ ), par exemple  $n$  zéros, ce qui crée un nouveau signal  $x_p$  avec

$$DFT(x_p)(k) = \sum_{j=1}^n x(j)e^{-2i\pi jk/2n} \simeq 2F\hat{x}_d(Fk/n), \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Bien entendu aucune information n'a été ajoutée ; il s'agit simplement d'une méthode d'interpolation particulière.

## VI.4 Application : Convertisseur numérique/analogique

La formule de Shannon (VI.2) permet de reconstruire le signal à partir du signal échantillonné ; le filtre en jeu est un filtre infini difficilement exploitable car ses coefficients décroissent en  $1/n$ . On peut remarquer que si la mesure spectrale de  $f$  a son support dans  $[-F, F]$ , on a également

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT)h(t - nT) \tag{VI.5}$$

du moment que

$$\begin{cases} \hat{h}(u) = 1, & u \in [-F, F] \\ \hat{h}(u) = 0, & u \notin [-1/2T, 1/2T] \end{cases}$$

Si  $T$  est un peu plus large que  $1/2F$ , on peut trouver des  $h$  qui décroissent suffisamment rapidement pour que la somme soit approximable par une somme tronquée.

## VI.5 Application : Le multiplexage

Considérons  $J$  signaux réels  $x_j = (x_j(t))_{t \in \mathbb{R}}, 1 \leq j \leq J$  à transmettre simultanément sur un canal «large bande» de largeur de bande  $2F$ . On suppose que les signaux  $x_j$  ont un spectre limité à un intervalle de fréquence  $[-u_c, u_c]$ . Le problème est de transmettre simultanément ces signaux sur le canal en exploitant que  $u_c \ll F$ .

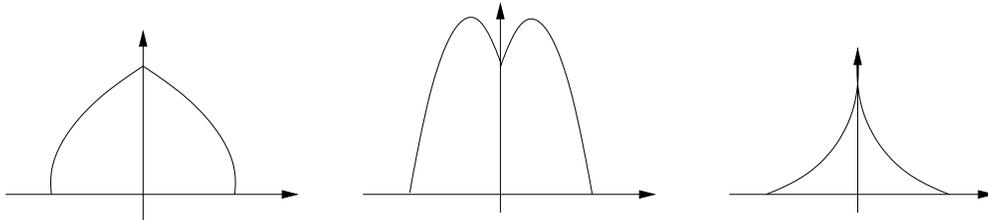
Supposons pour simplifier l'exposé que ces signaux  $x_j$  ont une transformée de Fourier  $\hat{x}_j$ . L'idée de base est que la multiplication de  $x_j$  par  $e^{2i\pi\theta_j t}$  décale le spectre de  $x$  de  $\theta_j$ . Comme nous travaillons en réel on multipliera en pratique par la fenêtre cosinusoidale  $\cos 2\pi\theta_j t$  ce qui fait que ce nouveau signal a pour transformée de Fourier  $\frac{1}{2}(\hat{x}_j(u + \theta_j) + \hat{x}_j(u - \theta_j))$  dont le support est  $I_j = ([-u_c, u_c] - \theta_j) \cup ([-u_c, u_c] + \theta_j)$ .

Soit alors le signal

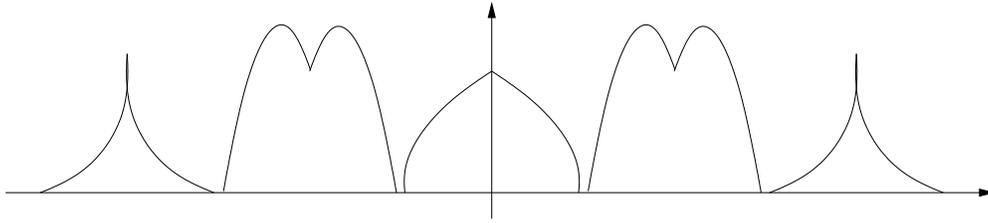
$$z(t) = \sum_{j \in J} \cos(2\pi\theta_j t) x_j(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les spectres des  $J$  sont à supports disjoints si l'on choisit  $\theta_j = j\theta_1, \theta_1 > u_c$ , et dans ce cas la connaissance de  $z$  permet de reconstituer les  $J$  signaux : pour retrouver  $x_j$ , il suffit, théoriquement, de multiplier la transformée de Fourier de  $z$  par l'indicateur de  $I_j$  puis de faire une transformée de Fourier inverse.

Voici un exemple de la mesure spectrale de trois signaux

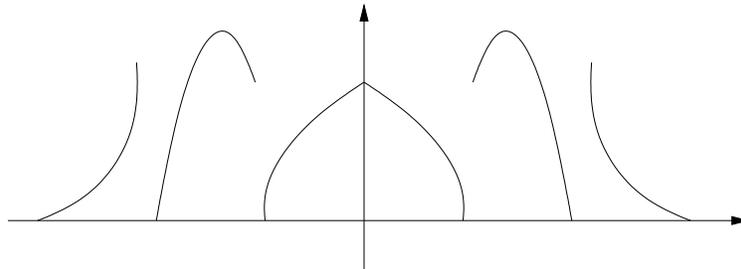


et la mesure spectrale du signal  $z$  fabriqué



Pour transmettre  $J$  signaux, il est nécessaire que  $(2J - 1)u_c < F$ .

Une méthode plus économique (« bande latérale unique ») mais plus compliquée à mettre en œuvre est de fabriquer le  $z$  de transformée de Fourier suivante :



Et la condition est maintenant  $Ju_c < F$ .

## VI.6 Exercices

**Exercice VI.6.1** Montrer directement les relations d'orthogonalité (Cas  $F = \frac{1}{2}$ ) :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \frac{\sin \pi(t-n')}{\pi(t-n')} dt = \frac{(-1)^{n+n'}}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\sin \pi t)^2}{(t-n)(t-n')} dt = \delta_{n,n'}.$$

**Exercice VI.6.2** Échantillonnage du signal périodique  $e_r(t) = \cos(2\pi r t)$ .

Soit  $\Delta$  le pas d'échantillonnage. Montrer que les signaux  $e_r$  et  $e_{r'}$  ont le même échantillonnage, si  $r\Delta - r'\Delta \in \mathbb{Z}$  (phénomène d'aliasing).

Exemple :  $\cos(2\pi t)$  et  $\cos(2\pi 5t)$ , pour  $\Delta = \frac{1}{6}$ .

**Exercice VI.6.3**

1. a) Calculer les deux premières dérivées au sens de distributions de  $\varphi(u) = (1 - |u|)_+$ .
- b) En déduire sans calcul la transformée de Fourier de la fonction  $\varphi$ .
- c) En déduire sans calcul la transformée de Fourier de la fonction  $f$  définie par  $f(t) = \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)^2$ .
2. a) Montrer que le théorème d'échantillonnage de Shannon s'applique à la fonction  $f$ .
- b) On note  $h$  le pas d'échantillonnage. Quelle inégalité doit vérifier  $h$  pour que la formule de reconstruction de  $f$  à partir des valeurs discrétisées  $(f(nh))_{n \in \mathbb{Z}}$  soit exacte.
- c) Ecrire cette formule dans le cas  $h = \frac{1}{2}$ .
3. En déduire une représentation de la fonction  $\frac{tg(\pi t)}{\pi t^2}$  comme la somme d'une série de la forme  $\sum_n \frac{c_n}{t-n}$ .

**Exercice VI.6.4**

1. Montrer la relation :  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(\sin \pi t)^2}{\pi^2(t+n)^2} = 1$ . (On pourra appliquer la formule de Poisson (IV.11)).

2. Soit  $F$  un réel  $> 0$ . A l'aide de la formule précédente et de la formule d'échantillonnage (cf. *théorème de Shannon*), montrer que, si  $f$  est une fonction (que l'on peut supposer continue) dans  $L^2(\mathbb{R})$ , dont la transformée de Fourier est à support dans l'intervalle  $[-F, F]$ , on a la majoration :

$$|f(t)| \leq \sqrt{2F} \|f\|_2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. Donner une autre preuve de cette majoration, à l'aide de la formule de Plancherel.

**Exercice VI.6.5** Soient  $\lambda$  et  $T$  deux nombres réels, avec  $T > 0$ . On note  $\varphi$  la fonction  $t \rightarrow \varphi(t) = e^{2\pi i \lambda t}$  et  $g$  la fonction périodique, de période  $T$ , qui coïncide avec  $\varphi$  sur l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ .

- Calculer le développement en série de Fourier,  $\sum_n c_n(g) e^{2\pi i n \frac{t}{T}}$ , de la fonction  $T$ -périodique  $g$ .
- Justifier la convergence, en tout point de l'intervalle ouvert  $]-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}[$ , de ce développement :

$$\lim_N \sum_{-N}^N c_n(g) e^{2\pi i n \frac{t}{T}} = g(t)$$

- En permutant les rôles de  $t$  et de  $\lambda$ , en déduire la validité d'une formule analogue à la formule d'échantillonnage de Shannon, pour toute fonction de la forme  $f(t) = \sum_{k=1}^L \alpha_k e^{2\pi i \lambda_k t}$ , où  $(\lambda_k, k = 1, \dots, L)$  est une famille finie de réels et les  $\alpha_k, k = 1, \dots, L$ , sont des coefficients complexes.
- Ce résultat est-il conforme à la règle du choix du pas d'échantillonnage? (On précisera la mesure spectrale de  $f$ .)

**Exercice VI.6.6**

1. Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant les conditions :

$$f \text{ est positive, intégrable, et pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) = 1. \tag{VI.6}$$

- Montrer que  $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$ .
- Montrer que pour toute fonction  $g$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  et tout  $t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (g * f)(t+n) = \int g(s) ds.$$

- Montrer que, si  $f$  vérifie (VI.6), il en est de même des fonctions obtenues en convolant  $f$   $p$ -fois par elle-même.

Donner des exemples de fonctions vérifiant (VI.6).

2. Caractériser à l'aide de leur transformée de Fourier, les fonctions  $f$  intégrables telles que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) = 1, \text{ pour presque tout } t \in \mathbb{R}.$$

# VII

---

## FILTRAGE DES SIGNAUX À TEMPS DISCRET

---

---

Le développement technologique a donné une importance considérable au traitement numérique des signaux. Alors que les méthodes analogiques permettent de traiter des signaux à temps réel, les méthodes numériques ne peuvent être appliquées qu'à des signaux préalablement échantillonnés. Cet inconvénient est compensé par la puissance des méthodes algorithmiques paramétrisables et leur souplesse d'utilisation.

### VII.1 Espaces de signaux à temps discret

**Quelques espaces de signaux à temps discret.**

$(\ell^1(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_1)$  : Signaux sommables.  $\|x\|_1 = \sum_n |x(n)|$ .

$(\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2)$  : Signaux d'énergie finie.  $\|x\|_2^2 = \sum_n |x(n)|^2$ .

$(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_\infty)$  : Signaux bornés.  $\|x\|_\infty = \sup_n |x(n)|$ .

$\mathcal{D}(\mathbb{Z})$  : Signaux à support fini.  $\sum 1_{x(n) \neq 0} < \infty$ .

