Ondelettes orthogonales et biorthogonales

Bernard Delyon*

26 janvier 2010

*IRMAR, Université Rennes-I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France ; delyon@maths.univ-rennes1.fr

Table des matières

1 Introduction

Le but de cette note essentiellement rédigée au siècle passé, est de rappeler les principales propriétés des ondelettes orthogonales et biorthogonales en vue des applications. L'objectif originel de la théorie des ondelettes est de fabriquer des bases orthogonales de $L_2(\mathbb{R})$ de la forme $(\psi(2^j x-k))_{j,k}$, c'est-à dire constituées des translatées et dilatées d'une fonction unique, de préférence localisée et régulière.

Le principe de la construction est le suivant : On fabrique une fonction φ de $L_2(\mathbb{R})$ telle que

- Les fonctions $\varphi(x-k)$, k entier, forment une famille orthogonale
- φ est une **fonction d'échelle** : il existe une suite $h_k \in l_2$ telle que

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum h_k \varphi(2x-k), \tag{1}$$

et on définit l'ondelette

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum (-1)^{k+1} h_{1-k} \varphi(2x-k).$$

Alors la famille $\{\psi(2^j x-k), j, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthogonale de $L_2(\mathbb{R})$ (cf théorème 3 p.8). Cette dernière remarque est à la base de toute la théorie. On vérifie alors que, pour tout j_0, la famille $\{\varphi(2^{j_0}x - k), \psi(2^j x-k), k \in \mathbb{Z}, j \geq j_0\}$ forme également une base orthonogonale de $L_2(\mathbb{R})$; si φ et ψ sont à support compact, elles fournissent une description locale, à différentes échelles (j) de la fonction considérée :

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j_0 k}\rangle \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j\geq j_0, k\in\mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk}\rangle \psi_{jk}(x) \tag{2}$$

où $\varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x-k)$. De plus les normes dans les espaces fonctionnels habituels (Sobolev, Besov...) peuvent se retranscrire en normes sur les coefficients d'ondelettes (coordonnées de la fonction dans la base) ; cf §4.1 et théorème 7 p.19. Ces deux propriétés expliquent à elles seules le succès de ces bases comme outil de représentation de fonctions dans les domaines théoriques comme dans les domaines pratiques. On verra que des liens avec le traitement du signal et les algorithmes multigrilles apparaissent également. Quelques applications seront présentées en synthèse de filtre et en estimation, ainsi que pour la construction d'autres types de bases.

À propos de la construction de φ

On vérifie sans peine que l'équation (1) revient à dire que la transformée de Fourier de φ satisfait

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2)$$

où la fonction 2π-périodique m_0 s'exprime en fonction de la suite h_k :

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum h_k e^{-ik\omega}$$

(cf proposition 2 p.9) et alors

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega). \tag{3}$$

On voit qu'en particulier $m_0(0) = 1$, c'est-à-dire

$$\sum h_k = \sqrt{2} \tag{4}$$

(on obtient également cette formule en intégrant l'équation (1)). On s'intéressera tout particulièrement au cas où la suite h_k est de longueur finie, auquel cas φ sera à support compact et la condition d'orthogonalité des translatées de φ s'exprimera simplement sous la forme d'une équation polynomiale algébrique :

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega+\pi)|^2 = 1$$

ou de manière équivalente

$$\sum_l h_l \bar{h}_{l+2k} = \delta_{k0} \tag{5}$$

(cf théorème 4 p.11). On verra que cette condition revient à dire que les coefficients h_k sont ceux de filtres miroirs en quadrature. La méthode habituelle de construction des ondelettes d'Yves Meyer consiste à trouver des solutions des équations (4,5) puis à construire φ à partir de m_0 avec la relation (3). En plus de (4) et (5), une hypothèse supplémentaire (hypothèse (M2) §3.2) doit être faite sur m_0 pour que cette construction donne bien une base ; c'est l'objet du théorème 4 p.11 ; cette hypothèse est généralement satisfaite et dans le cas contraire on observe des pathologies de la fonction φ.

Le théorème 6 p.13 permet de lier les propriétés de m_0 à celles de φ (régularité ...).

Le paragraphe 3.5 donne des exemples de choix classiques d'ondelette.

Ondelettes biorthogonales

On introduit ensuite les ondelettes biorthogonales, c'est-à-dire qu'on lève la condition d'orthogonalité des translatées de φ. On peut alors fabriquer $(\psi, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ qui permettent la reconstruction

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_{j_0 k} \rangle \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle \psi_{jk}(x) \tag{6}$$

(cf théorème 12 p.26). Cette fois-ci, φ et $\tilde{\varphi}$ sont des fonctions d'échelle

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum h_k \varphi(2x - k)$$
$$\tilde{\varphi}(x) = \sqrt{2} \sum \tilde{h}_k \tilde{\varphi}(2x - k)$$

d'où les expressions des transformées de Fourier de ces fonctions (cf equation (3)) ; ψ et $\tilde{\psi}$ sont définies de manière analogue (formule 35) ; la biorthogonalité de la paire $((\varphi_{jk})_k, (\tilde{\varphi}_{jk})_k)$ à j fixé (i.e. $\langle \varphi_{jk} \tilde{\varphi}_{jk'} \rangle = \delta_{kk'}$) se traduit simplement par

$$\sum_l \bar{h}_l \tilde{h}_{l+2k} = \delta_{k0}. \tag{7}$$

et la biorthogonalité de $((\varphi_{j_0 k}, \psi_{jk})_{jk}, (\tilde{\varphi}_{j_0 k}, \tilde{\psi}_{jk})_{jk})$ n'est plus qu'une conséquence des formules de construction de ψ et $\tilde{\psi}$ (cf théorème 10 p.24). Comme plus haut, on part en général de suites h et $\tilde{h}$ qui satisfont les équations (7) et (4) ; le théorème 12 p.26 donne les conditions supplémentaires qui garantissent d'avoir une base biorthogonale (l'équation (7) est équivalente à (48)) ; ces conditions (qui portent séparément sur h_k et $\tilde{h}_k$, par exemple h_k et $\tilde{h}_k$ doivent satisfaire l'hypothèse (MP) du §3.3) sont cette fois facilement mises en défaut, auquel cas on observe typiquement des pathologies flagrantes de la fonction φ ou $\tilde{\varphi}$.

L'intérêt de cette méthode réside dans le choix que l'on a pour les fonctions de base ; en particulier, on verra que les fonctions $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ peuvent avoir des propriétés très différentes de celles de (φ, ψ) ; typiquement, si f possède M dérivées au sens habituel, un choix de $(\varphi, \psi, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ pour obtenir une bonne représentation et pour que la décroissance des coefficients $\langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle$ reflète la régularité de f sera de garantir que φ et ψ sont C^{M+1} à support compact tandis que $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ sont à support compact et $\tilde{\psi}$ est orthogonale aux polynomes d'ordre au plus M (un développement de Taylor à l'ordre M de f dans l'intégrale $\langle f, \tilde{\psi}_{jk} \rangle$ donne immédiatement l'ordre de grandeur de ce coefficient). Il existe des exemples où $\tilde{\varphi}$ est la fonction de Haar et $\tilde{\psi}$ est une fonction en escalier (cf §7.4).

Notations

- On emploiera la transformée de Fourier :
  $$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int f(x) e^{-i\omega x} dx \qquad \mathcal{F}^{-1}g(x) = \frac{1}{2\pi} \int g(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

qui n'est pas une isométrie mais satisfait l'identité $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$ et donne la formule de Poisson $\sum f(j) = \sum \hat{f}(2j\pi)$.

- On notera $\tau_x f(y)$ la fonction $g(y) = f(y - x)$ et $\partial^n f$ la dérivée n-ième de f.
- Les espaces fonctionnels seront notés avec les indices de régularité en haut et les indices d'intégrabilité en bas [33] ; les espaces de Sobolev sont définis par $W_p^s = \{f, \|\mathcal{F}((1 + |x|^s)\hat{f})\|_p < \infty\}$ (fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre s sont dans L_p). On garde la même notation pour s non-entier.
  Les espaces de Hölder sont
  $$\begin{aligned} C^s &= \{f, \|f\|_\infty < \infty,\ et\ |f(x+h) - f(x)| < c|h|^{-s}\} \quad 0 < s \leq 1 \\ &= \{f \in C^{[s]}, \partial^\alpha f \in C^{s-[s]}\ si\ |\alpha| \leq [s]\} \qquad s > 1 \end{aligned}$$
- Si $u_1, u_2, ..$ sont des éléments d'un espace vectoriel, on désigne par $span(u_1, u_2, ...)$ le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant $(u_1, u_2, ...)$.
- Le signe $\bigoplus$ signifie la somme directe orthogonale des espaces vectoriels et $+$ désigne la somme directe des espaces vectoriels.
- l_2 désigne l'espace des suite de carré intégrable sur $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$.
- $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

2 Préambule : Bases de Riesz

Ce paragraphe a pour but d'introduire les propriétés essentielles des bases de Riesz qui vont être utilisées par la suite. Les bases de Riesz sont essentiellement la généralisation opérationnelle dans un cadre hilbertien des bases (familles libres) non nécessairement orthogonales de l'espace euclidien. La propriété de base de Riesz garantit en effet l'unicité des coordonnées et la continuité de l'application coordonnées (à valeurs dans l_2 ; cf théorème 1).

Définition 1 *On dit qu'une suite (u_k) d'un espace de Hilbert est une base de Riesz s'il existe deux constantes A et B telles que pour toute suite finie $x = (x_k)$, on a*

$$A\|x\|_2 \leq \|\sum_k x_k u_k\|_2 \leq B\|x\|_2 \tag{8}$$

Exemple : la suite

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0...) \\ u_2 &= (a_2, 1, 0, 0...) \\ u_3 &= (a_3, 0, 1, 0, 0...) \\ u_i &= a_i e_1 + e_i \end{aligned}$$

où e_i est le i^{eme} élément de la base canonique de $l_2(\mathbb{N})$, est une base de Riesz si et seulement si (a_n) est une suite de carré intégrable.

Théorème 1 *Soit (u_k) une base de Riesz dans un espace de Hilbert et $V = span(u_1, u_2, ...)$. Alors $V = \{\sum x_i u_i,\ \sum |x_i|^2 < \infty\}$ et l'application*

$$\begin{aligned} Q \quad : \quad & l_2 \longrightarrow V \\ & x \longrightarrow \sum_i x_i u_i \end{aligned}$$

est une bijection bicontinue entre l_2 et V.

Démonstration. Clairement $\{\sum x_i u_i,\ \sum |x_i|^2 < \infty\} \subset V$, et comme le premier espace est complet (conséquence facile de (8)), on a également l'inclusion contraire. La remarque précédente et l'équation (8) impliquent que $Q(x)$ est bijective et bicontinue. ∎

Définition 2 *Une famille $(u_k, \tilde{u}_k)$ est dite biorthogonale si u_k et $\tilde{u}_k$ sont des bases de Riesz de deux sous espaces V et $\tilde{V}$ d'un espace de Hibert H et si*

$$\langle u_k, \tilde{u}_j \rangle = \delta_{jk}$$

Exemples : En dimension d, si d vecteurs indépendants $u_1, ...u_d$ sont mis en colonne dans une matrice P, la matrice P^{-T} contient dans ses colonnes la base biorthogonale associée ; cette construction s'étend en dimension infinie : il suffit de définir $\tilde{u}_i \in V$ par $\tilde{u}_i = (Q^*)^{-1}(e_i)$, où Q^* désigne l'adjoint de Q (il reste à vérifier que $(\tilde{u}_i)$ forme une base de Riesz...).

Une base biorthogonale à celle de l'exemple plus haut est

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= (1, -a_2, -a_3...) \\ \tilde{u}_2 &= (0, 1, 0, 0...) \\ \tilde{u}_3 &= (0, 0, 1, 0, 0...) \\ \tilde{u}_i &= e_i, \qquad i > 1. \end{aligned}$$

Notons que $(u_2, u_3, ..)$ et $(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3, ..)$ forment une paire biorthogonale pour deux sous-espaces V et $\tilde{V}$ différents.

Théorème 2 *Si $(u_k, \tilde{u}_k)$ est une famille biorthogonale, alors il existe C tel que pour toute $f \in H$:*

$$\sum \langle \tilde{u}_j, f \rangle^2 \leq C \|f\|_2$$

et pour toute $f \in V$:

$$f = \sum \langle f, \tilde{u}_j \rangle u_j.$$

Démonstration. Remarquons que la propriété de base de Riesz implique que l'application $f \to Tf = (\langle f, \tilde{u}_j \rangle)_j$ est continue de H dans l_2 (car c'est l'adjoint de $x \to \sum x_j \tilde{u}_j$). Ce qui prouve la première inégalité. La seconde est réalisée si f est une somme finie de u_k et s'étend par continuité grâce à la première. ∎

Le théorème suivant donne une caractérisation et un procédé d'orthogonalisation de bases de Riesz dans un cas particulier qui nous intéressera.