On a

$$\mathcal{D}(\mathbb{Z}) \subset \ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^2(\mathbb{Z}) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$$

et les deux premières inclusions sont denses au sens que chaque espace est dense dans le suivant. En revanche la fermeture de  $\ell^2(\mathbb{Z})$  dans  $\ell^\infty(\mathbb{Z})$  est  $\ell_0^\infty(\mathbb{Z})$  (signaux qui tendent vers 0).

**Analyse de Fourier des signaux à temps discret.** Si le signal  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , on peut définir sa transformée de Fourier discrète comme l'analogue discret de la transformée de Fourier d'une fonction intégrable :

$$(\mathcal{F}x)(u) = \hat{x}(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-2\pi i n u}. \quad (\text{VII.1})$$

C'est une fonction continue périodique, que l'on peut donc considérer comme un élément de l'espace  $C(\mathbb{T})$  des fonctions continues sur le cercle. On établit sans difficulté que l'application  $x \rightarrow \hat{x}$  définit un homomorphisme continu de l'algèbre  $(\ell^1(\mathbb{Z}), *, \|\cdot\|_1)$ , dans l'algèbre  $(C(\mathbb{T}), \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ . En particulier, notons l'inégalité

$$\|\mathcal{F}x\|_\infty = \sup_u |\mathcal{F}x(u)| \leq \sum_n |x(n)| = \|x\|_1.$$

Une situation plus générale est celle où le signal est d'«énergie» finie :  $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ; la série définie par (VII.1) est alors convergente au sens de la norme  $\|\cdot\|_2$  sur  $L^2(\mathbb{T})$  et

$$\int_{-1/2}^{1/2} \hat{x}(u) e^{2\pi i n u} du = x(n).$$

On a donc ainsi représenté  $x(n)$  comme l'échantillonné d'un signal à bande limitée. La fonction  $\hat{x}$  périodique sur  $\mathbb{R}$  est également la transformée de Fourier au sens des distributions du peigne de Dirac pondéré  $\sum_n x(n)\delta_n$ .

Rappelons l'égalité de Parseval, qui est l'analogue discret de la formule de Plancherel et qui exprime l'égalité de l'énergie du signal calculée en temps ou en fréquence :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 = \int_0^1 |\hat{x}(u)|^2 du.$$

**Notion de mesure spectrale.** Comme dans le cas du temps continu, on peut définir la mesure spectrale  $\mu_x$  d'un signal ( $x = (x(n), n \in \mathbb{Z})$ ) à temps discret. C'est, si elle existe, la mesure finie sur le cercle dont  $(x(n))$  est la suite des coefficients de Fourier. La relation entre  $x$  et  $\mu_x$  est donc :

$$x(n) = \int_0^1 e^{2\pi i n u} d\mu_x(u). \tag{VII.2}$$

Dans le cas où  $\mu_x$  a une densité la suite  $x(n)$  est la suite des coefficients de Fourier de cette densité (au changement près de  $n$  en  $-n$ ). Si elle existe, cette mesure est unique en vertu de la proposition suivante :

**PROPOSITION VII.1.** *Si deux mesures finies sur le cercle ont la même suite de coefficients de Fourier, elles sont égales.*

*Démonstration:* Si deux mesures finies ont les mêmes coefficients de Fourier, d'après la densité en norme uniforme des polynômes trigonométriques, ces mesures coïncident sur les fonctions continues périodiques. ■

## VII.2 Filtrage des signaux à temps discret

### VII.2.1 Linéarité et invariance par translation dans le temps

Un filtre linéaire général est une transformation linéaire sur les signaux. Afin d'éviter une définition trop restrictive, on supposera cette transformation définie sur  $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ . On définit l'opérateur de translation par :

$$(Tx)(n) = x(n+1), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Notons que  $T$  est une bijection et que  $(T^k x)(n) = x(n+k)$ . On dira que la transformation  $F$  définit un filtrage si  $F$  est une *application linéaire* définie sur  $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$  vérifiant la condition d'*invariance par translation* suivante :

$$FT = TF.$$

On emploie souvent le terme de «filtre» pour dire «filtre linéaire invariant dans le temps».

Montrons que les contraintes imposées au filtre  $F$  permettent de l'identifier à un opérateur de convolution.

**THÉORÈME VII.2.** *Un filtre  $F$  s'identifie à la convolution par une suite de coefficients  $h = (h_n, n \in \mathbb{Z})$ . La suite  $h$  est appelée **réponse impulsionnelle** du filtre.*

*Démonstration:* Pour  $x \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ , on peut exprimer  $x$  sous la forme  $x = \sum x_n \delta_n$ . En exploitant la linéarité du filtre et la relation  $\delta_n = T^{-n} \delta_0$  il vient

$$Fx = \sum x_n F\delta_n = \sum x_n T^{-n} F\delta_0$$

d'où

$$(Fx)_k = \sum_n x_n (T^{-n} F\delta_0)(k) = \sum_n x_n (F\delta_0)(k-n)$$

$Fx$  est donc la convolée de  $x$  avec la suite de coefficients  $h_k = (F\delta_0)(k)$ . ■

Par exemple le filtre  $x \mapsto (\sum_k x_n e^{-|n+k|})_{n \in \mathbb{Z}}$  n'est pas invariant dans le temps car il ne s'agit pas d'une convolution.

DÉFINITION VII.3. Un filtre de coefficients  $h = (h_k, k \in \mathbb{Z})$  est dit **causal** si ses coefficients d'indice négatif sont nuls.

Un filtre est dit **stable** ou plus précisément **BIBO-stable** (Bounded Input Bounded Output) si  $h \in \ell_1(\mathbb{Z})$

Un filtre est dit « à réponse impulsionnelle finie » ou **FIR** (Finite Impulse Response) si  $h \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$

La causalité signifie que  $(Fx)(n)$  ne dépend que des  $x_k$  pour  $k \leq n$ . La convolution de deux filtres causaux est causale. De plus si  $x_k = 0$  pour  $k \leq n_0$  alors  $h * x$  possède la même propriété.

Concernant la deuxième définition, notons que si  $\sum_n |h_n| = \infty$ , le filtre enverrait la suite  $h_n/|h_n|$  sur une suite infinie en 0 et éventuellement non définie ailleurs ; la condition  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  est donc clairement nécessaire. Réciproquement, si  $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$  on a pour tout  $x \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$

$$\sup_n |(h * x)_n| = \sup_n \left| \sum_k h_k x_{n-k} \right| \leq \sup_{n,k} |h_k x_{n-k}| \leq \sup_n \sum_k |h_k| |x_{n-k}| = \|x_n\|_\infty \sum_k |h_k|.$$

On montre également facilement que le filtre envoie donc continuellement  $\ell^p(\mathbb{Z})$  dans lui-même. On ne considèrera que des filtres BIBO-stables.

## VII.2.2 Transformée en $z$

DÉFINITION VII.4. On appelle **transformée en  $z$**  d'une suite  $(x_n)$  la fonction  $\mathcal{Z}(x) = X$  formellement définie

$$X(z) = \sum_k x_k z^{-k}. \quad (\text{VII.3})$$

La **fonction de transfert d'un filtre  $h$**  est sa transformée en  $z$

$$H(z) = \sum_k h_k z^{-k}. \quad (\text{VII.4})$$

On s'intéressera essentiellement au cas où  $x, h \in \ell^1(\mathbb{Z})$ , situation où  $X(z)$  et  $H(z)$  sont définies au moins ponctuellement sur le cercle. La fonction  $X(z)$  restreinte au cercle unité coïncide avec le spectre :

$$X(e^{2\pi i u}) = \sum_k x_k e^{-2\pi i k u} = \widehat{x}(u).$$

et l'expression de  $x_n$  devient une intégrale de contour prise sur le cercle unité

$$x_n = \int e^{2\pi i u} X(e^{2\pi i u}) du = \oint X(z) \frac{dz}{2i\pi z}.$$

On a également pour deux signaux de  $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$\sum_n x_n y_n = \int X(e^{2\pi i u}) Y(e^{-2\pi i u}) du = \oint X(z) Y(z^{-1}) \frac{dz}{2i\pi z}$$

Elle est ponctuellement définie sur le domaine  $\{z \in \mathbb{C} : \sum_n |h_n| |z|^{-n} < \infty\}$  qui contient au moins le cercle unité si le filtre est stable, l'extérieur strict de ce cercle si  $h$  est causal, et tout le plan si  $h$  est FIR.

La fonction  $H(z)$  s'écrit formellement comme une série de Laurent, c'est-à-dire la somme d'une série entière en  $z$  et d'une série entière en  $z^{-1}$ . Soit  $R_1$  le rayon de convergence de la série  $S_1(z) = \sum_{k>0} z^k h_{-k}$  et  $R_2$

celui de la série  $S_2(z) = \sum_{k \geq 0} z^k h_k$ . Le domaine de convergence de la série de Laurent  $H(z) = S_1(z) + S_2(z^{-1})$  est donc la couronne  $\{R_2^{-1} < |z| < R_1\}$ .

La transformée en  $z$  transforme le produit de convolution en produit au sens ordinaire :

$$\mathcal{Z}(h * x)(z) = H(z)X(z).$$

Cette formule étant valide si par exemple  $h$  est stable et  $x \in \ell^1(\mathbb{Z})$ . De même, la fonction de transfert de deux filtres mis en **série** ( $x \rightarrow h * (g * x)$ ) est le produit de leur fonction de transfert. Ceci se généralise au cas où  $x$  admet une mesure spectrale :

**THÉORÈME VII.5.** *L'action en fréquence d'un filtre stable  $h = (h_k) \in \ell^1(\mathbb{Z})$  est la multiplication de la mesure spectrale de l'entrée par  $\widehat{h}(u) = H(e^{2\pi i u})$ . (Si  $\mu$  est la mesure spectrale de l'entrée, la mesure spectrale de la sortie est  $H\mu$ ).*

La fonction  $|\widehat{h}(u)|$  est appelée *gain en fréquence du filtre*.

*Démonstration:* Soit  $x_n =$  l'entrée. La sortie  $y$  est donnée par (on utilise de théorème de Fubini)

$$y_n = \sum_k h_k x_{n-k} = \sum_k h_k \int_0^1 e^{2\pi i(n-k)u} \mu(du) = \int_0^1 e^{2\pi i n u} H(e^{2\pi i u}) \mu(du). \quad \blacksquare$$

### VII.2.3 Les filtres rationnels

Un filtre rationnel est un filtre causal  $x \rightarrow y = h * x$ , pour lequel la sortie  $y$  est reliée à l'entrée  $x$  par une relation de récurrence de la forme :

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_p y(n-p) = b_0 x(n) + \dots + b_q x(n-q). \quad (\text{VII.5})$$

On suppose  $a_0 \neq 0$ . Les coefficients  $a_k$  et  $b_k$  sont des constantes réelles ou complexes et  $p$  et  $q$  sont des entiers  $\geq 0$ . On peut, en prenant  $p$  minimal, supposer que  $a_p$  est non nul.

La relation (VII.5) et l'hypothèse de causalité donne une définition implicite du filtre pour  $x \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ . En effet, soit  $n_0$  tel que  $x_k = 0$  pour  $k \leq n_0$ , la causalité implique que  $y_k = 0$  pour  $k \leq n_0$ , et la formule (VII.5) appliquée à  $n = n_0 + 1$  permet de calculer  $y_{n_0+1}$ , puis ensuite  $y_{n_0+2}, \dots$ . En prenant  $x = \delta_0$  on obtient  $y = h$ , qui est donc défini de manière unique à partir de la relation (VII.5) et de la condition de causalité. La relation (VII.5) se réécrit

$$a * y = b * x$$

ou encore en prenant  $x = \delta_0$

$$a * h = b$$

Comme  $h_n$  croît au plus géométriquement,  $H(z)$  est défini pour  $|z|$  assez grand et l'on a

$$A(z)H(z) = B(z).$$

On a donc pour  $|z|$  assez grand et l'on a

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}}.$$

On fera dans la suite l'hypothèse que la fraction est irréductible. L'intérêt pratique de la classe des filtres rationnels est que :

- elle est assez large, puisque leurs fonctions de transfert, fractions rationnelles, permettent d'approcher en un sens convenable des fonctions de transfert relativement arbitraires
- on sait réaliser ces filtres simplement en pratique

- contrairement aux filtres FIR, les filtres rationnels ont à la fois des zéros et des pôles, ce qui est important du point de vue de la modélisation. En particulier
  - Si un point  $z$  du cercle unité est proche d'un zéro, cela «implique» que  $H(z)$  est petit et donc que la convolution par  $h$  atténue la fréquence correspondante (et les voisines)
  - Au voisinage d'un pôle, c'est l'inverse : il y a amplification des fréquences.

Rappelons la forme générale de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle  $K(z)$  :

$$K(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{P_0(z)}{Q(z)} = S(z) + \sum_k \sum_{j=1}^{l_k} \frac{\alpha_{k,j}}{(z - c_k)^j},$$

$S, P_0, Q$  étant des polynômes, avec  $\deg P_0 < \deg Q$ . Le polynôme  $S$  s'obtient par division euclidienne de  $P$  par  $Q$  :  $P = QS + P_0$ . Les  $c_k$  sont les pôles de  $K$ , leur multiplicité est  $l_k$ , et les  $\alpha_{k,j}$  des constantes réelles ou complexes.

Par linéarité et décomposition en élément simples (de  $K(z) = H(z^{-1})$ ), on peut donc se ramener aux cas particuliers suivants :

$$H(z) = z^{-s}, \frac{1}{1 - cz^{-1}}, \frac{1}{(1 - cz^{-1})^s}, \quad \text{avec } s \text{ entier } > 1.$$

Étudions ces trois cas :

*Retard pur.* Le premier cas correspond simplement à l'opérateur de retard  $x_n \rightarrow y_n = x_{n-s}$ .

*Pôle simple.* La fraction  $\frac{1}{1 - cz^{-1}}$  correspond à l'équation de récurrence  $y(n) - cy(n-1) = x(n)$ , soit

$$y(n) = x(n) + cy(n-1).$$

En itérant la relation, on obtient :

$$y(n) = \sum_0^p c^k x(n-k) + c^{p+1} y(n-p).$$

Si  $x \in \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ , on sait que  $y_k = 0$  pour  $k$  assez petit et on a donc :

$$y(n) = \sum_0^{+\infty} c^k x(n-k). \tag{VII.6}$$

D'où les coefficients du filtre

$$h_n = 1_{n \geq 0} c^n.$$

$h$  est BIBO-stable si et seulement si  $|c| < 1$ , c.-à-d. si le pôle est intérieur au cercle unité.

*Pôle multiple.* Si  $h$  a pour transformée en  $z$  la fraction  $\frac{1}{1 - cz^{-1}}$ , le produit de convolution  $s$ -fois par lui-même de  $h$  admet la fraction  $(1 - cz^{-1})^{-s}$  pour transformée en  $z$ . Cette convolution est bien définie si  $h$  est causal.

Pour un élément de la forme  $(1 - cz^{-1})^{-s}$ , on obtient donc un filtre causal solution en convolant  $s$  fois le filtre précédent. Il sera toujours stable car  $\ell^1$  est une algèbre de convolution. On obtient simplement les coefficients en dérivant  $s$  fois en  $z$  la relation  $(1 - cz)^{-1} = \sum c^k z^k$

**Filtres rationnels stables.** On en déduit (mais nous ne l'avons pas tout-à-fait montré) le résultat suivant

**THÉORÈME VII.6.** *Le filtre causal solution de (VII.5) est stable si, et seulement si, les pôles  $c_k$  de la fonction de transfert sont situés à l'intérieur du disque unité ( $|c_k| < 1$ ).*

**Détermination pratique des coefficients à partir de  $H(z)$ .** On a vu la méthode de décomposition en éléments simple. On peut aussi noter que si  $H(z)$  est analytique sur une couronne contenant le cercle unité

$$h_k = \oint H(z) z^k \frac{dz}{2i\pi z} = \sum \text{Res}(H(z) z^{k-1})$$

intégrale qui peut se calculer par la méthode des résidus. En particulier si  $h$  est causal et  $H$  n'a que des pôles simples  $z_j$

$$h_k = \sum_j \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j) H(z) z^{k-1}, \quad k > 0.$$

Cette formule reste valide pour  $k = 0$  si  $H$  n'a pas de pôle en 0, sinon un pôle double apparaît. Notons que  $h_0$  se trouve grâce à la formule

$$h_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z)$$

valide pour un filtre causal. En particulier si  $H(z) = B(z)/A(z)$  pour deux polynômes et si  $A$  n'a que des racines simples  $z_1, \dots, z_J$ , toutes à l'intérieur du cercle unité

$$h_k = \sum_j \frac{B(z_j)}{A'(z_j)} z_j^{k-1}$$

**Synthèse de filtre.** Le but de la synthèse de filtre est de réaliser des filtres dont la réponse en fréquence  $|H(z)|$  est donnée afin d'amplifier certaines fréquences et d'en atténuer d'autres, par exemple pour se concentrer sur une certaine bande de fréquences, ou encore pour annuler tout ce qui dépasse une certaine fréquence avant d'échantillonner.

Selon les applications, pour des raisons technologiques, on cherchera un filtre rationnel ou l'on préférera se restreindre à un filtre FIR (pour pouvoir travailler sur des blocs de signal : le filtre rationnel oblige à travailler en continu sur le signal)

On cherche donc une fraction rationnelle ou un polynôme telle que  $|H(z)|$  est proche d'un certain gabarit donné à l'avance pour  $|z| = 1$ . Il s'agit d'un problème mathématique désormais bien rôdé.

**Inversion.** Une conséquence du théorème précédent est que si  $h$  de transformée en  $z$  rationnelle  $H(z) = B(z)/A(z)$  est causal stable et que ses pôles et ses zéros sont intérieurs au cercle, alors, son inverse est donné par  $K(z) = 1/H(z) = A(z)/B(z)$ . Ceci se généralise à de nombreux filtres non-rationnels.

## VII.3 Applications

### VII.3.1 Échantillonnage. Conversion analogique/numérique

Pour éviter le repliement spectral lors de l'échantillonnage précédant la transmission d'un signal (cf page 68), la bande utile d'un signal analogique doit être ramenée à  $[-1/2T, 1/2T]$  avec échantillonnage à période  $< T$ , l'élimination de hautes fréquences ayant un effet bien meilleur que leur reproduction artificielle en basse fréquence (aliasing). Ceci sera fait par filtrage.

De même la sélection des signaux spécifiques à partir du signal multiplexé (cf § VI.5) se faire par filtrage.

### VII.3.2 Fenêtres

Cette question a déjà été abordée au § IV.5 dans le cadre du signal continu. La problématique est ici la même. Si l'on isole une portion du signal  $x$  pour l'étudier, c'est-à-dire que l'on considère désormais le signal  $y_n = x_n 1_{|n| \leq N}$ , le problème suivant apparaît : la transformée de Fourier de  $y$  est

$$\widehat{y}(u) = (\widehat{h} * \widehat{x})(u), \quad h(n) = 1_{|n| \leq N}.$$

La troncature détériore le spectre. L'idéal serait d'avoir  $\widehat{h}$  proche de la masse de Dirac en 0, de sorte que la convolution fût sans effet. Afin d'approcher ce but, la pratique consiste à fenêtrer le signal, c'est-à-dire choisir  $y_n = w_n x_n$  où  $w_n$  est une suite à support compact dont la transformée de Fourier forme un pic aigu en 0.

**Fenêtre rectangulaire.** L'exemple le plus simple est celui d'une fenêtre rectangulaire  $R_N$  définie, pour un entier  $N \geq 1$ , par

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } |k| \leq N, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est l'exemple de l'introduction. La «transformée de Fourier» de  $R_N$  est le noyau de Dirichlet  $D_N$  d'ordre  $N$  défini par

$$\widehat{R}_N(u) = \sum_{k=-N}^N e^{2\pi i k u} = \frac{\sin(2N+1)\pi u}{\sin \pi u}.$$

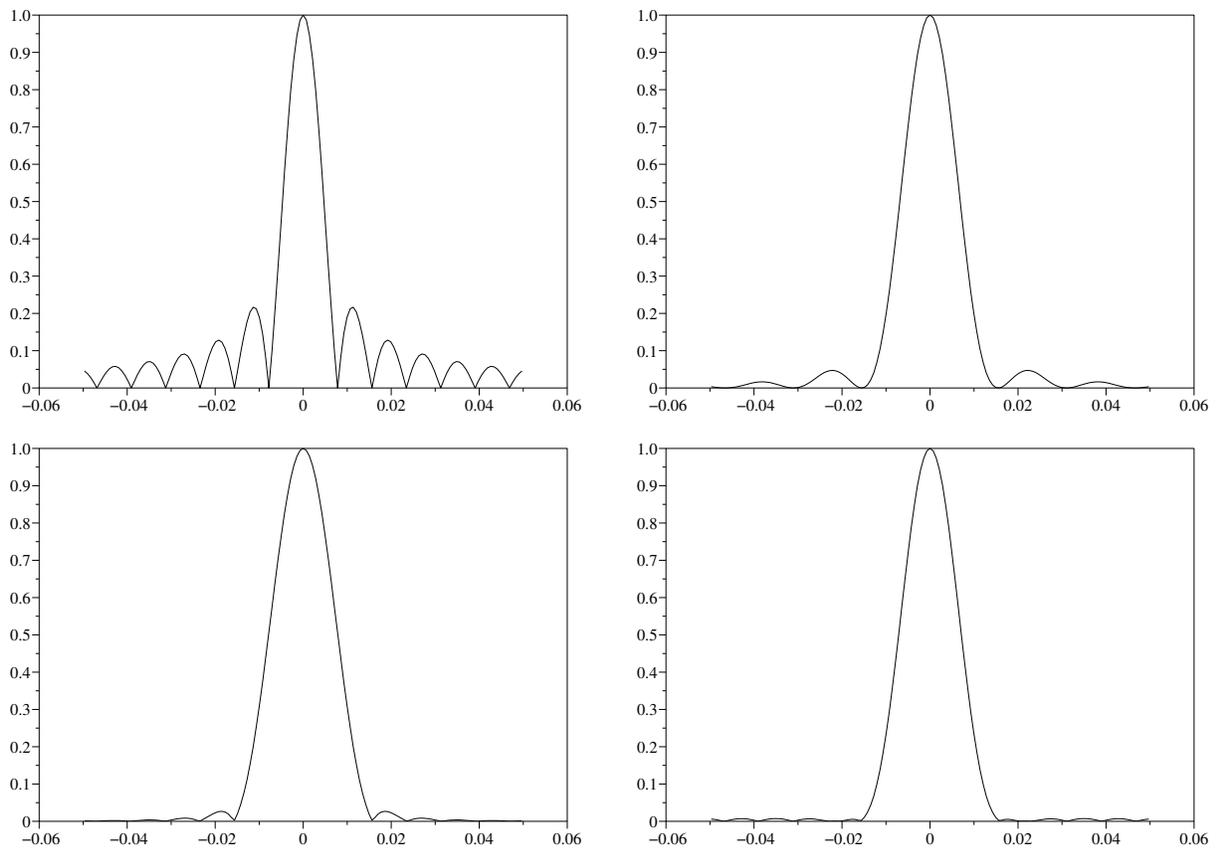


FIGURE VII.1 – Module (normalisé à 1 en 0) du spectre des fenêtres : rectangulaire, triangulaire, de Hann, de Hamming.  $N = 64$ .