Proposition 1 *Soit $g \in L_2(\mathbb{R})$,*

$$\begin{aligned} V &= span(\tau_k g, k \in \mathbb{Z}), \\ \theta(\omega) &= \sum |\hat{g}(\omega + 2k\pi)|^2. \end{aligned}$$

Les conditions

(H1) $A \leq \theta \leq B$

(H2) Les $\tau_k g$ forment une base de Riesz

sont équivalentes ; en définissant

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{g}(\omega)/\sqrt{\theta(\omega)},$$

les $\tau_k \varphi$ forment une base orthonormée de V.

Démonstration. On ne montrera que (H2)$\Longrightarrow$ (H1) qui est le seul point difficile. Pour toute suite finie a_k, notons

$$f_a = \sum a_k e^{-ik\omega}.$$

Alors

$$\|f_a\|_2^2 = 2\pi \sum a_k^2$$

et l'on a par ailleurs

$$\begin{aligned} 2\pi \| \sum a_k \tau_k g\|^2_{L_2(\mathbb{R})} &= \| \sum a_k e^{-ik\omega} \hat{g}(\omega)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \\ &= \| |f_a|^2 \theta\|_{L_1([0,2\pi])} \end{aligned}$$

donc (H2) devient

$$A\|f_a\|_2^2 \le \||f_a|^2\theta\|_1 \le B\|f_a\|_2^2.$$

θ est donc dans $L_1([0,2\pi])$ et les f_a formant une partie dense de $C([0,2\pi])$ (Stone-Weierstrass), on a que

$$A\|f\|_2^2 \le \||f|^2\theta\|_1 \le B\|f\|_2^2$$

pour toute f continue. Toute fonction de L_∞ étant limite p.s. d'une suite bornée de fonctions continues, l'inégalité s'étend à $f \in L_\infty([0,2\pi])$. En choisissant $f = 1_{\{\theta > B+\epsilon\}}$ on trouve immédiatement que $\|f\|_1 = 0$,donc $\theta \le B$, et de même on montre $\theta \ge A$. Pour le second point, il suffit de remarquer que la fonction θ associée à φ est égale à 1 et donc, pour φ les constantes A et B sont égales. ∎

3 Fonctions d'échelle et bases orthogonales

Le but de ce paragraphe est de fabriquer des paires (φ, ψ) permettant d'obtenir la relation (2) de l'introduction. Pour préparer des résultats futur dans le cadre des bases biorthogonales, on n'imposera pas toujours à la fonction d'echelle φ d'avoir ses translatées (par des entiers) orthogonales.

Commençons par la définition d'une analyse multirésolution ([13] § 1.1.3)

Définition 3 *Une analyse multirésolution est la donnée d'une fonction φ de norme 1 dans $L_2(\mathbb{R})$ et d'une suite (V_j) d'espaces définis par*

$$\begin{aligned} \varphi_{jk} &= 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) \\ V_j &= span(\varphi_{jk}, k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

avec les propriétés

(AM0) *La famille $(\varphi_{0k})_k$ forme une base de Riesz*

(AM1) $\cap V_j = \{0\}$

(AM2) $\overline{\cup V}_j = L_2(\mathbb{R})$

(AM3) $V_j \subset V_{j+1}$

On considérera également l'hypothèse

(AM4) $\langle \varphi_{jk}, \varphi_{jl}\rangle = \delta_{kl}$.

La propriété (AM3) signifie l'existence d'une suite (h_k) de carré intégrable telle que

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum h_k \varphi(2x - k). \tag{9}$$

(cf théorème 1 p.5). Une telle fonction sera appelée fonction d'échelle. Le théorème suivant montre comment construire des bases orthogonales de $L_2(\mathbb{R})$ sous (AM1-4) (on construira au §7 des bases biorthogonales sous (AM0-3)) :

Théorème 3 *Sous (AM1-4) on définit*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{2}\sum g_k\varphi(2x-k)\ , \quad g_k=(-1)^{k+1}\bar{h}_{1-k} \\ \psi_{jk} &= 2^{j/2}\psi(2^jx-k) \\ W_j &= span(\psi_{jk}, k\in\mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{10}$$

alors $V_{j+1}=V_j\bigoplus W_j$ *et les* ψ_{jk}*,* $j,k\in\mathbb{Z}$*, forment une base orthogonale de* $L_2(\mathbb{R})$*. On a les relations*

$$L_2(\mathbb{R})=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = V_{j_0}\bigoplus\bigoplus_{j\geq j_0} W_j \quad \textit{pour tout } j_0 \tag{11}$$

$$\sqrt{2}\varphi(2x-m)=\sum_k \bar{g}_{m-2k}\psi(x-k)+\bar{h}_{m-2k}\varphi(x-k) \tag{12}$$

$$\sum h_l\bar{h}_{l+2k}=\delta_{k0}. \tag{13}$$

Par conséquent, pour tout j_0*,* $(\varphi_{j_0k},\psi_{jk}, j\geq j_0, k\in\mathbb{Z})$ *forme une base orthogonale de* $L_2(\mathbb{R})$ *et pour toute* $f\in L_2(\mathbb{R})$ *on a*

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f,\varphi_{j_0k}\rangle\varphi_{j_0k}(x)+\sum_{j\geq j_0,k\in\mathbb{Z}}\langle f,\psi_{jk}\rangle\psi_{jk}(x).$$

De plus, en posant

$$\begin{aligned} m_0(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum h_k e^{-ik\omega} \\ m_1(\omega) &= e^{-i\omega}\bar{m}_0(\omega+\pi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum g_k e^{-ik\omega}, \end{aligned}$$

on a

$$\hat{\phi}(\omega)=m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \tag{14}$$

$$\hat{\psi}(\omega)=m_1(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \tag{15}$$

$$|m_0(\omega)|^2+|m_0(\omega+\pi)|^2=1 \tag{16}$$

$$m_0(\omega)\bar{m}_1(\omega)+m_0(\omega+\pi)\bar{m}_1(\omega+\pi)=0. \tag{17}$$

Démonstration. La démonstration de ce théorème ne pose pas de difficulté et les détails sont laissés en exercice ; en voici les étapes :

- (13) est la conséquence immédiate de (9) et de l'orthogonalité des $\tau_k\varphi$.
- $\psi\in L_2$ puisque $(g_k)_k\in l_2$ et son orthogonalité aux $\tau_k\varphi$ vient des équations (9), (10) et de (AM4). L'orthogonalité des $\tau_k\psi$ entre elles vient de (10), (13) et de (AM4).
- L'équation (12) vient de l'identité des normes des deux membres et de l'identité des produit scalaires avec les fonctions othogonales $(\tau_k\psi,\tau_k\psi)$. Elle peut aussi se vérifier dans le domaine de Fourier comme une conséquence de (16) et (17).
- Les équations (10) et (12) ainsi que les propriétés d'orthogonalité impliquent $V_{j+1}=V_j\bigoplus W_j$, et donc avec (AM1) et (AM2), que les ψ_{jk} forment une base orthogonale de L_2. D'où les relations (11).
- Les équations (14,15) sont la réécriture de (9,10) dans le domaine de Fourier ; (16) est la réécriture de (13), et (17) est une conséquence de la définition de la suite (g_k).

∎

Notes :

- Les ψ_{jk} sont de moyenne nulle ; cette base ne donne donc pas des séries convergentes, par exemple, dans L_1. On préfère généralement utiliser la décomposition en (φ,ψ) ("basses fréquences/hautes fréquences") associée à $L_2(\mathbb{R})=V_0\bigoplus W_0\bigoplus W_1$... (sur la convergence des ces séries, voir §4.1).

– Généralement, on aura $\varphi \in L_1$ et $\int \varphi = 1$, et donc en intégrant la relation (9) on obtient
$$\sum h_k = \sqrt{2}$$
($m_0(0) = 1$, cf equations (14,21)). L'équations (16) implique alors que $\sum g_k = 0$.

L'ingrédient de base pour construire φ est le résultat suivant qui traduit les conditions (AM1-4) dans le domaine de Fourier :

Proposition 2 *Soit* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$

(i) *(AM0)* $\Longleftrightarrow 0 < A < \sum |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 < B < \infty$, *p.s.*

(AM4) $\Longleftrightarrow \sum |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$, *p.s.*

(ii) *(AM0) ⇒ (AM1) ; en particulier (AM4) ⇒ (AM1)*

(iii) *Sous (AM0) : (AM3) est satisfaite si et seulement si*
$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \tag{18}$$
pour une fonction m_0 2π*-périodique de* $L_2([0, 2\pi])$ *; et alors*
$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum h_k e^{-ik\omega}$$

(iv) *Sous (AM3) : (AM2)* $\Longleftrightarrow$ *p.s.* ω $\exists j \in \mathbb{Z}$ $\quad \hat{\phi}(2^j\omega) \neq 0$

Note : Pour le dernier point, en pratique, $\hat{\phi}$ sera continue et non nulle en 0.

Démonstration.

(i) est une conséquence de la proposition 1 p.6.

(ii) Soit $f \in \cap V_j$, alors les fonctions $2^{-j/2}f(2^{-j}x)$ sont toutes dans V_0 et l'on peut écrire
$$2^{-j/2}f(2^{-j}x) = \sum_k a_{jk}\varphi(x - k). \tag{19}$$
Notons que la condition de base de Riesz implique que les suites $(a_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ ont une norme l_2 bornée ; les fonctions
$$\hat{a}_j(\omega) = \sum_k a_{jk}e^{-ik\omega}$$
sont donc uniformément bornées dans $L_2[0, 2\pi]$. En prenant la transformée de Fourier de l'expression (19), il vient
$$\hat{f}(\omega) = 2^{-j/2}\hat{a}_j(2^{-j}\omega)\hat{\phi}(2^{-j}\omega)$$
et donc pour tout intervalle I de la forme $[x, x + 1]$ on a
$$\begin{aligned}\left(\int_I |\hat{f}(\omega)|d\omega\right)^2 &\leq 2^{-j}\int_I |\hat{a}_j(2^{-j}\omega)|^2 d\omega \int_I |\hat{\phi}(2^{-j}\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \int_{2^{-j}I} 2^j|\hat{a}_j(\omega)|^2 d\omega \int_{2^{-j}I} |\hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega.\end{aligned}$$
Faisons tendre j vers $-\infty$, alors la première intégrale reste bornée et la seconde tend vers 0 si I ne contient pas 0 ; $\hat{f}$ est donc nulle et donc f aussi.

(iii) est la réécriture de l'équation (9) dans le domaine de Fourier (sous l'hypothèse de base de Riesz, l'existence de $(h_k) \in L_2$ est une conséquence du théorème 2 p.6).

(iv) Soit f une fonction de $(\cup V_j)^\perp$; une telle fonction satisfait pour tous j, k :

$$\int f(x)\varphi(2^j x - k)dx = 0$$

donc pour tous j_0, k_0, k et $j \geq j_0$ on a :

$$\int f(x + 2^{-j_0}k_0)\varphi(2^j x - k)dx = 0.$$

Cette relation d'orthogonalité reste vraie pour tout j (puisque $V_j \subset V_{j+1}$). Fixons $k = 0$ et j, et faisons tendre $2^{-j_0}k_0$ vers un réel x_0 ; alors $f(x+2^{-j_0}k_0)$ tend dans L_2 vers $f(x+x_0)$ (en effet cette propriété, vraie pour les fonctions continues à support compact, s'étend par densité à tout L_2). On a donc pour tout j et presque tout x_0 :

$$\begin{aligned} \int f(x + x_0)\varphi(2^j x)dx &= 0 \\ \int \hat{f}(\omega)e^{-i\omega x_0}\hat{\phi}(2^{-j}\omega)d\omega &= 0, \end{aligned}$$

puisque la transformée de Fourier est une isométrie (à une constante près), et donc $\hat{f}(\omega)\hat{\phi}(2^{-j}\omega) = 0$ p.s. L'hypothèse faite sur $\hat{\phi}$ entraine que $\hat{f} = 0$. ∎

3.1 Construction partant d'une base de Riesz

Une première méthode consiste à partir d'une fonction g satisfaisant l'équation (9) mais dont les translatées ne sont pas orthogonales ; on utilise alors la proposition 1 p.6 pour réaliser l'orthogonalisation, en remarquant que si g est une fonction d'échelle, alors la fonction φ également. Cette méthode est utilisée dans le cas des ondelettes de Battle-Lemarié (cf §3.5.4). Il faut noter que si la suite h_k associée à g est finie, ce ne sera généralement pas le cas pour la suite associée à φ.