**Fenêtre triangulaire.** Il s'agit de la convolution d'une fenêtre rectangulaire  $R_{N/2}$  par elle-même. Elle correspond au noyau de Fejer d'ordre  $N + 1$  et est donnée par :

$$T_N(k) = \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right)_+, \quad (\text{nul si } |k| > N).$$

Sa transformée de Fourier est

$$W_N(u) = \widehat{T}_N(u) = \frac{1}{N+1} \left( \frac{\sin(N+1)\pi u}{\sin \pi u} \right)^2.$$

**Fenêtres de Hamming et de Hann.** On introduit un paramètre  $\alpha$  et on pose :

$$H_\alpha(k) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(\pi \frac{2k}{2N+1}), & \text{pour } |k| \leq N, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fenêtre de Hamming correspond au choix :  $\alpha = 0.54$ . Pour  $\alpha = 0.5$ , on obtient la fenêtre de Hann. La transformée de Fourier de la fenêtre  $H_\alpha$  est, pour  $N$  impair :

$$\widehat{H}_\alpha(u) = \alpha \widehat{R}_N(u) + \frac{1-\alpha}{2} \alpha \widehat{R}_N(u - \frac{1}{2N+1}) + \frac{1+\alpha}{2} \alpha \widehat{R}_N(u + \frac{1}{2N+1}).$$

### VII.3.3 Le filtrage en débruitage.

Considérons un signal  $x = y + z$  formé de la somme d'un signal «utile»  $y$  et d'un bruit  $z$  que l'on cherche à éliminer ou tout au moins à atténuer.

Si le signal  $x$  est suffisamment régulier, son spectre est concentré dans les basses fréquences, alors que le bruit a un spectre couvrant une large bande de fréquences. Si l'on considère que le bruit est dû, pour une fraction importante, à la contribution des fréquences hautes, un filtre passe-bas appliqué au signal  $x$  a donc pour effet d'éliminer une partie du bruit.

## VII.4 Exercices

**Exercice VII.4.1** Montrer que toutes les solutions de

$$(c\delta_1 - \delta_0) * h = \delta_0$$

soit

$$(cz^{-1} - 1)H(z) = 1$$

sont de la forme :  $h_j = bc^j$ , pour  $j \geq 0$ ,  $= (1+b)c^j$ , pour  $j < 0$ , où  $b$  est une constante.

Parmi ces solutions, il y a une solution causale ( $b = -1$ ) et une solution «anti-causale» ( $b = 0$ ). Si  $|c| > 1$  la solution causale est bornée. Si  $|c| < 1$ , c'est la solution anti-causale qui est bornée.

**Exercice VII.4.2** Soit un filtre  $h$  associé à la suite de coefficients  $h = (h_k) \in \ell_1(\mathbb{Z})$ . Soit  $z$  un nombre complexe de module 1 et le signal  $x(n) = z^n$ . Vérifier que  $x$  est vecteur propre de du filtre associé à  $h$  (l'application  $x \mapsto h * x$ ) avec la valeur propre  $H(z)$ .

**Exercice VII.4.3** Calculer deux filtres causaux de transformée en  $z$  égale à

$$H(z) = \exp(z^{-1})(1 + z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}.$$

**Exercice VII.4.4** Soit  $\lambda$  un paramètre complexe. On considère la relation de récurrence

$$y_n - \lambda y_{n-1} = x_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{VII.7})$$

(On note que  $(y_n)$  est bien défini si  $(x_n)$  est causal).

1. Pour un filtre causal associé à (VII.7), calculer le signal en sortie, si l'entrée est la fonction échelon discrète  $x_n = 1$ , pour  $n \geq 0$ ,  $= 0$ , pour  $n < 0$ .
2. Montrer que cette sortie est bornée si et seulement si  $|\lambda| \leq 1$  et  $\lambda \neq 1$ .

**Exercice VII.4.5** Etant donné une suite  $h = (h_k, k \in \mathbb{Z})$ , on note  $F_h$  le filtre associé, défini par

$$F_h : x. \mapsto y. = \sum_k h_k x_{-k}$$

et  $\hat{h}$  son spectre :  $\hat{h}(u) = \sum_k h_k e^{-2i\pi k u}$ . Etant donné un filtre  $F_h$  stable ( $\sum_n |h_n| < \infty$ ), on cherche un filtre  $F_g$  qui inverse  $F_h$ , c'est-à-dire tel que filtre composé  $F_g F_h(x) = F_g(F_h(x))$  soit l'identité.

1. Calculer formellement le spectre de  $F_g$  à partir de celle de  $F_h$ .
2. Donner des conditions sur la fonction  $\hat{h}(u)$  qui assurent que le filtre inverse  $F_g$  soit stable.
3. Peut-on inverser un filtre ayant un nombre fini de coefficients non nuls par un filtre ayant la même propriété?

**Exercice VII.4.6** On considère la relation de récurrence

$$y_n - a y_{n-1} - b y_{n-2} = x_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{VII.8})$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles. Soit  $A$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit  $h$  un filtre causal qui transforme une entrée  $(x_n)$  en une sortie  $(y_n)$  vérifiant (VII.8).
  - a) Quelle est la transformée en  $z$ ,  $H(z)$ , de  $h$  et la relation entre les pôles de  $H$  et les valeurs propres de  $A$ ?
  - b) Sous quelle condition sur  $A$ , le filtre  $h$  est-il stable?
2. On définit deux suites de vecteurs  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  en posant, pour  $n \in \mathbb{Z}$  :

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Exprimer la relation de récurrence (VII.8) sous la forme d'une relation de récurrence vectorielle faisant intervenir  $A$ ,  $Y_n$ ,  $X_n$  et  $Y_{n-1}$ .
- b) Soit  $p > 0$ , exprimer  $Y_n$  comme fonction de  $X_n, X_{n-1}, \dots, X_{n-p}$  et  $Y_{n-p-1}$ .
- c) Montrer à nouveau que le filtre est stable si les valeurs propres de  $A$  sont de module  $< 1$ .



# VIII

---

## FILTRAGE EN TEMPS CONTINU. APPLICATIONS À LA COMMANDE

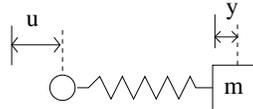
---

---

### VIII.1 Notions de base : système, entrée, sortie, régulateur

#### VIII.1.1 Systèmes linéaires entrée/sortie causaux. Filtres

**Exemple 1 : système masse/ressort.** Considérons un système mécanique formé de d'un mobile et une poignée reliés par un ressort de coefficient  $k$ . Leur position respective est repérée au temps  $t$  par leur abscisse  $u(t)$  et  $y(t)$ , relative à la position au repos.



Le mouvement du premier mobile est imposé ; c'est l'entrée  $u(t)$  du système. Il en résulte pour le second un mouvement  $y(t)$  (la sortie du système) dû à la force du ressort et au frottement de coefficient  $\alpha$ . On note  $m$  la masse du second mobile

La force exercée par le ressort est  $-k(y(t) - u(t))$ . Le frottement crée une force proportionnelle à la vitesse. L'équation de la mécanique s'écrit

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = ku.$$

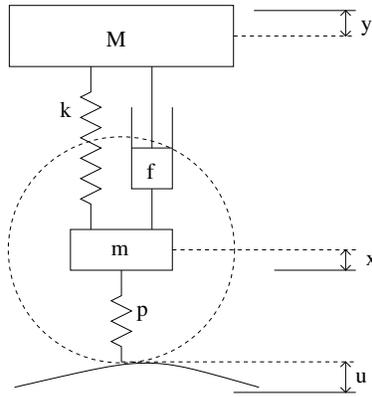
**Exemple 2 : Moteur à courant continu.** Si  $\omega$  est la vitesse angulaire du moteur et  $u$  la tension aux bornes, on a l'équation

$$\ddot{\omega} + a\dot{\omega} + b\omega = cu$$

pour trois constantes  $a$ ,  $b$ , et  $c$  dépendant des caractéristiques du moteur.

**Exemple 3 : Suspension.** On modélise une roue de véhicule. On a les paramètres

- $M$  : masse du véhicule divisé par 4
- $m$  : masse de la roue
- $k$  : raideur du ressort de suspension
- $f$  : coefficient de frottement visqueux de la suspension
- $p$  : raideur du ressort modélisant le pneu
- $u$  : profil de la route
- $x, y$  : position verticale de la roue et du châssis, relatives à la position à l'équilibre.



On a les équations (la roue ne supporte qu'un quart de la masse du véhicule)

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -k(y - x) - f(\dot{y} - \dot{x}) \\ m\ddot{x} &= -p(x - u) + k(y - x) + f(\dot{y} - \dot{x}) \end{aligned}$$

**Définition des systèmes linéaires causaux.** Un filtre est donc en toute généralité une application linéaire continue qui à une fonction  $u(t)$  associe une fonction  $y(t)$ ; il faut préciser les espaces de fonctions que l'on considère. On supposera que l'espace de départ contient toutes les fonctions de  $\mathcal{D}$  et que ces dernières y sont denses pour la norme considérée.

Il est **invariant dans le temps** s'il commute avec les translations (on suppose les espaces invariants par translation) :

$$AT_\tau u = T_\tau Au, \quad T_\tau f(x) = f(x - \tau).$$

Un système est dit **causal** si  $u(t) = 0$  pour  $t \leq 0$  implique  $y(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ .

Un système est dit **stable** (ou BIBO-stable) s'il existe une constante  $c$  telle que  $\|Au\|_\infty \leq c\|u\|_\infty$  pour toute fonction bornée de l'espace de départ.