3.2 Construction partant de m_0

Une autre option consiste à partir de m_0 et à construire φ ensuite. Soit m_0 une fonction 2π-périodique, on considère les hypothèses :

(M1) m_0 est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable en 0 et $m_0(0) = 1$.

(M2) Condition de Cohen : Il existe un compact K congru à $[-\pi, \pi]$ tel que pour tout ω de K on ait $m_0(2^{-j}\omega) \neq 0,\ j \geq 1$ (condition réalisée si $m_0 \neq 0$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$).

(M3) Il existe une fonction 2π-périodique $\mu \geq 0$, $\mu(0) > 0$, continue en 0, $\mu \in L_\infty$ telle que

$$\mu(2\omega) = |m_0(\omega)|^2\mu(\omega) + |m_0(\omega + \pi)|^2\mu(\omega + \pi) \tag{20}$$

(la fonction θ donnée plus bas conviendra si φ a suffisamment de régularité pour assurer la convergence uniforme de la somme).

(M4) $|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1$
(si $(h_k) \in l_2$, cette condition équivaut à (13)).

(MP) m_0 est un polynome trigonométrique de la forme $m_0(\omega) = 1/\sqrt{2}\sum_p^P h_k e^{-ik\omega}$, $m_0(0) = 1$, et la matrice de terme général $(\sum_n h_n \bar{h}_{n+j-2i})_{-L\leq i,j\leq L}$ $(L = P - p - 1)$ admet 1 comme valeur propre simple et le vecteur propre associé peut s'écrire comme la suite des coefficients de Fourier d'une fonction μ strictement positive.

Notes :

- La condition (M1) peut être remplacée par : $m_0(0) = 1$, m_0 est continue, et le module de continuité en 0 $u(h) = \sup_{|\omega| \le h} |m_0(\omega) - 1|$ satisfait $\sum u(2^{-j}) < \infty$.
- Il semble qu'en pratique, la condition (M2) soit toujours réalisée parce que $m_0 \neq 0$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$; à propos de (M2), voir aussi [13] 6.3. §3.3.
- Le théorème 5, plus bas permet de remplacer (M1-3) par (MP).

Puis on considère les fonctions

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) \tag{21}$$

$$\theta(\omega) = \sum |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2. \tag{22}$$

On a alors le résultat clé

Théorème 4
(i) *Sous (M1), le produit converge pour tout ω, et est continu.*
(ii) *Sous (M1,M3) $\hat{\phi} \in L_2(\mathbb{R})$.*
(iii) *Sous (M1,M3) : (M2) $\Leftrightarrow$ les fonctions $\varphi(x-k)$ forment une base Riesz. Dans ce cas $\theta = \mu$.*
(iv) *Sous (M1,M2,M4) les $\varphi(x-k)$ sont orthonormées et (AM1-4) sont vérifiées.*
(v) *Sous (M1,M2) et si $\hat{\phi} \in L_p$ $(p \ge 1)$ on a*

$$\hat{\phi} = \lim_{l \to \infty} f_l \quad \textit{p.s. et dans } L_p$$

avec

$$f_l(\omega) = 1_{[-\pi,\pi]}(2^{-l}\omega) \prod_{j=1}^{l} m_0(2^{-j}\omega).$$

Notes :

- La dernière propriété est techniquement très importante ; c'est elle qui permet de montrer les propriétés d'orthogonalité des $\varphi(x-k)$ sous (M4) (et d'autres propriétés plus tard dans le cas des bases biorthogonales).
- Si les $\tau_k\varphi$ forment une base de Riesz, alors $\mu = \theta$ est solution de l'équation (20) ; l'hypothèse (M3) est donc nécessaire ; et donc (M2) aussi.

Démonstration.

(i) Si (M1) est vérifiée, le produit est uniformément convergent sur tout compact.

(ii) Si maintenant (M3) est vérifiée, m_0 et f_l sont bornées et on a pour tout k et $l > 0$

$$
\begin{aligned}
\int e^{-ik\omega}|f_l(\omega)|^2\mu(2^{-l}\omega)d\omega &= \int_{-2^l\pi}^{2^l\pi} e^{-ik\omega}\prod_{j=1}^{l}|m_0(2^{-j}\omega)|^2\mu(2^{-l}\omega)d\omega \\
&= 2^l\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^lk\omega}\prod_{j=0}^{l-1}|m_0(2^j\omega)|^2\mu(\omega)d\omega \ = \ I_l \\
&= 2^l\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^lk\omega}\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^j\omega)|^2(|m_0(\omega)|^2\mu(\omega))d\omega \\
&= 2^l2^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^lk\omega}\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^j\omega)|^2(|m_0(\omega)|^2\mu(\omega)+|m_0(\omega+\pi)|^2\mu(\omega+\pi))d\omega \\
&= 2^l2^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^lk\omega}\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^j\omega)|^2\mu(2\omega)d\omega \\
&= 2^{l-1}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i2^{l-1}k\omega}\prod_{j=0}^{l-2}|m_0(2^j\omega)|^2\mu(\omega)d\omega \ = \ I_{l-1} \ = \ I_0 \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\omega}\mu(\omega)d\omega. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Cette égalité, utilisée avec $k = 0$ entraine, en utilisant le lemme de Fatou, que $\hat{\phi} \in L_2$.

(v) Supposons que (M2) est vérifiée ; à cause de (M1), on peut également supposer que 0 est un point intérieur de K. Commençons par montrer que si

$$g_l(\omega) = 1_K(2^{-l}\omega)\prod_{j=1}^{l} m_0(2^{-j}\omega)$$

alors

$$\hat{\phi} = \lim_{l\to\infty} g_l \quad \text{dans } L_p.$$

Il s'agit de pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée puisque la convergence presque sûre est réalisée ; pour tout $\omega \in K$, $|\hat{\phi}(\omega)|$ est plus grand qu'une constante $\delta > 0$ (grâce à (M1,M2)) et on a

$$|g_l(\omega)| = |\hat{\phi}(\omega)|/|\hat{\phi}(2^{-l}\omega)| \leq |\hat{\phi}(\omega)|/\delta.$$

Les fonctions $|\hat{\phi} - g_l|^p$ sont donc plus petites que $|\hat{\phi}(\omega)|^p(1 + 1/\delta)^p$ et on peut appliquer le théorème de Lebesgue. Montrons maintenant la convergence des f_l (cf [11] lemme 4.5.) ; soit $V = [-\pi, \pi] \cap K$, V est un voisinage fermé de 0 et

$$
\begin{aligned}
\|f_l - \hat{\phi}\|_p &\leq \|f_l 1_V(2^{-l}\omega) - \hat{\phi}\|_p + \|f_l(1 - 1_V(2^{-l}\omega))\|_p \\
&= \|g_l 1_V(2^{-l}\omega) - \hat{\phi}\|_p + \|g_l(1 - 1_V(2^{-l}\omega))\|_p
\end{aligned}
$$

la substitution de f_l par g_l dans le dernier terme vient de la périodicité de m_0 et de la structure particulière de K. On peut alors appliquer le théorème de Lebesgue dans ces deux termes et la limite est 0.

(iii) Sous (M1,M2,M3), on a, en passant à la limite dans l'équation (23)

$$\int_0^{2\pi} \theta(\omega)e^{-ik\omega}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{-ik\omega}d\omega = \mu(0)^{-1}\int_0^{2\pi} \mu(\omega)e^{-ik\omega}d\omega$$

donc $\theta(\omega) = \mu(\omega)/\mu(0)$ est bornée supérieurement ; θ est également supérieure à la constante δ^2 définie plus haut, et donc les $\tau_k\varphi$ forment une base de Riesz (cf proposition 1 p.6).

Réciproquement, si les $\tau_k\varphi$ forment une base de Riesz, $\theta > A > 0$ et donc (M2) est vérifiée.

(iv) Sous (M1,M2,M4), $\theta = \mu = 1$ et donc les $\tau_k\varphi$ sont orthogonales (cf proposition 1 p.6) ; c'est aussi une conséquence de l'équation (23). ∎

Dans le cas où la suite (h_k) est de longueur finie, on a le

Théorème 5 *Sous (MP), les hypothèses (M1-3) sont satisfaites.*

Démonstration. En effet la fonction μ satisfait (M3) car A est la matrice de l'application

$$\mu(\omega) \longrightarrow |m_0(\omega/2)|^2\mu(\omega/2) + |m_0(\omega/2+\pi)|^2\mu(\omega/2+\pi)$$

sur l'espace des polynomes de la forme $\sum_{-L}^{L} c_k e^{-ik\omega}$. Donc $\varphi \in L_2$. Les coefficients de Fourier de θ sont les $\hat{\theta}_l = \int \varphi(x)\varphi(x-l)dx$ (vérification immédiate) qui sont nuls pour $|l| > L$ (car φ a son support sur $[p, P]$, cf théorème 6 p.13 (ii)) ; la relation (9) implique qu'ils forment un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 ; donc $\theta = \mu > 0$ et (M2) est satisfaite. ∎

3.3 Propriétés d'une fonction φ construite à partir de m_0

Dans ce paragraphe, on essaye d'obtenir des propriétés sur φ à partir de propriétés sur m_0 ; la fonction φ est construite à partir de l'équation (21) ; il va sans dire que des propriétés de ψ peuvent être déduites à l'aide de la relation (10).

Théorème 6 *On suppose (M1) satisfaite et φ est donnée par la relation (21).*

(i) *On suppose que m_0 est un polynome trigonométrique satisfaisant (M2) pouvant se factoriser sous la forme*

$$m_0(\omega) = ((1+e^{-i\omega})/2)^M \tilde{m}_0(\omega) \qquad \tilde{m}_0(\pi) \neq 0.$$

Posons $\tilde{m}_0(\omega) = 1/\sqrt{2}\sum_p^P u_k e^{-ik\omega}$ et $L = P - p - 1$. On considère alors la matrice $(2L+1)\times(2L+1)$ de terme général $A_{ij} = \sum_n u_n \bar{u}_{n+j-2i}$, $-L \leq i, j \leq L$. Soit ρ le rayon spectral de A, on a

$$\varphi \in W_2^s(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow s < M - \frac{1}{2}\log_2(\rho).$$

(ii) *Si m_0 est un polynome trigonométrique à coefficients nuls à l'extérieur de $[N_0, N_1]$, alors φ a son support dans $[N_0, N_1]$.*

(iii) *Si les h_k sont ≥ 0, alors φ aussi.*

(iv) *On suppose (M1-3). Si $m_0^{(p)} \in L_\infty([0, 2\pi])$ alors $\int |\varphi(x)|^2|x|^{2p}dx < \infty$, et donc $\int |\varphi(x)||x|^q dx < \infty$ pour tout $q < p - 1/2$.*

(v) *On suppose (M1-3), p est tel que* $\int(1+|x|^p)|\varphi(x)|dx < \infty$, *et* ψ *est définie par la relation (10) avec une suite* (g_i) *de* l_2 *arbitraire.*

– *Les moments de* φ *et de* ψ, $M_q = \int x^q\varphi(x)dx$, $N_q = \int x^q\psi(x)dx$, *satisfont la récurrence*

$$(2^q-1)M_q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{q-1}\left(\sum_k h_k k^{q-i}\right)C_q^i M_i, \quad q \leq p$$

$$2^q N_q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=0}^{q}\left(\sum_k g_k k^{q-i}\right)C_q^i M_i \quad \textit{(si la double série converge absolument)}$$

– $\int\varphi(x)x^l dx = 0$, $l = 1,..p$ *si* $\sum h_k k^l = 0$, $l = 1,...p$ *(i.e.* $m_0^{(l)}(0) = 0$*).*

– *de même,* $\int x^l\psi(x)dx = 0$, $l = 0...p$ *si* $\sum g_k k^l = 0$, $l = 0,..p$ *(i.e.* $m_1^{(l)}(0) = 0$*).*

– *Si* $m_0 \in C^p[0,2\pi]$ *et* $m_0^{(l)}(\pi) = 0$, $l = 0,..p$, *alors,*

$$\sum_j j^l\varphi(x-j) = \int(x-y)^l\varphi(y)dy \qquad l = 0,..p. \tag{24}$$

et donc les polynomes de degré $\leq p$ *sont conbinaison linéaire des* $\tau_k\varphi$.

(vi) *On suppose (M1-3) et* $\hat{\phi} \in L_1$. *Alors*

$$\varphi(k) = \delta_{0k}, k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow h_{2k} = \delta_{0k}/\sqrt{2}, k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow m_0(\omega) + m_0(\omega+\pi) = 1, \ \omega \in [0,2\pi].$$

(i.e. φ *est interpolante ssi h est un filtre à trous).*

Notes :

– Remarquons que la transformation $m_0 \to \cos(\omega/2)m_0$ se traduit par $\varphi \to \int_{x-1/2}^{x+1/2}\varphi(y)dy$; ceci explique le caractère régularisant de M dans le (i).
– La condition de moments nuls pour ψ dans (v) traduit le fait que, en un certain sens, ψ est la dérivée p-ième d'une fonction régulière.
– Notons également le corollaire 5.5.1. de [13] qui dit essentiellement que si $\psi \in C^m(\mathbb{R})$ engendre une base orthogonale et possède m+2 moments finis, alors les m premiers moments sont nuls (dans (i) comme dans (v), c'est l'ordre d'annulation de m_0 en π qui intervient). Dans le cas des bases biorthogonales, la régularité de ψ sera associée à des moments nuls pour $\tilde{\psi}$ (et réciproquement).

Démonstration.

(i) La démonstration se trouve dans [35].

(ii) m_0 s'écrit

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=N_0}^{N_1} h_k e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}(\sum_{k=N_0}^{N_1} h_k\delta_k)$$

si bien que $m_0(2^{-j}\omega)$ est la transformée de Fourier d'une distribution à support sur $[2^{-j}N_0, 2^{-j}N_1]$ et donc les fonctions $\hat{\phi}_l(x) = \hat{\phi}(\omega)/\hat{\phi}(2^{-l}\omega)$ satisfont, pour toute fonction $g \in \mathcal{S}$ à support à l'extérieur de $[N_0, N_1]$, la relation

$$\langle\hat{g}, \hat{\phi}_l\rangle = 0.$$

Comme $\hat{\phi}_l$ est majorée (uniformément en l) par une puissance de $|\omega|$ (car m_0 est bornée) on peut passer à la limite et la relation ci-dessus reste valide pour $\hat{\phi}$. Donc φ est à support dans $[N_0, N_1]$.

(iii) Même méthode ($g \geq 0 \Rightarrow \langle\hat{g}, \hat{\phi}\rangle \geq 0$).

(iv) Supposons $p=1$. m_0' est bornée et on peut dériver le produit terme à terme

$$\hat{\phi}'(\omega)=\sum_{l=1}^{\infty}2^{-l}\prod_{j=1}^{l-1}m_0(2^{-j}\omega)m_0'(2^{-l}\omega)\hat{\phi}(2^{-l}\omega).$$

On va voir que cette série converge dans L_2. Estimons le carré de la norme de son l-ième terme, en s'aidant de la démonstration du théorème 4 p.11 (ii) pour le calcul de I_l $(k=0)$:

$$\begin{aligned}
2^{-2l}\int\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^{-j}\omega)|^2|m_0'(2^{-l}\omega)|^2|\hat{\phi}(2^{-l}\omega)|^2d\omega &\leq C2^{-2l}\int\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^{-j}\omega)|^2|\hat{\phi}(2^{-l}\omega)|^2d\omega\\
&= C2^{-l}\int\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^{j}\omega)|^2|\hat{\phi}(\omega)|^2d\omega\\
&= C2^{-l}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^{j}\omega)|^2\theta(\omega)d\omega\\
&\leq CC'2^{-l}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=1}^{l-1}|m_0(2^{j}\omega)|^2\theta(2\omega)d\omega\\
&= CC'2^{-l}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{j=0}^{l-2}|m_0(2^{j}\omega)|^2\mu(\omega)d\omega \qquad \text{car} \quad \mu=\theta\\
&= CC'2^{-2l+1}I_{l-1}=CC'2^{-2l+1}\|\hat{\phi}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $p>1$ le calcul est le même sauf que C' sortira p fois et que les multiples trous dans le produit obligerons à calculer effectivement les intégrales en recourant à la même astuce que dans la démonstration de l'équation (23).

Pour finir, notons que

$$\left(\int|\varphi(x)||x|^q dx\right)^2\leq\int|\varphi(x)|^2|x|^{2q}(1+|x|^{1+\epsilon})^{-1}dx\int(1+|x|^{1+\epsilon})dx$$

(Schwartz) et donc si $q<p-1/2$, on conclut sans problème en choisissant ϵ assez petit.

(v) Les relations sont des conséquences élémentaires de la relation d'échelle (9) et de (10). Remarquons que ces moments valent $\partial^l\hat{\phi}(0)$ (ou $\partial^l\hat{\psi}(0)$), et donc leurs annulation peut être également vue comme une conséquence de $m_0^{(l)}(0)=0$ (ou $m_1^{(l)}(0)=0$) (cf (18) et (15)).

Pour la dernière relation, notons que la condition $m_0^{(l)}(\pi)=0$, $l=0,..p$ implique $\partial^l\hat{\phi}(2j\pi)=0$ si $j\neq 0$ (exprimer $\hat{\phi}$ en fonction de m_0 et dériver le produit). On applique alors la formule de Poisson

$$\sum f(j)=\sum\hat{f}(2j\pi)$$

à la fonction $f(t) = t^l \varphi(x-t)$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum j^l \varphi(x-j) &= \sum i^l \partial^l (e^{-i\omega x}\hat{\phi}(-\omega))_{\omega=2j\pi} \\
&= i^l \partial^l (e^{-i\omega x}\hat{\phi}(-\omega))_{\omega=0} \\
&= \sum_{k\leq l} C_l^k i^{k-l} x^k \partial^{l-k}\hat{\phi}(0) \\
&= \sum_{k\leq l} C_l^k i^{k-l} x^k \int (-iy)^{l-k}\varphi(y)dy \\
&= \int (x-y)^l \varphi(y)dy.
\end{aligned}$$

(vi) La deuxième équivalence est immédiate ; considérons la première. Le sens direct est immédiat en utilisant l'équation (9). Pour le sens retour, considérons la fonction φ_l telle que $\hat{\varphi}_l = f_l$; en vertu du théorème 4 p.11 les fonctions f_l convergent vers $\hat{\phi}$ dans L_1 et donc les φ_l convergent vers φ uniformément. De plus, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
2\pi\varphi_l(k) &= \int e^{ik\omega} f_l(\omega)d\omega \\
&= 2^l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2^l k\omega} \prod_{j=0}^{l-1} m_0(2^j\omega)d\omega \quad = I_l \\
&= 2^l 2^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2^l k\omega} \prod_{j=1}^{l-1} m_0(2^j\omega)(m_0(\omega)+m_0(\omega+\pi))d\omega \\
&= 2^{l-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2^l k\omega} \prod_{j=1}^{l-1} m_0(2^j\omega)d\omega \\
&= 2^{l-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i2^{l-1} k\omega} \prod_{j=0}^{l-2} m_0(2^j\omega)d\omega \quad = I_{l-1} \quad = I_0 = 2\pi\delta_{0k}
\end{aligned}$$

∎

3.4 Considérations algorithmiques ; filtres en quadrature

3.4.1 Calcul de la transformée de f : algorithme FWT

Les équations (9) et (10) impliquent que les quantités

$$\alpha_{jk} = \langle f, \varphi_{jk}\rangle, \quad \beta_{jk} = \langle f, \psi_{jk}\rangle$$

satisfont

$$\alpha_{jk} = \sum_l \bar{h}_{l-2k}\alpha_{j+1,l} \tag{25}$$

$$\beta_{jk} = \sum_l \bar{g}_{l-2k}\alpha_{j+1,l}. \tag{26}$$

On peut donc calculer les α_{Jk} à l'échelle la plus fine J puis filtrer avec les relations ci-dessus ; les propriétés énoncées dans le théorème 3 p.8 entrainent que ces filtres, caractérisés par m_0 et m_1 sont des filtres miroirs en quadrature [34] ; m_0 est typiquement un filtre passe-bas ($m_0(0) = 1$, $m_0(\pi) = 0$) et m_1 un passe-haut. Notons que le facteur 2 (dans $2k$) signifie qu'il s'agit en fait d'un filtrage suivi d'une décimation et donc la suite α_J contient le même nombre d'éléments que les suites $\beta_{J-1}, ..., \beta_1, \beta_0, \alpha_0$ réunies (aux effets de bord près). L'équation (12) permet d'obtenir le filtre de synthèse :

$$\alpha_{jk} \quad = \quad \sum_l h_{k-2l}\alpha_{j-1,l} + g_{k-2l}\beta_{j-1,l}. \tag{27}$$

Le facteur 2 a ici le rôle d'une extrapolation par des zéros.

Pour le calcul des $\langle f, \varphi_{jk} \rangle$, voir aussi §6

3.4.2 Calcul de φ en cascade

On peut appliquer la formule ci-dessus avec $f = \varphi$ et alors $\beta_{jk} = 0$ et $\alpha_{jk} = \langle \varphi, \varphi_{jk} \rangle$ se calcule avec

$$\alpha_{jk} = \sum_l h_{k-2l}\alpha_{j-1,l} \qquad \alpha_{0k} = \delta_{0k}.$$

ce qui permet d'obtenir φ puisque $2^{j/2}\alpha_{jk} = 2^{j/2}\langle \varphi, \varphi_{jk} \rangle$ est une bonne approximation (si j est grand) de $\varphi(k2^{-j})$; la convergence est facile à étudier à partir de la régularité de φ (cf [13] §6.5). Les termes de la suite α_{jk} correspondent également aux valeurs prises par la fonction φ_j solution de

$$\varphi_{j+1} = \sqrt{2} \sum h_k \varphi_j(2x - k), \qquad \varphi_0 = 1_{[-1/2,1/2]}. \tag{28}$$

Une autre méthode consiste à commencer par calculer φ sur les entiers en utilisant la relation d'échelle (9), puis à en déduire successivement φ sur les demi-entiers, les quarts d'entiers ...

3.5 Exemples

3.5.1 Ondelettes régulières d'Yves Meyer

On choisit m_0 régulière telle que

$$\begin{array}{lcl} |m_0| & > & 0 \quad sur \;\; [-\pi/2, \pi/2] \\ |m_0| & = & 1 \quad sur \;\; [-\pi/3, \pi/3] \\ |m_0| & = & 0 \quad sur \;\; [-\pi, -2\pi/3] \cup [2\pi/3, \pi]. \end{array}$$

Alors les conditions du théorème 4 p.11 sont satisfaites et on vérifie aisément que $\hat{\phi}(\omega)$ est égal à $m_0(\omega/2)$ sur $[-4\pi/3, 4\pi/3]$ et nul ailleurs. φ est donc C^∞.

3.5.2 Ondelettes à support compact d'Ingrid Daubechies

On cherche m_0 satisfaisant (M4) de la forme

$$m_0(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega)$$

où $\mathcal{L}$ est un polynome trigonométrique le plus court possible ; le but étant d'avoir à la fois un petit support et de la régularité pour φ (cf. théorème 6 p.13). L'équation (16), se réécrit

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1 \;, \qquad y = \sin(\omega/2)^2 \;, \qquad P(y) = |\mathcal{L}(\omega)|^2$$

et les solutions sont de la forme ([13] chap. 6) :

$$P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} C^k_{N-1+k} y^k + y^N R(1/2 - y)$$

où R est un polynome impair tel que $P(y) \geq 0$, $y \in [0, 1]$; la somme correspond au debut du developpement de $(1 - y)^{-N}$; on obtient donc $\mathcal{L}$ sous la forme de la racine carrée (à extraire) du polynome $P(y)$. Pour obtenir (h_k), il faut exprimer m_0 comme polynome en $e^{i\omega}$. Les ondelettes de Daubechies correspondent au choix $R = 0$. Les fonctions φ_N et ψ_N obtenues sont à support sur [0,2N-1], et les ψ sont orthogonales à x^p, $p = 0, ...N - 1$. Les valeurs des coefficients sont données dans [13]. On peut vérifier que

$$\begin{aligned} |m_0(\omega)|^2 &= 2^{-2N+1}\frac{(2N-1)!}{(N-1)!^2}\int_\omega^\pi \sin^{2N-1}(x)dx \\ &= 2^{-4N+2}\frac{(2N-1)!}{(N-1)!^2}\sum(-1)^p\frac{C_{2N-1}^{p+N}}{2p+1}(e^{(2p+1)i\omega}+1). \end{aligned}$$

3.5.3 Fractions rationnelles

On choisit m_0 de la forme [21]

$$m_0(\omega) = \frac{R(z)}{R(z) + R(-z)}$$

où

$$R(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_1 z^{2n} + a_0 z^{2n+1}$$

est un polynome symétrique arbitraire d'ordre impair $N = 2n + 1$. Le lecteur pourra vérifier que la condition (M4) est miraculeusement satisfaite et que la fonction d'échelle associée est interpolante, symétrique et à décroissance rapide (cf théorème 6 p.13). Par exemple, en choisissant $R(z) = (1 + z)^N$, on vérifie facilement que φ et ψ sont orthogonales à x^l, $l = 1, ..N$.