On verra que dans les exemples précédents on a bien défini une telle application. Si l'on s'intéresse au système à partir de  $t = 0$ , on convient que  $u$  est nulle pour  $t < 0$  et que les conditions initiales pour  $y$  et ses dérivées sont également nulles.

On ne considèrera dans la suite que des systèmes où l'entrée comme la sortie est scalaire.

Dans la suite rencontrera essentiellement des filtres (causaux) définis explicitement par

$$y(t) = \int_0^\infty u(t-s)h(s)ds \tag{VIII.1}$$

où  $h$  est une fonction de  $L_1$  ce qui fait que ces filtres sont stables, ou encore

$$y(t) = \sum \alpha_i u(t-s_i) + \int_0^\infty u(t-s)h(s)ds \tag{VIII.2}$$

(on peut considérer plus généralement  $\int_0^\infty u(t-s)\mu(ds)$  où  $\mu$  est une mesure de bornée mais nous ne le ferons pas ici) et d'autre part aux filtres pouvant être définis par une équation différentielle

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y}{dt} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u}{dt}, \quad a_n b_m \neq 0, \quad |a_0| + |b_0| \neq 0. \tag{VIII.3}$$

La dernière condition signifie que l'on ne peut pas intégrer trivialement une fois le système.

La suspension a également cette forme à condition d'éliminer  $x$  des équations, ce qui sera fait plus bas.

## VIII.1.2 Transformée de Laplace. Fonction de transfert

**Transformée de Laplace.** Soit  $f(t)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , que l'on considèrera nulle sur  $\mathbb{R}_-$ , on définit sa transformée de Laplace par

$$F(s) = \mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

On demandera que tout  $s > 0$  l'intégrand soit intégrable, ce qui fait que  $F$  est défini sur  $\{Re(s) > 0\}$ . C'est le cas si  $f$  est intégrable ou à croissance polynômiale, et  $F(s)$  est même analytique sur ce domaine; si  $f$  est intégrable  $F$  est même continue sur le demi-plan **fermé** et sa valeur sur l'axe imaginaire n'est autre que la transformée de Fourier de  $f$ , et en particulier la connaissance de  $F(s)$  sur tout intervalle réel permet de retrouver  $f$ .

On a les propriétés qui rappellent celles de la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(-\tau) &= e^{-s\tau} F(s), \quad \tau > 0 \\ \mathcal{L}(f') &= sF(s) - f(0), \quad \text{si } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+ \\ \mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) &= \frac{F(s)}{s} \\ \mathcal{L}(f * g) &= FG \\ \mathcal{L}\left(\frac{t^n}{n!} e^{-at}\right) &= \frac{1}{(s+a)^{n+1}}, \quad a \geq 0, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{VIII.4}$$

Ces formules sont valides si les deux membres sont correctement définis; rappelons que si  $f$  et  $g$  sont à support sur  $\mathbb{R}_+$  alors  $f * g$  aussi. De plus si  $f$  admet une limite en l'infini ou 0 on a respectivement

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \\ f(0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \end{aligned} \tag{VIII.5}$$

On a également la formule d'inversion valide dès que  $F$  s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma} F(s)e^{st} ds$$

où le contour  $\Gamma$  englobe les singularités de  $F$ .

POURQUOI LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE ? La supériorité de la transformée de Laplace est d'être définie pour des fonctions à croissance polynômiale, en particulier pour toutes les fonctions bornées. Si  $f$  admet une transformée de Laplace, alors sa primitive également. L'inconvénient est que la fonction est nulle sur  $\mathbb{R}_-$  ce qui n'est cependant pas très contraignant pour les applications.

NOTE. On ne considère que des fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$ , par exemple la fonction  $u(t) = e^{-t}$  est dérivable, bien que vue comme fonction sur  $\mathbb{R}$  elle ne soit pas dérivable en 0.

Une approche différente, abstraitement plus générale, consiste à définir la transformée de Laplace par  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$  pour  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , ce qui requiert une très forte décroissance de  $f$  en  $-\infty$ . Si  $f$  est régulière on a alors  $\mathcal{L}(f') = s(\mathcal{L}f)(s)$ , ce qui est plus simple que (VIII.4). La fonction  $u$  précédente n'est plus régulière dans ce cadre et la discontinuité en 0 introduit une masse de Dirac dans la dérivée qui cause l'apparition du  $f(0)$  dans la formule (VIII.4). Cette approche, est moins adaptée aux applications : on préfère payer par une légère complication dans certaines formules, l'avantage de pouvoir travailler simplement avec des polynômes (tronqués sur  $\mathbb{R}_-$ ), en particulier avec la fonction constante. L'approche par restriction à  $\mathbb{R}_+$  est également assez naturelle dans un cadre où la causalité joue un rôle important.

**Fonction de transfert.** On définit la fonction de transfert du système (VIII.3) par la formule

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_k b_k s^k}{\sum_k a_k s^k}. \quad (\text{VIII.6})$$

Motivons cette définition par une discussion informelle. On verra plus bas que sous des conditions assez générales (VIII.3) est associé à un filtre causal stable. Si  $y$  et  $u$  sont solution de (VIII.3), si leur transformée de Laplace est correctement définie et si  $y$  et  $u$  ont leurs premières dérivées nulles en 0 on a

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

En termes de transformée de Fourier on a si  $u$  et  $y$  ont leurs premières dérivées dans  $L_1$

$$\hat{y}(x) = G(2i\pi x)\hat{u}(x). \quad (\text{VIII.7})$$

On voit donc une première approche pour résoudre le système qui est de poser  $\hat{y}(x) = G(2i\pi x)\hat{u}(x)$  pour tenter ensuite d'inverser la transformée de Fourier.

Si  $u(t) = e^{2i\pi x t}$  on a  $y(t) = G(2i\pi x)e^{2i\pi x t}$  (le vérifier directement sur (VIII.3) et observer la cohérence avec (VIII.7)), si bien que

$$\boxed{G(2i\pi x) \text{ s'interprète comme le facteur d'amplification de la fréquence } x}$$

Si cette valeur est grande le système aura facilement tendance à vibrer à cette fréquence, c'est une fréquence de résonance du système. Si  $u$  admet une limite en  $+\infty$  et si  $G$  est stable, on a en vertu de (VIII.5)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)U(s) = G(0) \lim_{t \rightarrow \infty} u(t). \quad (\text{VIII.8})$$

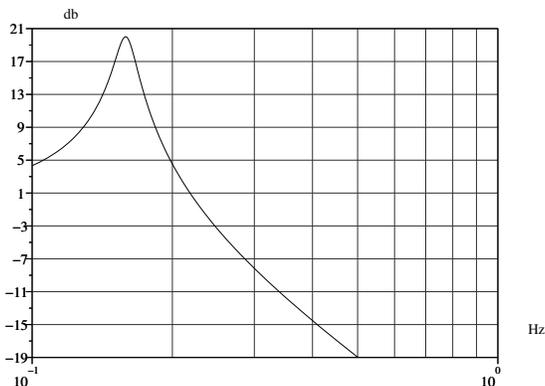
On supposera dans la suite que les facteurs communs à  $A(s)$  et  $B(s)$  ont été éliminés (en particulier  $a_0$  ou  $b_0$  est  $\neq 0$ ).

**Exemple : Le système masse/ressort.** On a  $(ms^2 + \alpha s + k)Y(s) = kU(s)$  soit

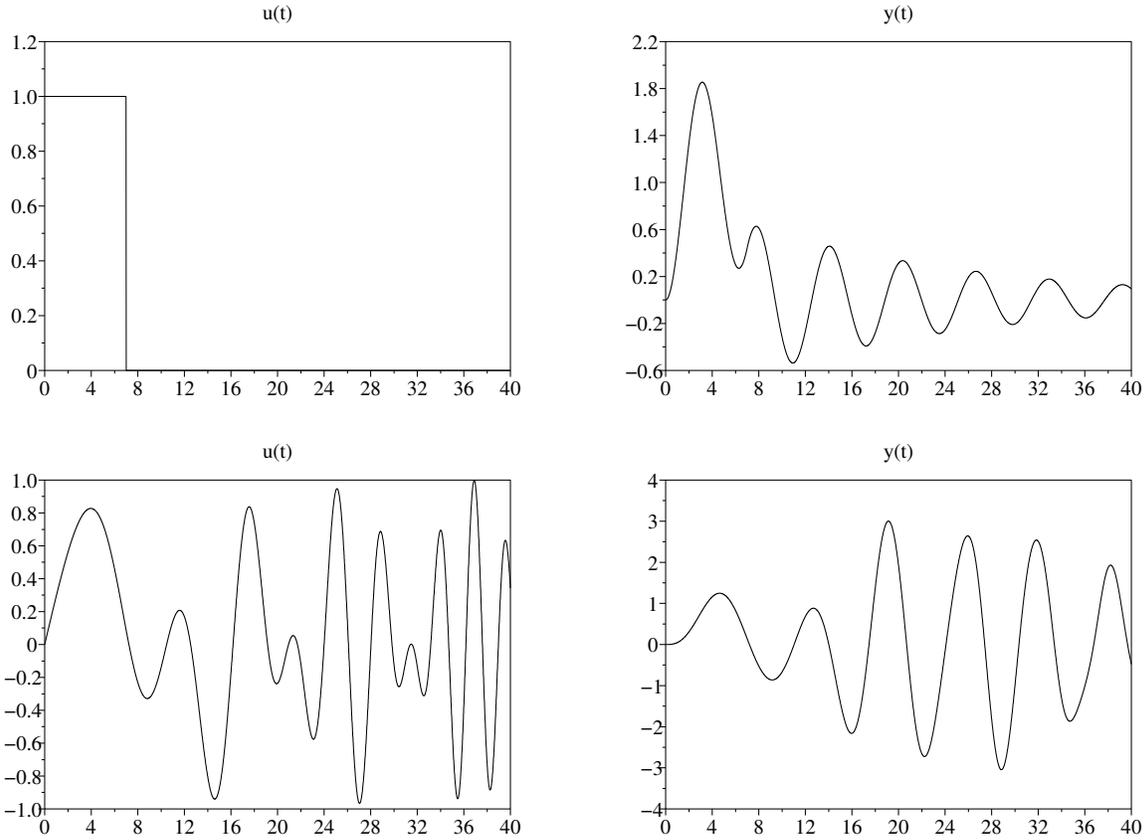
$$G(s) = \frac{k}{ms^2 + \alpha s + k}$$

Le dénominateur s'annule pour  $s_{\pm} = \frac{1}{2m}(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4mk})$ . Si  $\alpha$  est petit on a  $s_{\pm} = \frac{1}{2m}(-\alpha \pm i\sqrt{4mk - \alpha^2})$  et l'on voit apparaître la fréquence de résonance  $f_r = \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$ , fréquence à laquelle  $G(if_r)$  est infini à  $\alpha = 0$  (et très grand si  $\alpha \simeq 0$ ).

Considérons le cas  $m = k = 1$  et  $\alpha = 0, 1$ . La fréquence de résonance est  $f_r \simeq \frac{1}{2\pi} \simeq 0,16$ . Complétons cette discussion par le diagramme de Bode qui donne le module de  $G(s)$  en décibels ( $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ ) :



Voici deux simulations. On voit bien la période associée à la fréquence de résonance  $T \simeq 6,3$  sur la figure.