3.5.4 Ondelettes de Battle-Lemarié

C'est un cas d'utilisation de la proposition 1 p.6 où g est une fonction spline. Rappelons que la fonction spline d'ordre n est une fonction C^{n-1} polynomiale d'ordre n par morceaux qui est la convolée $n + 1$ fois de $1_{[0,1]}$ avec elle-même. Voir [13] 5.4.

3.5.5 Coiflettes (ondelettes de R.Coifman)

On désire, pour des raisons techniques (cf §6), avoir les relations

$$\int x^l\psi(x)dx = 0, \quad \int x^l\varphi(x)dx = 0, \quad l = 1, ..L - 1.$$

On se met dans le cadre des ondelettes à support compact ; ces conditions une fois traduites en termes du polynome m_0 (cf théorème 6 p.13), conduisent à la forme :

$$m_0(\omega) = (1 + e^{i\omega})^L\mathcal{L}_1(\omega) = 1 + (1 - e^{i\omega})^L\mathcal{L}_2(\omega).$$

Nouveau problème d'algèbre. Les détails sont dans [13] 8.2.

4 Ondelettes et espaces fonctionnels

Tout ce paragraphe est emprunté à [28] et [33]. Les théorèmes suivants permettent de ramener, sur certains points, l'étude et l'estimation de fonctions à l'étude et l'estimation des suites (coefficients d'ondelettes). Dans tout ce paragraphe d désigne la dimension de l'espace euclidien (les ondelettes en dimension $d > 1$ sont brièvement évoquées au paragraphe 9). On aura besoin d'utiliser des ondelettes suffisamment régulières :

Définition 4 *Une analyse multirésolution est dite s-régulière si*

$$|\partial^p\varphi(x)| \leq C_m(1 + |x|)^{-m}, \quad p = 0, ..s, \quad m \in \mathbb{N}.$$

En fait, il suffit d'avoir cette relation sur la fonction g de la proposition1 p.6 (cf [28] chapitre II, définitions 1 et 2 et théorème 2).

4.1 Espaces de Besov

Ces espaces B^s_{pq} sont assez proches des espaces de Sobolev W^s_p (cf §1), comme l'indiquent les inclusions données plus bas ; l'indice q semble assez secondaire et l'interprétation qu'on doit lui donner est assez obscure ; son avantage principal est de conduire aux inclusions en question, qui sont assez fines. Pour $p < 1$, même si $s > 0$, ces espaces peuvent contenir des fonctions discontinues, par exemple des fonctions C^s par morceaux. L'avantage de ces espaces sur les espaces de Sobolev sera ici la facilité de représentation à l'aide des coefficients d'ondelette (théorème 7).

Pour tout entier M, on définit les opérateurs de différence finie

$$\Delta^0_h f = f$$
$$\Delta^M_h f(x) = \Delta^{M-1}_h f(x+h) - \Delta^{M-1}_h f(x).$$

Puis on considère les normes (quasi-normes si $p < 1$ ou $q < 1$)

$$\|f\|_{spq}(f) \quad = \quad \|f\|_p + \left(\int_{|h|<1} \left(\frac{\|\Delta^M_h f\|_p}{|h|^s}\right)^q \frac{dh}{|h|^d}\right)^{1/q}$$

où M est choisi tel que $s < M$. Les espaces de Besov sont alors définis par

$$B^s_{pq} = \{f \in L_p, \|f\|_{spq} < \infty\} \qquad d(1/p-1)_+ < s, \;\; 0 < p, q \leq \infty$$

(cf [33] 2.6.1.(2)). On peut montrer [33], pour $0 < s$, $1 \leq p, q \leq \infty$:

- $B^s_{\infty\infty} = C^s$ pour $s \notin \mathbb{N}$
- $B^s_{pp} \subset W^s_p \subset B^s_{p2}$ pour $p \leq 2$
- $B^s_{p2} \subset W^s_p \subset B^s_{pp}$ pour $p \geq 2$
- $B^s_{pq} \subset B^{s'}_{p'q'}$ si $p' \geq p$, $q' \geq q$, $s' \leq s - \frac{d}{p} + \frac{d}{p'}$.

En particulier, si $s > d/p$, $B^s_{pq} \subset B^s_{\infty\infty} \subset C^0$. On a le résultat suivant [28] (cf aussi le §7.5 plus bas) :

Théorème 7 *Soit une analyse multirésolution s-régulière avec* $s > d(1/p-1)_+$, $0 < p, q \leq \infty$, *alors en notant pour toute fonction* f

$$\alpha_k = \langle f, \varphi_{0k}\rangle \;, \qquad \beta_{jk} = \langle f, \psi_{jk}\rangle$$

la norme $\|f\|_{spq}$ *est équivalente à la norme sur les coefficient d'ondelettes*

$$\nu_{spq}(f) = \|\alpha\|_p + \left(\sum_{j\geq 0} 2^{jq(s+d/2-d/p)} \|\beta_{j.}\|^q_p\right)^{1/q}.$$

Ceci reste vrai pour les ondelettes biorthogonales.

Une autre caractérisation des espaces de Besov. On donne ici une version simplifiée de résultats de [33], pour le cas $s > d/p$ (en particulier, les fonctions sont continues). On définit, pour toute fonction f et tout entier M, la fonction

$$osc^M f(x,t) = \inf \sup_{|x-y|<t} |f(y) - P(y)| \tag{29}$$

où l'inf est pris sur les polynomes P de degré inférieur à M ; puis

$$\theta_{jk} = osc^M f(2^{-j}k, 2^{-j}). \tag{30}$$

Alors :

Proposition 3 *Pour $0 < p, q \leq \infty$, $s > d/p$, $M \geq [s]$, en posant*

$$\nu'_{spq}(f) = \|f\|_p + \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(s-d/p)q} \|\theta_{j.}\|_p^q\right)^{1/q}, \tag{31}$$

on a

$$B^s_{pq} = \{f \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \nu'_{spq}(f) < \infty\}$$

et ν'_{spq} est une norme (quasi-norme si p ou q est < 1) équivalente à ν_{spq}.

L'expression de ν' se déduit de la formule 3.5.1.(5) de [33] par discrétisation, en utilisant que $osc^M f$ est croissante en t et $osc^M f(x, 2^{-j-1}) \leq osc^M f(2^{-j}k, j)$ pour $|x - 2^{-j}k| \leq 2^{-j-1}$.

Notons que θ_{jk} représente l'erreur d'approximation de f par un polynome sur un voisinage de rayon 2^{-j} de $2^{-j}k$; pour j grand, $\|\theta_{j.}\|_p$ représente l'erreur dans L_p d'approximation de f par une fonction polynomiale par morceaux (dont chacun a un support de taille 2^{-j}).

4.2 L'algèbre des bosses

L'algèbre B des bosses est l'ensemble des fonctions continues nulles à l'infini pouvant s'écrire comme somme infinie de densités gaussiennes non-normalisées ($g_{m,\sigma}(x) = \exp\{-\sigma^{-2}(x-m)^2/2\}$)

$$f = \sum_i \lambda_i g_{m_i,\sigma_i}(x), \qquad \sum |\lambda_i| < \infty.$$

Pour toute f de B on définit $\|f\|_B$ comme étant le minimum de $\|\lambda\|_1$ pour toutes les décompositions possibles ; alors $\|f\|_B \simeq \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} 2^{jd/2}|\beta_{jk}|$, si la régularité de l'analyse est strictement supérieure à d. Cette algèbre a la propriété d'être la plus petite (qui contienne les fonction C^∞ à support compact) telle que

$$\|f(ax+b)\|_B = \|f(x)\|_B.$$

4.3 Espaces L_p et espaces de Sobolev généralisés W^s_p

Rappelons que W^s_p est l'ensemble des fonctions telles que $\|f\|_{s,p} = \|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\omega|^2)^{s/2}\hat{f}(\omega)]\|_p < \infty$ [33]. Notons

$$\chi_{jk}(x) = 1_{\{2^j x - k \in [0,1[\}}$$

(c'est l'indicatrice du "support" de ψ_{jk}) alors on a, si $r \geq |s| \geq 0$, et $1 < p < \infty$

$$\|f\|_{s,p} \quad \simeq \quad \|\alpha\|_p + \|\sum_{j\geq 0}\sum_k |\beta_{jk}|^2 2^{2j(d/2+s)} \chi_{jk}(x)\|^{1/2}_{p/2}.$$

Contrairement aux espaces de Besov, on a d'abord une intégration sur les différentes échelles (à x fixé, la somme sur k ne contient qu'un terme), puis une intégration en espace.

4.4 Espaces de Hölder locaux

On met ici en valeur la propriété de localisation des ondelettes. Les espaces $C^s_{x_0}$ sont utilisés pour décrire les fonctions dont la régularité est s au point x_0 :

Définition 5 *On dit que $f \in C^s_{x_0}$ s'il existe un polynome P de degré égal à $[s]$ tel que*

$$f(x) = P(x - x_0) + O(|x - x_0|^s).$$

On a alors le

Théorème 8 *Si $f \in C^s_{x_0}$,*

$$|\beta_{jk}| \leq C 2^{-(d/2+s)j}(1 + |2^j x_0 - k|^s).$$

La démonstration ainsi qu'une semi-réciproque se trouve dans [23].

5 Applications

5.1 Estimation

Les vertus de localisation des ondelettes en font un instrument de choix pour certains problèmes d'estimation, et leur permet de réussir là où Fourier échoue.

L'estimation d'une fonction ou d'une densité sera remplacée par l'estimation de ses coefficients d'ondelettes à une certaine échelle ; par exemple, si $(X_i)_{i=1,..n}$ sont des variables aléatoires indépendantes de densité commune f, on peut construire l'estimée

$$f^*(x) = \sum_k \hat{\alpha}_k \varphi_{j_0 k}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1} \sum_k \check{\beta}_{jk} \psi_{jk}(x)$$

où

$$\begin{aligned}
2^{j_0} &= n^{1/(d+2s)} \qquad 2^{j_1 d} = \frac{n}{\log(n)} \\
\hat{\alpha}_k &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{j_0 k}(X_i) \\
\hat{\beta}_{jk} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi_{jk}(X_i) \\
\check{\beta}_{jk} &= \hat{\beta}_{jk} 1_{|\hat{\beta}_{jk}| > \lambda_j} \\
\lambda_j &= C\sqrt{(j-j_0)/n}.
\end{aligned}$$

La méthode de troncature (passage de $\hat{\beta}$ à $\check{\beta}$), fondamentale ici, a été inventée par D.Donoho pour l'estimation dans l_p de suites bruitées appartenant à un espace plus petit l_q, $q < p$ [16, 17].

On peut montrer alors que si f est à support compact et $f \in B^s_{pq}$, $1/p < s \leq r$, alors

$$E_f[\|f^* - f\|_{p'}] \leq C' \frac{\log(n)^{\gamma'/2}}{n^{\gamma/2}} \qquad \begin{aligned} \gamma &= d - \max((d+2s)^{-1}, d(1-2/p')(d+2s-2d/p)^{-1}) \\ \gamma' &= \gamma \;\; 1_{(d+2s)^{-1} < d(1-2/p')(d+2s-2d/p)^{-1}} \end{aligned}$$

pour tout $p' \geq \max(2, p)$ ([26, 24, 14] ; C doit être choisi assez grand). Si l'on ne connait pas s prendre $2^{j_0} = n^{1/(d+2r)}$ (les performances sont légèrement altérées). Dans le cas de l'estimation d'une fonction f observée de manière bruitée sur les points X_i d'une grille régulière ou bien uniformément distribués, $Y_i = f(X_i) + w_i$, les coefficients estimés seront [14]

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_k &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \varphi_{0k}(X_i) \\
\hat{\beta}_{jk} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \psi_{jk}(X_i) \\
\check{\beta}_{jk} &= \hat{\beta}_{jk} 1_{|\hat{\beta}_{jk}| > \lambda_j}.
\end{aligned}$$

Des pistes pour une estimation automatique de la constante de troncature C se trouvent dans [18] ; un algorithme complet est donné dans [22]. Une méthode simple mais légèrement sous-optimale consiste à prendre

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= \sigma_\beta \sqrt{2 \log N_j} \\
N_j &= \#\{k, \hat{\beta}_{jk} \neq 0\} \\
\sigma^2_\beta &= \frac{1}{N_{j_1}} \sum_k \hat{\beta}^2_{j_1 k}.
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un légère modification de l'«universal threshold» $\lambda = \sigma_\beta\sqrt{2\log n}$ [17]. λ_j est ici une estimée du maximum sur k du bruit d'estimation $|\hat{\beta}_{jk} - \beta_{jk}|$ à l'échelle j, basée sur une hypothèse gaussienne et sur le fait qu'au niveau j_1, on observe essentiellement du bruit (ce qui permet d'estimer la variance de $\hat{\beta}_{jk} - \beta_{jk}$, qui vaut au premier ordre $(f(2^{-j}k)^2 + \sigma_w^2)/n$; on a donc $\sigma_\beta \simeq (\|f\|_2^2 + \sigma_w^2)/n$ et les fluctuations de $f(x)^2$ rendent l'approximation faite dans l'algorithme un peu grossière).