Les fréquences voisines de la fréquence de résonance ont été amplifiées tandis que les autres ont été atténuées.

Attention, ceci n'empêche que si  $u$  est une fréquence pure, alors  $y$  également.

**Exemple : la suspension.** On a

$$Ms^2Y(s) = -k(Y(s) - X(s)) - sf(Y(s) - X(s))$$

$$ms^2X(s) = -p(X(s) - U(s)) + k(Y(s) - X(s)) + sf(Y(s) - X(s))$$

soit

$$(k + fs + Ms^2)Y(s) = (k + sf)X(s) \tag{VIII.9}$$

$$(p + k + sf + ms^2)X(s) = pU(s) + (k + sf)Y(s) \tag{VIII.10}$$

d'où

$$(p + k + sf + ms^2)(k + fs + Ms^2)Y(s) = (k + sf)(pU(s) + (k + sf)Y(s))$$

et finalement

$$G(s) = \frac{p(k + sf)}{(p + k + sf + ms^2)(k + fs + Ms^2) - (k + sf)^2}$$

## VIII.2 Existence de filtres

On s'intéresse ici à déterminer quels systèmes différentiels définissent des filtres uniques sur des espaces raisonnables.

THÉORÈME VIII.1. *On suppose que  $m \leq n$  et que la fraction rationnelle  $G$  (équation (VIII.6)) n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire. La relation*

$$\widehat{y}(x) = G(2i\pi x)\widehat{u}(x) \quad (\text{VIII.11})$$

*exprimant, dans le domaine de Fourier,  $y$  comme fonction de  $u$  définit un filtre  $A$  de  $L_2(\mathbb{R})$  avec les propriétés :*

1. *Si  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , alors  $y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et (VIII.3) est satisfait.*
2. *Pour  $u \in L_2(\mathbb{R})$  et  $y = Au$ , la relation (VIII.3) est vérifiée au sens des distributions, et  $y$  est l'unique fonction de  $L_2(\mathbb{R})$  solution de (VIII.3) au sens des distributions.*

*Ce filtre est causal stable si et seulement si tous les pôles de  $G$  ont une partie réelle négative et dans ce cas il est de la forme*

$$y(t) = g_0 u(t) + \int_0^\infty u(t-s)h(s)ds$$

*pour une certaine fonction  $h \in L_1(\mathbb{R}_+)$  et*

$$g_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \quad (= 0 \quad \text{si} \quad m < n).$$

*La fonction  $h$  satisfait*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}h(s) &= G(s) - g_0 \\ \widehat{h}(x) &= G(2i\pi x) - g_0. \end{aligned}$$

*La fonction  $h$  est combinaison linéaire finie de fonctions de la forme  $t^k e^{zt} 1_{t>0}$  où  $z$  est un pôle de  $G$  et  $k \geq 0$  est strictement inférieur à son ordre. La constante temps d'amortissement du système (horizon de filtrage) est donc  $T_G = \max_i (-\text{Re}(z_i))^{-1}$  où les  $z_i$  sont les pôles de  $G$ .*

*Démonstration:* Comme  $G$  est borné sur l'axe imaginaire,  $A$  est bien une application linéaire continue. Si  $u \in \mathcal{S}$  il est évident que  $y \in \mathcal{S}$  et (VIII.3) est satisfait.

Si  $u \in L_2$  et  $y = Au$ , et si  $u_n$  est une suite de  $\mathcal{S}$  qui converge vers  $u$  dans  $L_2$ , alors la continuité fait que  $Au_n$  converge vers  $y$  et l'égalité (VIII.3) au sens des distributions, satisfaite pour les paires  $(u_n, y_n)$ , passe bien à la limite.

Si maintenant deux fonctions  $y_1$  et  $y_2$  sont solution de (VIII.3) au sens des distributions pour la même fonction  $u$ , ceci implique que la différence des deux,  $y = y_1 - y_2$ , est solution pour  $u = 0$ . Pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}$  :

$$\int y(t) \sum_k (-1)^k b_k \varphi^{(k)}(t) dt = 0.$$

Par approximation ceci reste vrai pour  $\varphi \in \mathcal{S}$  (nous passons les détails). Pour toute fonction  $\psi \in \mathcal{S}$  on peut définir  $\varphi \in \mathcal{S}$  par

$$\widehat{\psi}(x) = \sum_k b_k (-2i\pi x)^k \widehat{\varphi}(x)$$

(car  $G$  n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire) ce qui implique

$$\psi(t) = \sum_k (-1)^k b_k \varphi^{(k)}(t).$$

On a donc  $\int y(t)\psi(t)dt = 0$  pour toute  $\psi \in \mathcal{S}$  ce qui implique que  $y = 0$ .

Démontrons maintenant la condition de causalité. On peut décomposer  $G$  en éléments simples

$$G(2i\pi x) = g_0 + \sum_{i \geq 1} \frac{g_i}{(2i\pi x - z_i)^{k_i}}.$$

Pour  $Re(z) < 0$  la fonction  $(2i\pi x - z)^{-k}$  est la transformée de Fourier de  $\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{zt}\mathbf{1}_{t>0}$ , par conséquent

$$y(t) = g_0 u(t) + (h * u)(t), \quad h(t) = \sum_i g_i \frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!} e^{z_i t} \mathbf{1}_{t>0}.$$

Comme  $h$  est dans  $L_1$  on a bien un filtre causal stable.

Il reste à montrer que la condition est nécessaire. Nous ne détaillons pas : s'il y a des pôles à partie réelle strictement positive, alors on montre facilement que ces pôles seront à l'origine de termes supplémentaires dans la décomposition en éléments simple faisant apparaître une seconde fonction  $h_2$  qui sera elle à support sur  $\mathbb{R}_-$ , ce qui fait que l'on a

$$y(t) = g_0 u(t) + \int_0^\infty u(t-s)h(s)ds + \int_{-\infty}^0 u(t-s)h_2(s)ds.$$

La fonction  $h_2$  étant non nulle (à vérifier), ceci implique que le filtre n'est pas causal. ■

Dans l'exemple de la suspension, on a donc

$$y(t) = \int_0^t h(s)u(t-s)ds$$

pour une certaine fonction  $h$  que l'on peut exprimer explicitement avec la méthode de la démonstration.

**Conditions initiales.** La solution de (VIII.3) a été choisie de manière unique si  $u \in L_2(\mathbb{R})$  par la condition  $y \in L_2(\mathbb{R})$ . Si  $u$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$ , ceci correspond à un choix particulier de conditions initiales.

Supposons pour simplifier que  $m = 0$ ; alors  $h = \mathcal{F}^{-1}G(2i\pi \cdot)$  :

$$h(t) = \int G(2i\pi x)e^{2i\pi t x} dx$$

a ses dérivées dans  $L_1$  jusqu'à l'ordre  $n-2$  et le calcul des résidus montre (en étendant l'intégrale à un grand demi-cercle porté par le demi-plan supérieur) que ces dérivées sont nulles en  $t = 0$ . Ceci permet de montrer que si  $u$  est une fonction régulière sur  $\mathbb{R}_+$  et nulle sur  $\mathbb{R}_-$  alors les dérivées de  $y$  jusqu'à l'ordre  $n-1$  seront nulles : le filtre choisit bien les conditions initiales nulles.

**Causalité et stabilité.** Si  $G$  a des pôles à partie réelle positive, on peut trouver également des solutions causales de l'équation différentielle mais elles seront loin d'être dans  $L_2$ ; ce sont généralement les solutions d'intérêt car physiquement réalistes. Par exemple si l'équation est

$$\frac{dy}{dt} - y = u$$

la solution du théorème est

$$y(t) = - \int_t^\infty u(s)e^{t-s} ds$$

mais la solution causale naturelle est

$$y(t) = \int_0^t u(s)e^{t-s} ds.$$

Cette dernière solution définit un système instable car si  $u = 1$ ,  $y(t) = e^t - 1$ .

C'est le cas si par exemple l'amortisseur à ressort est mal conçu et que la voiture rentre en résonance avec la route lorsque certaines fréquences apparaissent sur le bitume.

*Il est donc imprudent de dissocier les notions de causalité et de stabilité.*

**Pôles en zéros.** Si  $G$  a un pôle d'ordre  $q$  en 0, par exemple

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2\frac{d^2y}{dt^2} = u$$

( $q = 2$ ) on peut le mettre sous la forme

$$G(s) = s^{-q}G_0(s).$$

Si  $h_0$  est la réponse impulsionnelle de  $G_0$  (noter que la factorisation fait que  $G_0(0) = 0$ ), alors on obtient une solution en intégrant  $q$  fois le signal  $y_0 = h_0 * u$ ; dans notre exemple  $y_0$  est solution de

$$\frac{dy_0}{dt} + 2y_0 = u.$$

On applique donc  $q$  fois l'intégrateur

$$y = I^q y_0, \quad Ix(t) = \int_{-\infty}^t x(s)ds.$$

On voit que ceci ne fonctionne pas en toute généralité dans  $L_2$  et c'est pour cette raison que les pôles en 0 sont exclus du théorème précédent. Toutefois cette méthode est parfaitement opérationnelle du moment que le filtre est causal, et que les signaux sont portés par  $\mathbb{R}_+$ .

**La condition  $m \leq n$  est nécessaire.** Sans le démontrer, considérons par exemple le filtre  $y = u + \dot{u}$  qu'on ne peut pas définir comme une application continue sur un espace raisonnable. Un tel filtre est d'un point de vue pratique irréalisable car le calcul de la dérivée de  $u$  à partir de sa discrétisation ne pourra jamais être faite avec la précision nécessaire (ce que traduit le fait que  $u \rightarrow \dot{u}$  est une application discontinue).

### VIII.3 Production des sons : tube et membrane

Soit un tube ayant une membrane vibrante à un bout et ouvert à l'autre bout. Si  $u(t)$  est le signal de vibration de la membrane, la linéarité des équations de la physique (au premier ordre, équations de Webster), l'invariance dans le temps, et la causalité, entraînent que le signal sonore  $y(t)$  en sortie (vibration des couches d'air) est une version filtrée de  $u$ ; il est raisonnable de supposer que ce filtre est associé à une fonction de  $L_1$  et donc :

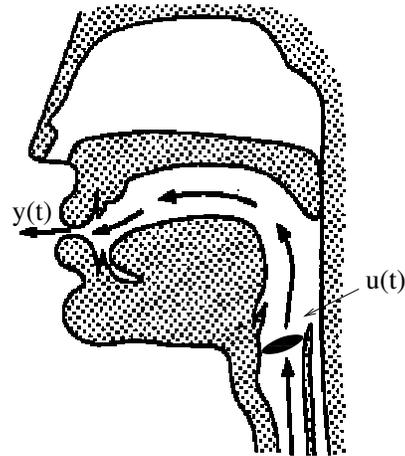
$$y(t) = \int_0^\infty u(t-s)h(s)ds$$

pour une certaine fonction  $h$ .

Le signal  $u(t)$  peut être la vibration des lèvres dans l'embouchure d'une trompette, ou la vibration de l'anche d'une clarinette et  $y(t)$  la musique produite.  $u(t)$  peut également être le signal de vibration des cordes vocales et  $y(t)$  la parole.

Dans ce dernier cas, il est intéressant de noter que  $u(t)$  peut être représenté en première approximation comme un train d'impulsion (peigne de Dirac, car dès que les cordes s'écartent, l'air traverse, la pression s'annule et les cordes se referment) et l'équation

$$\hat{y} = \hat{u} \hat{h}$$



exprime que  $\hat{y}$  va être l'échantillonné de  $\hat{h}$  à un pas qui correspond à la fréquence des cordes vocales ( $\hat{u}$  est également un peigne de Dirac). Notons que cette fréquence est en gros de 150Hz pour les hommes et 250Hz pour les femmes et que les fréquences d'intérêt pour la parole sont essentiellement dans l'intervalle  $[0, 4]$  kHz. On voit sur l'illustration qui suit que cette grossière approximation n'est pas totalement absurde :

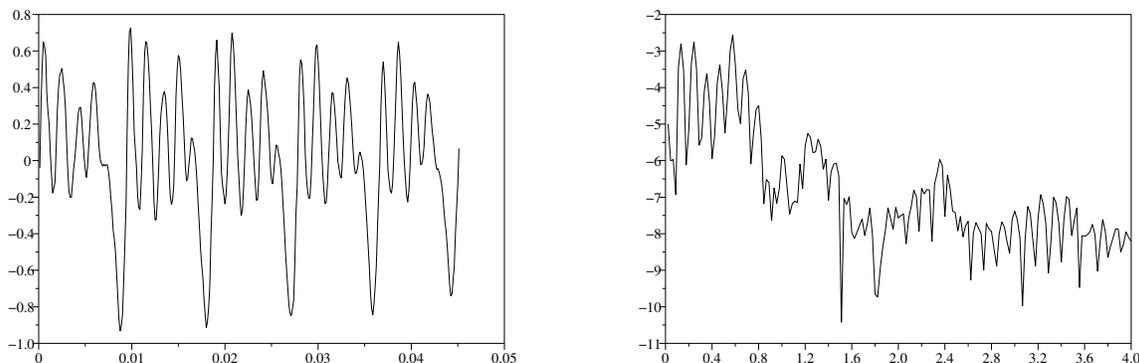


FIGURE VIII.1 – Partie centrale d'un /a/ et le logarithme du module de sa transformée de Fourier. Les abscisses sont en secondes et en kHz.

La présence de 6 pics entre 90 et 840Hz montre que le locuteur a une hauteur de voix d'environ 110Hz, ce qui s'observe également sur la première figure; ceci correspond à une voix d'homme. On voit les 4 maximums de  $|\hat{h}|$  caractéristiques du phonème /a/ (appelés formants) ici à 600 , 1300, 2400 et 3500 Hz.

## VIII.4 Diagrammes. Initiation aux boucles de commande

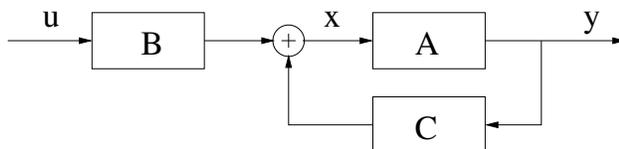
### VIII.4.1 Introduction : Conception de l'amortissement.

Les équations (VIII.9) et (VIII.10) se réécrivent

$$Y(s) = \frac{k + sf}{k + fs + Ms^2} X(s) = A(s)X(s)$$

$$X(s) = \frac{p}{p + k + sf + ms^2} U(s) + \frac{f + sf}{p + k + sf + ms^2} Y(s) = B(s)U(s) + C(s)Y(s)$$

On schématise traditionnellement cette situation par le diagramme suivant qui parle de lui-même :



Le problème de la conception de l'amortissement, qui n'est pas a proprement parler un problème de commande, est ici de choisir les paramètres dont on dispose,  $f, p, k$ , de sorte que le transfert  $G(s)$  ait les propriétés désirées ; il faudra une bonne atténuation des fréquences sur un domaine correspondant au support escompté pour  $\hat{u}$  afin que le conducteur ne ressente pas trop de vibrations (cf (VIII.7)) et une réponse suffisamment douce à la fonction échelon pour éviter les chocs en cas de discontinuité de la chaussée.

**DÉFINITION VIII.2.** On appelle réponse indicielle d'un filtre sa réponse à la fonction échelon  $u(t) = 1_{t \geq 0}$ . Dans le cadre du théorème, c'est  $\int_0^t h(s)ds + g_0 1_{t > 0}$ . Sa limite à l'infini vaut  $\hat{h}(0) + g_0 = G(0)$ .

### VIII.4.2 Boucle de commande.

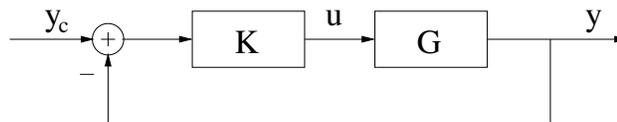
Prenons l'exemple masse/ressort et imaginons que l'on veuille faire un système qui pour toute consigne  $y_c(t)$  trouve automatiquement une entrée  $u(t)$  telle que la sortie  $y(t)$  soit très proche de  $y_c(t)$ . Une solution est de calculer une solution  $u_c$  explicitement ; elle possède deux inconvénients :

- Il faut connaître  $y(t)$  dès le début
- Les incertitudes et approximations vont faire que les erreurs vont s'accumuler.

L'automaticien propose de choisir  $u$  de la forme

$$U(s) = K(s)(Y_c(s) - Y(s))$$

pour un certain transfert  $K$ .  $u$  s'obtient donc comme sortie d'un nouveau système, et peut être calculé instant après instant en résolvant l'équation différentielle associée (ou par un filtre analogique, ou par d'autres méthodes...). On a le schéma



En éliminant  $u$  avec  $Y(s) = G(s)U(s)$ , il vient

$$Y_c(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)} Y_c(s) = H(s)Y_c(s) \quad (\text{VIII.12})$$

qui exprime le transfert de  $y_c$  vers l'erreur  $y_c - y$ .

**Commande d'un gouvernail.** Illustrons par un exemple simple :  $y$  est le cap du navire et  $u$  l'angle de la barre ; alors un modèle simplifié valide au voisinage de  $u = 0$  est

$$\frac{dy}{dt} = gu$$

pour une certaine constante  $g$ , si bien que

$$G(s) = \frac{g}{s}.$$

Il s'agit d'un intégrateur. Il vient, si  $K(s) = k$  est choisi constant (régulateur proportionnel : on tourne la barre proportionnellement à l'erreur sur le cap)

$$H(s) = \frac{s}{s + gk}, \quad 1 - H(s) = \frac{gk}{s + gk}$$

soit

$$y(t) = \int_0^t y_c(t-s)e^{-gks} gk ds = \int_0^{t/T} y_c(t-Tx)e^{-x} dx, \quad T = 1/gk$$

L'horizon de filtrage est  $T$ . La sortie est en gros une moyenne de la consigne sur une durée d'ordre  $T$ . Noter qu'il est absolument essentiel que  $k$  soit du signe de  $g$ . En théorie il faudrait prendre  $k$  très grand (pour avoir un temps de réaction rapide), mais  $u$  deviendrait très grand et l'on sortirait du domaine de validité du modèle. En pratique on choisira un  $k$  assez grand pour conduire à une valeur de  $T$  raisonnable et pas trop pour ne pas solliciter brusquement la gouvernail.

Pour certaines applications (lancement d'une fusée...), on calcule effectivement une commande  $u_c$  correspondant à la trajectoire désirée. Les erreurs et incertitudes variées font que l'on a

$$G(s)U_c(s) = Y_c(s) + E(s)$$

où  $E(s)$  est un terme d'erreur. On réalise alors la commande

$$U(s) = U_c(s) + K(s)(Y_c(s) - Y(s))$$

et l'on obtient en multipliant les deux membres par  $G(s)$

$$Y(s) = Y_c(s) + E(s) + G(s)K(s)(Y_c(s) - Y(s))$$

soit

$$Y_c(s) - Y(s) = \frac{1}{1 + K(s)G(s)}E(s) = H(s)E(s). \quad (\text{VIII.13})$$

Revenons au modèle général (VIII.12). Une nécessité est que le transfert  $H$  soit stable. On choisit  $K$  en pratique sur des spécifications de différents types :

- **PERFORMANCE STATIQUE** : Il est raisonnable d'espérer que si  $y_c$  est constant,  $y(t)$  converge vers cette valeur quand  $t \rightarrow \infty$ . Ceci signifie que la réponse indicielle de  $H$  converge vers 0, soit

$$H(0) = 0.$$

(voir aussi le lien avec l'équation (VIII.5)). Si  $G(0)$  est fini, ceci revient à dire que  $K(s)$  a un pôle en 0.

- **PERFORMANCE DYNAMIQUE** : il faut que  $|H(i\omega)|$  soit petit de sorte à réduire l'erreur. En général on se donne une plage  $[0, \omega_1]$  correspondant au domaine de fréquences réaliste pour les entrées  $y_c$  et un gabarit  $m(\omega)$  et l'on impose

$$|H(i\omega)| \leq m(\omega) \quad \text{petit pour } 0 < \omega < \omega_1.$$

- **STABILITÉ/ROBUSTESSE** :  $H$  doit être causal stable. En raison des incertitudes de la modélisation, on peut vouloir que  $H$  ne soit pas trop sensible aux erreurs sur  $G$ , en particulier rester causal stable même si l'on perturbe  $G$ . Ceci pousse à ce que  $|K(i\omega)|$  ne soit pas trop grand. Il existe plusieurs types de spécification correspondant à cette requête. L'une d'elle consiste à fixer une borne sur le transfert de  $y_c$  à  $y$ , c.-à-d. à imposer pour tout  $\omega$

$$|1 - H(i\omega)| = \left| \frac{K(i\omega)G(i\omega)}{1 + K(i\omega)G(i\omega)} \right| \leq c$$

où par exemple  $c = 1,3$  (2,3 db).

- **MÉNAGER LES ACTIONNEURS** : On vérifie simplement que  $U = KHY_c$ . Si l'on ne veut pas soumettre les actionneurs à des efforts trop grand, il est important d'avoir

$$|K(i\omega)H(i\omega)| \quad \text{pas trop grand.}$$

On voit donc essentiellement deux besoins contradictoires : avoir  $K$  grand pour plus de performances et petit pour plus de robustesse.