5.2 Codage

Le principe est de filtrer le signal (identifié à la suite $(\alpha_{Jk})_{k\in\mathbb{Z}}$ du §3.4 ou §7.3) avec (h_k) et (g_k) et de coder les résidus (α_{0k}) et $(\beta_{jk})_{j=0,N}$. Si le filtre m_0 coupe assez bien en $\pi/2$, alors les décimations successives se font sans phénomène de repliement de spectre et les suites α et β représenteront bien le signal dans les bandes de fréquence attendues. Il semblerait que les filtres en quadrature qui sont associés à une analyse multirésolution (c'est-à-dire que non seulement (M4) est satisfaite mais également (M2)) ont un meilleur comportement [13].

Citons par exemple [1], [2].

5.3 Analyse numérique et approximation

De nombreux points restent à éclaircir à propos de l'intérêt des ondelettes en analyse numérique ; un exposé intéressant est donné dans [23]. Une courte note sur les liens avec les algorithmes multigrilles est donnée dans [6] (voir aussi [4]).

Pour des approches analogues en approximation voir l'article de Barron [3] qui approxime une fonction à l'aide de sigmoïdes, et celui de Strang et Fix [31] où f est approximée par $\sum_k c_k\varphi(x/T - k)$, où les décalées de φ permettent de reconstruire les polynomes de degré $\leq p - 1$ (cf le point **(v)** du théorème 6), f a ses dérivées d'ordre $\leq p$ dans L_2 et l'erreur d'approximation dans L_2 est d'ordre T^p.

5.4 Fonctions interpolantes

Il s'agit de mettre à profit le point **(vi)** du théorème 6 p.13. La condition (M4) signifie que le filtre associé à $|m_0|^2$ est un filtre à trous et donc la fonction $\varphi(x) = \varphi(.) * \varphi(-.)$ est interpolante. On a ainsi un moyen de fabriquer des fonctions d'échelle interpolantes. Toute fonction f combinaison linéaire finie des $\tau_k\varphi$ satisfait

$$f(x) = \sum_k f(k)\varphi(x - k)$$

car cette égalité est satisfaite pour φ.

Ces fonctions peuvent être considérées "biorthogonales" aux masses de Dirac sur les entiers.

6 Calcul pratique des coefficients d'ondelette d'une fonction f

Le but de ce paragraphe est de montrer comment on peut obtenir les $\langle f, \psi_{jk}\rangle$ en évitant des calculs d'intégrales, lorsque f a une régularité s (plus précisément, $f \in B^s_{pq}$, pour certain p, q et $s > d/p$; en particulier f est continue). Pour $l = (l_1, ..l_d) \in \mathbb{N}^d$ et $x = (x_1, ..x_d) \in \mathbb{R}^d$, on posera $x^l = (x^{l_1}, ..x^{l_d})$.

On se propose de fabriquer les coefficients de la façon suivante :

1/ On choisit une analyse multirésolution où (φ, ψ) sont à support compact, φ et ψ sont C^{M+1}, et ψ est orthogonale aux polynomes de degré $\leq M$.

2/ on calcule une suite c_i telle que (cf théorème 6 p.13 pour le calcul des intégrales)

$$\int x^l\varphi(x)dx = \sum_i c_i i^l \qquad |l| \leq [s]$$

3/ on obtient la suite $\hat{\alpha}_{Jk}$ au niveau le plus fin en échantillonnant la fonction f à étudier et en filtrant avec les c_i :

$$\hat{\alpha}_{Jk} = 2^{-J/2}\sum c_l f(2^{-J}(k + l))$$

4/ on calcule les $\hat{\beta}_{jk}$ à l'aide de la formule (26).
Dans le cas des ondelettes orthogonales, $c_i = \varphi(i)$ convient, en raison des moments nul de ψ (cf théorème 6 p.13 (v), faire $x = 0$ dans la formule (24)). Dans le cas des coiflettes, $c_i = \delta_{0i}$ convient.

Les valeurs de φ sur les entiers peuvent être obtenues grâce à la relation d'échelle :

$$\varphi(l) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2l - k).$$

Les coefficients $\hat{\alpha}_{jk}$ et $\hat{\beta}_{jk}$ sont ceux de la fonction

$$f_J = \sum_k \hat{\alpha}_{Jk} \varphi_{Jk} = \sum_k \hat{\alpha}_{0k} \varphi_{jk} + \sum_{j=0}^{J} \sum_k \hat{\beta}_{jk} \psi_{jk}. \tag{32}$$

On va montrer que cette fonction est très proche de f, en un sens raisonnable, ce qui justifie la méthode (voir également les remarques qui suivent le théorème). On aura pour cela besoin du

Lemme 1 *Soit χ une fonction bornée à support compact et c_i une suite finie telle que*

$$\int x^l \chi(x) dx = \sum_i c_i i^l \qquad |l| \leq [s]$$

($0^0 = 1$). Alors, il existe C et j_0 tels que pour tout $f \in B^s_{pq}$, $s > d/p$, on ait

$$|2^{jd} \int f(x) \chi(2^j x - k) dx - \sum_i c_i f(2^{-j}(k+i))| \leq C\theta_{j-j_0,k} \qquad j > j_0$$

où θ_{jk} est donné par la relation (30).

Note : χ sera toujours une fonction d'échelle et donc ses moments peuvent se calculer à l'aide du **(v)** du théorème 6 p.13. Le calcul des c_i se ramène alors à l'inversion d'une matrice de Van Der Monde.

Démonstration. Choisissons un polynome P d'ordre $[s]$, qui approche f en $2^{-j}k$ à l'échelle $j - j_0$ (on choisit j_0 plus bas) au sens de la formule (29) ; alors

$$\begin{aligned}
&|2^{jd} \int f(x) \chi(2^j x - k) dx - \sum_i c_i f(2^{-j}(k+i))| \\
\leq\ & |\int (f(2^{-j}(k+x)) - P(2^{-j}(k+x))) \chi(x) dx| \\
&+ |\int P(2^{-j}(k+x)) \chi(x) dx - \sum_i c_i P(2^{-j}(k+i))| \\
&+ |\sum_i c_i P(2^{-j}(k+i)) - \sum_i c_i f(2^{-j}(k+i))| \\
=\ & |\int (f(2^{-j}(k+x)) - P(2^{-j}(k+x))) \chi(x) dx| + |\sum_i c_i P(2^{-j}(k+i)) - \sum_i c_i f(2^{-j}(k+i))| \\
\leq\ & C\theta_{j-j_0,k}
\end{aligned}$$

si j_0 a été choisit tel que $supp(\chi) \subset \{|x| < 2^{j_0}\}$. ∎

On a alors le

Théorème 9 *Si $s > d/p$, $0 < p, q \leq \infty$, alors les fonctions f_J de l'équation (32), calculées dans les conditions indiquées, satisfont*

$$\lim_{J \longrightarrow \infty} \|f - f_J\|_{spq} = 0$$

Démonstration. Pour les deux méthodes proposées, la suite c_i satisfait bien les hypothèses du lemme précédent avec $\chi = \varphi$: pour la première méthode ($c_i = \varphi(i)$), cela vient du théorème 6 p.13 (v), et pour la seconde ($c_i = \delta_{0i}$), cela vient de la condition imposée à φ. En notant

$$P_J f = \sum_k \alpha_{Jk}\varphi_{Jk},$$

la projection de f sur l'espace V_J, et en utilisant $\|f(\lambda.)\|_{spq} \leq C\lambda^{s-d/p}\|f(.)\|_{spq}$ (cf [33] 2.3.3 Remarque), et il vient

$$\begin{aligned}
\|P_J f - f_J\|_{spq} &= \|\sum_k (\alpha_{Jk} - \hat{\alpha}_{Jk})2^{Jd/2}\varphi(2^J x - k)\|_{spq} \\
&\leq C2^{J(s-d/p)}\|\sum_k (\alpha_{Jk} - \hat{\alpha}_{Jk})2^{Jd/2}\varphi(x-k)\|_{spq} \\
&= C2^{J(s-d/p+d/2)}\|\alpha_{J.} - \hat{\alpha}_{J.}\|_p \leq C2^{J(s-d/p)}\|\theta_{J-j_0,.}\|_p
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_J \|P_J f - f_J\|_{spq}^q < \infty.$$

Ce qui prouve le résultat. ∎

Noter que f_J est a priori plus proche de $P_J f$ que $P_J f$ ne l'est de f puisque l'appartenance à B^s_{pq} ne garantit nullement *à elle seule* que $\sum_j \|P_j f - f\|_{spq}^q < \infty$; si bien que l'erreur d'approximation (de α_{Jk} par $\hat{\alpha}_{Jk}$) est petite devant l'erreur de projection. Toutefois, ce théorème ne dit rien si *de plus*, par exemple, l'ondelette est adaptée à la fonction f en particulier, auquel cas on peut bien entendu avoir $P_J f = f$.

7 Ondelettes biorthogonales

On ne développera le sujet que dans le cadre des bases de Riesz ; une étude dans le cadre des "frames" (cas où chaque élément de la "base" n'est pas nécessairement indépendant des autres) est poussée dans [13]. On cherche maintenant à obtenir des formule d'analyse/reconstruction de la forme (6).

Définition 6 *Une analyse multirésolution biorthogonale est la donnée de deux fonctions $\varphi, \tilde{\varphi}$ de norme 1 dans $L_2(\mathbb{R})$ et des espaces*

$$\begin{aligned}
V_j &= span(\varphi_{jk}, k \in \mathbb{Z}) \qquad \varphi_{jk}(x) = 2^{j/2}\varphi(2^j x - k) \\
\tilde{V}_j &= span(\tilde{\varphi}_{jk}, k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

satisfaisant chacune les hypothèses (AM0-3) et telles que

(AMB) *pour tout j le système $(\varphi_{jk}, \tilde{\varphi}_{jk})$ est biorthogonal.*

Sous ces hypothèses, on peut définir deux suites de carré intégrable (h_k) et $(\tilde{h}_k)$ par

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum h_k\varphi(2x-k) \tag{33}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \sqrt{2}\sum \tilde{h}_k\tilde{\varphi}(2x-k) \tag{34}$$

puis construire une base biorthogonale de $L_2(\mathbb{R})$:

Théorème 10 *Partant d'un analyse multirésolution biorthogonale, on définit $\psi, \tilde{\psi}, W_j, \tilde{W}_j$ avec*

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum g_k\varphi(2x-k) \quad g_k = (-1)^{k+1}\bar{\tilde{h}}_{1-k} \tag{35}$$

$$\tilde{\psi}(x) = \sqrt{2}\sum \tilde{g}_k\tilde{\varphi}(2x-k)\ , \quad \tilde{g}_k = (-1)^{k+1}\bar{h}_{1-k} \tag{36}$$

$$W_j = span(\psi_{jk}, k \in \mathbb{Z}), \quad \tilde{W}_j = span(\tilde{\psi}_{jk}, k \in \mathbb{Z}) \tag{37}$$

Alors le système $((\psi_{jk}, \tilde{\psi}_{jk}), j, k \in \mathbb{Z})$ est une base biorthogonale de $L_2(\mathbb{R})$ et

$$V_{j+1} = V_j + W_j, \quad \tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j + \tilde{W}_j$$
$$V_j \perp \tilde{W}_j, \quad \tilde{V}_j \perp W_j, \quad W_j \perp \tilde{W}_k, \ \ k \neq j.$$

Le système $((\varphi_{0k}, \psi_{jk}), (\tilde{\varphi}_{0k}, \tilde{\psi}_{jk}), k \in \mathbb{N}, j \geq 0)$, est également une base biorthogonale de $L_2(\mathbb{R})$. On a les relations

$$\sqrt{2}\varphi(2x-m) = \sum_k \bar{\tilde{g}}_{m-2k}\psi(x-k) + \bar{\tilde{h}}_{m-2k}\varphi(x-k) \tag{38}$$

$$\sum \bar{h}_l \tilde{h}_{l+2k} = \delta_{k0} \tag{39}$$

et pour toute $f \in L_2(\mathbb{R})$ on a

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\varphi}_{0k}\rangle \varphi_{0k}(x) + \sum_{j\geq 0, k\in\mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{jk}\rangle \psi_{jk}(x) \tag{40}$$