### VIII.4.3 Le P.I.D.

La pratique dans 90% des cas est de se retreindre aux régulateurs P.I.D. (Proportionnel Intégral Dérivé), c'est-à-dire de la forme

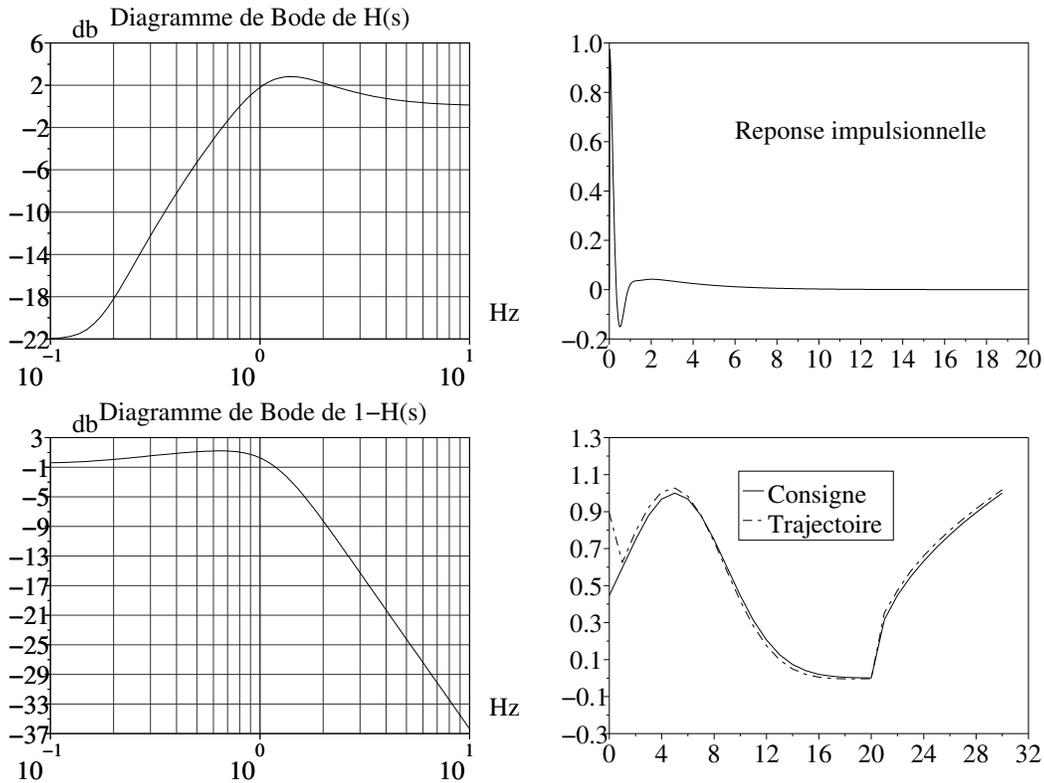
$$K(s) = g \left( 1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right), \quad T_i > 0, \quad T_d \geq 0$$

et très souvent au cas  $T_d = 0$ , le régulateur P.I. Le terme  $\frac{1}{sT_i}$  garantit que  $H(0) = 0$  (si  $G$  n'a pas de pôle en zéro) Si  $T_d > 0$ , on est dans le cas  $m > n$  et il faut dériver le signal ce qui est impossible à faire surtout s'il

y a un peu de bruit ; le terme  $sT_d$  est dans les faits remplacé par  $sT_d/(1 + \varepsilon T_d s)$  avec typiquement  $\varepsilon = 1/5$ , et l'on rentre dans le cadre du théorème.

Il existe différentes méthodes pour trouver des valeurs de  $T_i$  et  $T_d$  selon l'allure de la fonction  $|G(i\omega)|$ , le temps de réponse minimal que l'on désire, les contraintes sur les actionneurs, les fréquences d'intérêt, la précision de la modélisation... Nous ne rentrons pas ici dans ces détails<sup>1</sup> et illustrons simplement par un exemple.

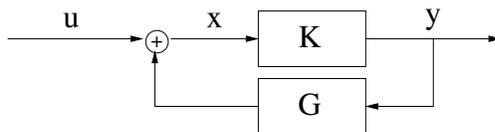
**Le système masse ressort.** Considérons les paramètres  $m = k = 1$  et le cas  $\alpha = 1$ . Si l'on choisit  $T_i = 3, g = 10, T_d = 1/2, \varepsilon = 1/5$  on trouve un régulateur de performances raisonnables aux fréquences pas trop élevées. Le quatrième graphique est une simulation :



On trouve des performances analogues dans le cas oscillant  $\alpha = 0, 1$ .

## VIII.5 Exercices

**Exercice VIII.5.1** On considère le système suivant où l'on note  $K(s)$  et  $G(s)$  les fonctions de transfert associées aux deux sous-systèmes



1. Voir p.ex. : PH. DE LARMINAT, *Automatique : commande des systèmes linéaires*, Hermès, 1993.

1. Donner les deux équations reliant les transformées de Laplace  $U(s)$ ,  $X(s)$  et  $Y(s)$  de  $u$ ,  $x$  et  $y$ .
2. On a

$$K(s) = \frac{1}{1+2s}, \quad G(s) = -2 - s.$$

Donner la relation exprimant  $Y(s)$  en fonction de  $U(s)$ .

3. En déduire une expression de  $y(t)$  en fonction du passé de  $u$ .
4. Quelle équation différentielle relie  $y$  à  $u$ ? (Utiliser la question 2.)

**Exercice VIII.5.2** On rappelle que si le support d'une mesure  $\mu$  contient des points de  $(-\infty, 0)$ , il existe alors une fonction  $z$  continue à support dans  $(-\infty, 0)$ , telle que  $\int z(s) d\mu(s) \neq 0$ .

1. Montrer qu'un filtre  $F$  associé à une mesure  $\mu$ ,  $u \mapsto \int_0^\infty u(t-s)\mu(ds)$  est causal si le support de  $\mu$  est contenu dans  $[0, \infty)$ .
2. Montrer que cette condition est nécessaire.

*Indication* : considérer  $u(t) = z(-t)$  et montrer que  $\int u(t-s) d\mu(s) \neq 0$  pour  $t \in (-\varepsilon, 0)$ . Puis conclure.

**Exercice VIII.5.3**

1. Soient  $a$  et  $b$  des constantes réelles. Calculer la fonction  $\varphi$  à support dans  $[0, \infty[$  dont la transformée de Laplace est :

$$F(z) = \frac{1}{z^4 + z^2(a^2 - b^2) - a^2b^2}, \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > |b|.$$

On pourra exploiter la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{2b(a^2 + b^2)} \left( \frac{1}{z-b} + \frac{-1}{z+b} + \frac{-2b}{z^2 + a^2} \right).$$

2. Calculer la fonction  $\varphi$ , à support dans  $[0, \infty[$ , dont la transformée de Laplace est :

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}.$$

**Exercice VIII.5.4**

1. a) Soit  $\alpha$  un paramètre réel ou complexe. On note  $Y$  la fonction échelon, définie par  $Y(t) = 1$ , pour  $t \geq 0$ ,  $= 0$ , pour  $t < 0$ . On considère l'équation différentielle

$$\alpha y(t) + y'(t) = x(t). \tag{VIII.14}$$

Calculer la fonction  $\varphi$  telle que  $y = \mu * x$  soit solution de (VIII.14),  $\mu$  étant la mesure de densité  $Y\varphi$ ,

(On pourra faire le calcul par une méthode de dérivation sous le signe  $\int$ , ou utiliser le calcul des dérivées de la fonction  $Y\varphi$  au sens des distributions.)

- b) Exprimer, sous forme d'une intégrale, la sortie  $y$  du filtre  $x \rightarrow y = \mu * x$  pour une entrée  $x$  causale.
  - c) Calculer la sortie  $y$  de ce filtre, quand l'entrée est égale à la fonction échelon  $Y$ .
  - d) Pour quelles valeurs de  $\alpha$ , le filtre causal  $x \rightarrow \mu * x$  est-il borné (i.e. transforme un signal  $x$  borné,  $\|x\|_\infty < \infty$ , en un signal  $y$  borné,  $\|y\|_\infty < \infty$ ) ?
2. On considère maintenant l'équation différentielle

$$\alpha^2 y(t) + 2\alpha y'(t) + y''(t) = x'(t) + \beta x(t), \tag{VIII.15}$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des paramètres réels ou complexes.

- a) Quelle est la fonction de transfert correspondant à cette équation différentielle?
- b) Calculer la densité, de la forme  $Y\psi$ , de la mesure  $\nu$  causale telle que  $y = \nu * x$  soit solution de (VIII.15).
- c) Calculer la sortie du filtre  $y \rightarrow \nu * x$ , quand l'entrée est égale à la fonction échelon  $Y$ .

**Exercice VIII.5.5** On considère l'équation différentielle

$$\alpha y''(t) + y(t) = x(t) \tag{VIII.16}$$

où  $\alpha$  est une constante réelle non nulle.

1. Calculer un filtre causal  $F : x \rightarrow y$ , dont la sortie  $y$  est reliée à  $x$  par (VIII.16). On déterminera :
  - la fonction de transfert de  $F$ ,
  - la densité de la mesure  $\mu$  associée au filtre  $F$ .
2. Cette mesure est-elle bornée?
3. On suppose  $\alpha > 0$ . Expliquer le phénomène de résonance, en calculant un signal borné  $x$  tel que la sortie  $y$  soit non bornée.

**Exercice VIII.5.6** On note  $Y$  la fonction échelon définie par  $Y = 1_{[0, \infty[}$ . Dans la suite,  $\lambda$  est un paramètre réel.

1. Calculer la transformée de Laplace des deux fonctions

$$Y(t)e^{-\lambda t} \sin t, \quad Y(t)e^{-\lambda t} \cos t.$$

On précisera le domaine de définition de ces transformées.

2. On considère le filtre causal défini par l'équation différentielle

$$(\lambda^2 + 1)y + 2\lambda y' + y'' = x. \tag{VIII.17}$$

- a) Quelle est la fonction de transfert de ce filtre?
- b) Calculer la densité, à support dans  $\mathbb{R}^+$ , de la forme  $Y\varphi$ , de la mesure  $\mu$  telle que  $y = \mu * x$  soit solution de (VIII.17).

On fera le calcul par trois méthodes :

- (i) dérivation sous le signe somme,
- (ii) dérivation de la fonction  $Y\varphi$  au sens des distributions,
- (iii) méthode de la fonction de transfert.

3. a) Expliciter, sous forme d'une intégrale, la sortie  $y$  du filtre pour une entrée  $x$  causale.
- b) On prend pour entrée  $x$  la fonction échelon  $Y$ .
  - (i) Calculer la sortie  $y$  correspondante.
  - (ii) Pour quelles valeurs de  $\lambda$  cette sortie  $y$  est-elle bornée?
- c) (i) Pour quelles valeurs de  $\lambda$  le filtre transforme-t-il un signal borné en signal borné?  
 (ii) Que peut-on dire du domaine de définition de la transformée de Laplace dans ce cas? Peut-on avoir un phénomène de résonance pour certaines valeurs de  $\lambda$ ?
4. a) Déterminer tous les filtres  $\mathcal{F}$  tels que  $y = \mathcal{F}x$  soit solution de (VIII.17).  
 b) Parmi ces filtres quels sont ceux qui transforment un signal borné en signal borné?
5. Mêmes questions pour l'équation différentielle

$$(\lambda^2 + 1)y + 2\lambda y' + y'' = \beta x' + x.$$