De plus, en posant

$$m_0(\omega) = 2^{-1/2}\sum \ h_k e^{-ik\omega} \tag{41}$$

$$\tilde{m}_0(\omega) = 2^{-1/2}\sum \ \tilde{h}_k e^{-ik\omega} \tag{42}$$

$$m_1(\omega) = 2^{-1/2}\sum \ g_k e^{-ik\omega} = e^{-i\omega}\bar{\tilde{m}}_0(\omega+\pi) \tag{43}$$

on a

$$\hat{\varphi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \tag{44}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) \tag{45}$$

$$\bar{m}_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + \bar{m}_0(\omega+\pi)\tilde{m}_0(\omega+\pi) = 1 \tag{46}$$

$$\bar{m}_1(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + \bar{m}_1(\omega+\pi)\tilde{m}_0(\omega+\pi) = 0 \tag{47}$$

Démonstration. La démonstration ne présente pas de difficulté essentielle et les détails sont laissés en exercice ; les étapes en sont les suivantes :
- La relation $\langle \tau_k\varphi, \tilde{\varphi}\rangle = \delta_{0k}$ implique (39) (c'est immédiat)
- ψ est dans L_2 puisque $(g_k) \in l_2$ et son orthogonalité à $\tilde{\varphi}$ vient de la définition de la suite (g_k).
- (38) est une conséquence de (39), (33) et (35)
- les relations entre les espaces $V_j, W_j, \tilde{V}_j, \tilde{W}_j$ s'en déduisent aisément
- (43) implique (47)
- (39) implique (46). ∎

7.1 Construction partant de φ

Cette fois-ci, au lieu d'orthogonaliser les translatées de φ, on va chercher une base biorthogonale qui soit aussi associée à une fonction d'échelle

Théorème 11 *Soit $\varphi \in L_2$, telle que les $\tau_k\varphi$ forment une base de Riesz et*

$$\theta(\omega) \quad = \quad \sum |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2.$$

La fonction $\tilde{\varphi}$ définie par

$$\hat{\tilde{\varphi}}(\omega) = \hat{\phi}(\omega)/\theta(\omega)$$

est telle que $(\varphi, \tilde{\varphi})$ est un système biorthogonal. Si φ est une fonction d'échelle, alors $\tilde{\varphi}$ aussi.

La démonstration est directe. Noter qu'ici $\tilde{m}_0(\omega) = m_0(\omega)\theta(\omega)/\theta(2\omega)$ et $\theta\tilde{\theta} = 1$.

Remarquons que si m_0 est un polynome trigonométrique, alors φ est à support compact et donc θ est aussi un polynome trigonométrique (rappelons que $\hat{\theta}_l = \langle \varphi, \tau_l\varphi\rangle$), et donc $\tilde{m}_0$ défini par ce procédé ne peut être également un polynome trigonométrique.

7.2 Construction partant de m_0 et $\tilde{m}_0$

Théorème 12 *Soient m_0 et $\tilde{m}_0$ deux fonctions satisfaisant chacune les hypothèses (M1-3) ou (MP) et telles que*

$$\bar{m}_0(\omega)\tilde{m}_0(\omega) + \bar{m}_0(\omega+\pi)\tilde{m}_0(\omega+\pi) = 1. \tag{48}$$

Alors, la paire $(\varphi, \tilde{\varphi})$ définie par

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) &= \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) \\ \hat{\tilde{\varphi}}(\omega) &= \prod_{j=1}^{\infty} \tilde{m}_0(2^{-j}\omega) \end{aligned}$$

produit une analyse multirésolution biorthogonale.

Note :
- La relation (48) est équivalente à (39).
- Si m_0 et $\tilde{m}_0$ sont des polynomes trigonométriques, l'équation (48) peut être vue comme une sorte d'identité de Bezout (mais attention, les puissances de z ne sont pas toutes positives !).

Démonstration. Il s'agit de montrer la propriété de base de Riesz et $\langle \tau_k \varphi, \tilde{\varphi}\rangle = \delta_{0k}$. On utilise pour cela que l'équation (48) implique que les fonctions

$$\begin{aligned} f_l(\omega) &= 1_{[-\pi,\pi]}(2^{-l}\omega)\prod_{j=1}^{l} m_0(2^{-j}\omega) \\ \tilde{f}_l(\omega) &= 1_{[-\pi,\pi]}(2^{-l}\omega)\prod_{j=1}^{l} \tilde{m}_0(2^{-j}\omega) \end{aligned}$$

satisfont $\langle \tau_k \hat{f}_l, \hat{\tilde{f}}_l\rangle = \delta_{0k}$ (faire la même manipulation d'intégrales que dans la démonstration du théorème 4 p.11) ; le théorème 4 p.11 (sous (M1-3)) ou 5 p.13 (sous (MP)) permet de passer à la limite sur cette égalité et d'obtenir ainsi le résultat cherché. ∎

7.3 Considérations algorithmiques ; retour aux filtres en quadrature

Tout ce passe comme plus haut (3.4) ; on obtient pour

$$\alpha_{jk} = \langle f, \tilde{\varphi}_{jk}\rangle, \quad \beta_{jk} = \langle f, \tilde{\psi}_{jk}\rangle \tag{49}$$

les équations d'analyse et de reconstruction

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} &= \sum \bar{\tilde{h}}_{l-2k}\alpha_{j+1,l} \\ \beta_{jk} &= \sum \bar{\tilde{g}}_{l-2k}\alpha_{j+1,l} \\ \alpha_{jk} &= \sum h_{k-2l}\alpha_{j-1,l} + g_{k-2l}\beta_{j-1,l}. \end{aligned}$$

7.4 Exemples

Divers exemples sont donnés dans [13] chapitre 8.3. Notons avant tout que la formule de reconstruction (40) peut utiliser différentes propriétés de ψ et $\tilde{\psi}$; typiquement, si f est régulière on voudra ψ régulière et $\tilde{\psi}$ avec beaucoup de moments nuls (cf théorème 6 p.13(v)) car ainsi, les $\langle f, \tilde{\psi}_{jk}\rangle$ seront rapidement négligeables (une fonction régulière est localement un polynome ; cf les arguments du chapitre 6 et la proposition 3 p.20).

7.4.1 r-ondelttes

Soit φ_0 une fonction d'échelle, alors le choix

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_n |r|^n \varphi_0(x-n) \\ \tilde{\varphi}(x) &= \frac{1}{1-r^2}\left\{(1+r^2)\varphi_0(x) - r\varphi_0(x-1) - r\varphi_0(x+1)\right\}\end{aligned}$$

est valide. On peut montrer que pour r assez proche de 1 la fonction φ est positive.

7.4.2 Splines

Une idée naturelle est de partir des fonctions B-splines (pour “basic splines”)

$$\begin{aligned}&\tilde{\varphi} = \left(\chi_{[0,1]}\right)^{*n} \\ &\mathcal{F}\tilde{\varphi}(\omega) = (2\sin(\omega/2)/\omega)^{\tilde{n}}\end{aligned}$$

auquel cas on obtient après quelques calculs [13] :

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0(\omega) &= (\cos(\omega/2))^{\tilde{n}} \\ m_0(\omega) &= (\cos(\omega/2))^n \sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1+k}^k (\sin(\omega/2))^{2k} \qquad N = (n+\tilde{n})/2\end{aligned}$$

($n+\tilde{n}$ doit être pair ; $m_0(\omega)$ et $\tilde{m}_0(\omega)$ doivent être multipliées par $e^{-i\omega/2}$ si n et $\tilde{n}$ sont impairs). La biorthogonalité se déduit de l'orthogonalité des ondelettes orthogonales de Daubechies (car les polynomes en jeu sont les mêmes ; cf §3.5.2). Pour obtenir (h_k), il faut exprimer m_0 comme polynome en $z = e^{i\omega}$ ($\cos(\omega/2) = e^{i\omega/2}(1+e^{-i\omega})/2$...). Notons que ces polynomes sont symétriques, ce qui est impossible dans le cas des ondelettes orthogonales à support compact (cf [13] théorème 8.1.4.). L'expression de la somme en fonction de $z = e^{i\omega}$:

$$\sum_{k=0}^{N-1} C_{N-1+k}^k (\sin(\omega/2))^{2k} = \sum_l \sum_{k=|l|}^{N-1} C_{N-1+k}^k C_{2k}^{l+k} 4^{-k}(-z)^l,$$

permet d'obtenir

$$\begin{aligned}h_p &= \sqrt{2}\sum_l \sum_{k=|l|}^{N-1} C_n^{p+\nu-l} C_{N-1+k}^k C_{2k}^{l+k} 2^{-2k-n}(-1)^l, \qquad \nu = \left[\frac{n+1}{2}\right] \\ \tilde{h}_p &= \sqrt{2}C_{\tilde{n}}^{p+\tilde{\nu}} 2^{-\tilde{n}}, \qquad \tilde{\nu} = \left[\frac{\tilde{n}+1}{2}\right].\end{aligned}$$

Si $\tilde{n} = 1$, $\tilde{\varphi}$ est un indicateur et $\tilde{\psi}$ est une fonction en escalier orthogonale aux n premières puissances de x.

Estimation (cf §5.1). L'idée est d'utiliser à l'analyse une fonction d'échelle $\tilde{\varphi}$ extrêmement rustique (Haar) avec beaucoup de moments nuls pour $\tilde{\psi}$ et à la reconstruction une ondelette biorthogonale régulière associée (i.e. $\tilde{n} = 1$ et n grand).

7.4.3 Ondelettes de Deslauriers-Dubuc

Il s'agit d'utiliser les fonctions interpolantes du §5.4, cf [19, 30]. Dans ce cas, en notant φ^d l'ondelette de Daubechies du §3.5.2, on a :

$$\begin{aligned}
h_k &= \sum h^d_{k+l} h^d_l \\
\tilde{h}_k &= \delta_{0k} \\
\varphi(x) &= \int \varphi^d(x+y)\varphi^d(y)dy \\
\psi(x) &= \sqrt{2}\varphi(2x-1) \\
\tilde{\varphi} &= \delta_0 \qquad \text{fonction de Dirac} \\
\tilde{\psi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum h_{1-k}(-1)^{k+1}\delta_{k/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'expression donnée au §3.5.2, on obtient

$$\begin{aligned}
h_{2p+1} &= \sqrt{2}\, 2^{-4N+2} \frac{(2N-1)!}{(N-1)!^2}(-1)^p \frac{C^{p+N}_{2N-1}}{2p+1} \\
h_0 &= 1/\sqrt{2} \\
h_{2p} &= 0, \quad p \neq 0.
\end{aligned}$$

On est en fait dans le cas du §7.4.2 avec $\tilde{n} = 0$ et $n = 2N$. Notons qu'en posant $x = p/2$ dans la relation d'échelle (33) on obtient $\sqrt{2}h_p = \varphi(p/2)$ et donc

$$\varphi(x) = \sum \varphi(p/2)\varphi(2x-p).$$

Il ne s'agit pas à proprement parler d'une analyse multirésolution puisque les ondelettes d'analyse ne sont pas dans L_2 mais sont des mesures ; en particulier, on ne peut les utiliser que sur des fonctions suffisamment régulières.

7.5 Retour aux espaces de Besov

On peut montrer le résultat suivant [15] :

Théorème 13 *Soient $0 < p, q \leq \infty$, $s > d(1/p-1)_+$ et $M = [s]$. On se donne une analyse multirésolution biorthogonale telle que $(\varphi, \psi, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ sont à support compact, φ et ψ sont C^{M+1}, et $\tilde{\psi}$ est orthogonale aux polynomes de degré $\leq M$. Alors, la norme $\|f\|_{spq}$ est équivalente à la norme*

$$\nu_{spq}(f) = \|\alpha\|_p + \left(\sum_{j \geq 0} 2^{jq(s+d/2-d/p)} \|\beta_{j.}\|^q_p \right)^{1/q}$$

où les α_k et β_{jk} sont donnés par l'équation (49).

La démonstration se base sur la proposition 3 p.20. Dans le sens $\nu_{spq}(f) \leq C\|f\|_{spq}$, on utilise une approximation de f par des polynomes et l'orthogonalité de $\tilde{\psi}$ aux polynomes pour majorer β_{jk} (c'est assez simple). Dans l'autre sens, on approxime de f localement par un polynome à l'aide d'approximations polynomiales de φ et ψ et l'on majore θ_{jk}.

7.6 Calcul des coefficients

En utilisant le lemme 1 p.23, on peut déduire la méthode général suivante de calcul des coefficients. Si $f \in B^s_{pq}$, partir d'une analyse multirésolution biorthogonale satisfaisant les hypothèses du théorème 13 p.28 et trouver une suite de longueur finie (c_i) telle que (cf théorème 6 p.13 pour le calcul des intégrales)

$$\int x^l \tilde{\varphi}(x)dx = \sum_i c_i i^l \qquad |l| \leq M$$

$(0^0 = 1)$. On pose alors

$$\hat{\alpha}_{jk} = 2^{-jd/2} \sum_i c_i f(2^{-j}(i+k)).$$

On montre sans peine l'équivalent du théorème 9 p.23.

8 Ondelettes sur l'intervalle

Il est possible de fabriquer une analyse multi-résolution de $L_2([0,1])$ à partir de celle précédemment construite ; elle est un peu compliquée car elle contient à toutes les échelles des ondelettes modifiées au bord de l'intervalle (il y a donc plusieurs fonctions φ et ψ ; cf [13]).

On ne fera pas ici cette construction (basée sur le procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt) qui n'est pas toujours nécessaire puisqu'on pourra directement calculer la projection $P_j u$ d'une fonction de $u \in L_2([0,1])$ sur V_j^* (espace des restrictions des fonctions de V_j à l'intervalle) comme combinaison linéaire des φ_{jk} ; cette fonction est naturellement définie sur tout $\mathbb{R}$; ayant fait cette opération pour j grand, on est alors ramené à l'analyse habituelle. Le défaut de cette méthode est d'utiliser une matrice F mal conditionnée. Des constructions plus sophistiquées sont proposées dans [9].

Dans tout ce qui suit on suppose que φ et ψ ont pour support l'intervalle $[0, 2N-1]$. On se placera à des échelles assez grandes $(2^j > 2N-1)$ de sorte que les effets de bord se séparerons. On note

$$\begin{aligned} \varphi^*_{jk} &= \varphi_{jk} 1_{0<x<1} \\ \psi^*_{jk} &= \psi_{jk} 1_{0<x<1} \\ V^*_j &= span\{\varphi^*_{jk}, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Si k est pris en dehors de $[2-2N, 2^j-1]$, les fonctions définies ci-dessus sont nulles ; si $k \in [0, 2^j-2N+1]$ les fonctions sont inchangées. On a donc $2^j - 2N + 2$ fonctions intactes (et orthogonales) et $2(2N-2)$ fonctions amputées. On a alors [29, 23] le

Théorème 14
(i) *La famille* $\{\varphi^*_{jk}, k = -2N+2, ...2^j-1\}$ *forme une base (non-orthogonale) de* V^*_j.
(ii) $\psi^*_{jk} \in V^*_j$ *si* $k \notin [1-N, 2^j-N]$.
(iii) *La famille* $\{\varphi^*_{jk}, k = -2N+2, ...2^j-1\} \cup \{\psi^*_{jk}, k = -N+1, ...2^j-N\}$ *forme une base de* V^*_{j+1}.

Le troisième point indique que sur les $2^j + 2N - 2$ ψ^*_{jk} non-nulles, seules 2^j sont utiles à passer de V^*_j à V^*_{j+1}. Celles qui restent sont celles qui sont issues de fonctions ψ_{jk} dont le support empiète davantage à l'extérieur de $[0,1]$.

On considère maintenant le problème suivant : que vaut la projection $P_j u$ de $u \in L_2([0,1])$ sur l'espace V^*_j ?

C'est un simple problème d'inversion de matrice puisque l'on dispose d'une base non-orthogonale. Plus précisément, soit F la matrice (indépendante de j) dont les coefficients sont :

$$f_{kl} = \langle \varphi^*_{j,k}, \varphi^*_{j,l} \rangle = \int_0^\infty \varphi(x-k)\varphi(x-l)dx \qquad k,l = -2N+2, .., -1 \tag{50}$$

alors en notant

$$\alpha^*_{jk} = \langle u, \varphi^*_{jk} \rangle, \quad \tilde{F} = I - F, \quad f^{-1}_{jk} = (F^{-1})_{jk}, \quad k' = k - 2^j,$$

on a :

$$\begin{aligned} P_j u &= \sum_{k=-2N+2}^{-1} \alpha^*_{jk} f^{-1}_{kl} \varphi^*_{jl} + \sum_{k=0}^{2^j-2N+1} \alpha^*_{jk} \varphi^*_{jk} + \sum_{k=2^j-2N+2}^{2^j-1} \alpha^*_{jk} \tilde{f}^{-1}_{k'l} \varphi^*_{jl} \\ &= \sum \alpha_{jk} \varphi_{jk} 1_{[0,1]} \end{aligned}$$

Les deux égalités se vérifient par produit scalaire avec les φ^*_{jl} (ou les φ_{jl}). En résumé on a les relations suivantes qui permettent de calculer très facilement F puis α à partir de α^* :

Théorème 15 *Soit $u \in L_2([0,1])$, alors $P_j u$ est la restriction à l'intervalle d'une fonction u_j de V_j avec*

$$u_j = \sum \alpha_{jk} \varphi_{jk}$$

Si l'on note $\gamma = (\alpha_{jk})_{k=-2N+2,-1}$, $\mu = (\alpha_{jk})_{k=0,..2^j-2N+1}$, $\delta = (\alpha_{jk})_{k=2^j-2N+2,..2^j-1}$ (gauche, milieu, droite), alors la relation entre les coefficients d'ondelette $(\alpha^*_{jk})_{k=-2N+2,..2^j-1}$ de la fonction u prolongée par zero, et la suite (α_{jk}) est :

$$\begin{aligned} &\gamma^* = F\gamma \\ &\mu^* = \mu \\ &\delta^* = (I - F)\delta \end{aligned}$$

et les coefficients de F satisfont

$$\begin{aligned} f_{kl} &= \sum h_m h_n f_{2k+m,2l+n} \qquad k, l = -2N+2, \ldots -1 \\ f_{kl} &= \delta_{kl} \quad \text{si } k \text{ ou } l \geq 0 \\ f_{kl} &= 0 \quad \text{si } k \text{ ou } l \leq -2N+1 \end{aligned}$$

Démonstration. Il reste à prouver les relations reliant les f_{kl} : en utilisant la relation d'échelle dans l'équation (50) on obtient facilement la première des trois équations ci-dessus [9], et les deux autres sont des conséquences immédiates des propriétés de φ. ∎

9 Autres types d'ondelettes

Contentons-nous de citer quelques variantes :

- **Ondelettes redondantes**. Un des grands défauts de la représentation en ondelettes est l'absence d'invariance par translation (une translation de la fonction modifie complètement les coefficients). L'idée de Coifman & Donoho a été de faire une transformation où la décimation n'est pas faite. On a donc, pour un signal de longueur n une transformée à $n\log(n)$ coefficients.
- **Cas multidimensionnel.** On considère en général le produit tensoriel d'analyses multirésolutions

  $$V_j = span(\varphi_{jk}(x)\varphi_{jl}(y), k, l \in \mathbb{Z})$$
  $$W_j = span(\varphi_{jk}(x)\psi_{jl}(y), \psi_{jk}(x)\varphi_{jl}(y), \psi_{jk}(x)\psi_{jl}(y), k, l \in \mathbb{Z})$$

  et on a $L_2(\mathbb{R}^2) = V_j \bigoplus W_j \bigoplus W_{j+1}$ ...

  Le passage de V_{j+1} à V_j peut se faire par une décomposition intermédiaire basée sur les équations (12) et (9,10) qu'on peut symboliser brièvement (en dimension 2 avec $j = 0$)

  $$\begin{aligned} \varphi_k(2x)\varphi_l(2y) &\longleftrightarrow \varphi_k(2x)\varphi_l(y), \ \varphi_k(2x)\psi_l(y) \\ &\longleftrightarrow \varphi_k(x)\varphi_l(y), \ \psi_k(x)\varphi_l(y), \ \varphi_k(2x)\psi_l(y) \\ &\longleftrightarrow \varphi_k(x)\varphi_l(y), \ \psi_k(x)\varphi_l(y), \ \varphi_k(x)\psi_l(y), \ \psi_k(x)\psi_l(y) \end{aligned}$$

Il est à noter que cette solution est différente du produit tensoriel des bases, puisque ce dernier ferait intervenir, par exemple, des produits $\psi_{jk}(x)\psi_{j'l}(y)$ de fonctions à des échelles différentes. Remarquer aussi la décomposition du milieu qui donne une base de W_j formée de translatées de d fonctions (et non pas $2^d - 1$ comme pour la dernière) mais le nombre de translatées à prendre est plus grand (pour couvrir un domaine borné donné).
Il existe des solutions plus sophistiquées que le produit tensoriel, où le rôle du facteur 2 est maitenant joué par une matrice, voir [13, 20].

- **Ondelettes périodisées** ([28] § III.11, et [23]) :
$$\varphi^p_{jk}(x) = \sum_m \varphi_{jk}(x+m) = 2^{j/2} \sum \varphi(2^j x + 2^j m - k)$$
$$\psi^p_{jk}(x) = \sum_m \psi_{jk}(x+m)$$
permettent de décrire plus naturellement les fonctions périodiques.
- Ondelettes avec un facteur de dilatation différent de 2 ([13] chap.10).
- Les ondelettes continues [13].
- **Multiondelettes** [32] : il y a deux fonctions φ et deux fonctions ψ ; leur translatées sont orthogonales ; on peut avoir symétrie, support compact et régularité à la fois.
- Les bases de **cosinus locaux**, ou ondelettes de Malvar, permettent une analyse fréquentielle précise sur des fenêtres adaptées à la fréquence en conservant les avantages de la transformée discrète [12, 10]. L'algorithme rapide associé se trouve dans [36].
- **Ridgelets** [7]. Pour décrire une fonction de plusieurs variables sous la forme $f(x) = \sum c_i \psi(\langle a_i, x\rangle + b_i)$.
- **Curvelets** [8]. Une reprèsentation pour le traitement d'image adaptées à la présence de régions homogène séparées par un frontière (i.e. fonctions régulières par morceaux).

Références

[1] "Special issue on wavelet transforms and multiscale signal analysis", *IEEE-IT*, vol. 38, No.2, March 1992.

[2] Antonini, Barlaud, Mathieu, Daubechies, "Image Coding Using Wavelet Transform", *IEEE-SP*, Vol.1, No. 2, April 1992.

[3] A.R.Barron, "Universal approximation bounds for superpositions of a sigmoidal function", *IEEE-IT*, vol 39, pp 930-945, 1993.

[4] C. de Boor et R.Q.Jia, "Controlled approximation and a characterization of the local approximation order", *Proc. Am. Math. Soc.*, vol 95, No 4, dec 1985.

[5] J.Bretagnolle, C.Huber, "Estimation des densités : risque minimax", *Zeit. fur Wahrsch.* 47, ppp119-137, 1979.

[6] W.L.Briggs et V.E.Henson, "Wavelets and Multigrid", *SIAM J. on Scient. Comput.*, mars 1993.

[7] E.J. Candès, "Harmonic Analysis of Neural Networks", *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 6, 197-218, 1999. `www.acm.caltech.edu/~emmanuel/publications.html`.

[8] E.J. Candès, D. L. Donoho, "Curvelets - A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation for Objects with Edges", *Curves and Surfaces* , L. L. Schumaker et al. (eds), Vanderbilt University Press, Nashville, 1999. `www.acm.caltech.edu/~emmanuel/publications.html`.

[9] A.Cohen, I.Daubechies, P.Vial, " Wavelet on the Interval and Fast Wavelet Transform", *Applied Computational Harmonic Analysis*, 1, 54-81 (1993).

[10] P.Aucher, G.Weiss, V.Wickerhauser, "Local Sine and cosine Bases of Coifman and Meyer and the Construction of smooth Wavelets", in *Wavelets : A Tutorial in Theory and Applications*, pp 237-256, Academic Press, 1992.

[11] A.Cohen, *Ondelettes, analyses multirésolutions et traitement numérique du signal*, Thèse, Université Paris IX Dauphine, 1990.

[12] R.R.Coifman, Y.Meyer, “Remarques sur l’analyse de Fourier à fenêtre”, série I, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 312 (1991), 259-261.

[13] I.Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics.

[14] B.Delyon, A.Juditsy, “Wavelets Estimators, Global Error Measures Revisited”, *Publication interne IRISA*, No 782.

[15] B. Delyon, A. Juditsky, On the Computation of Wavelet Coefficients, *Journal of Approximation Theory*, Vol. 88, No. 1, January 1997.

[16] D.L.Donoho, I.M.Johnstone, “Minimax Risk over l_p Balls”, *Technical Report*, Dept Stat., Univ. Calif., Berkeley, 1990.

[17] D.L.Donoho, I.M.Johnstone, “Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage”, Biometrika, 81(3), 425-455 (1994). Egalement *Technical Report*, Dept Stat., Univ. Calif., Berkeley, 1992.

[18] D.L.Donoho, I.M.Johnstone, “Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage”, *Technical Report*, Dept Stat., Univ. Calif., Berkeley, 1993.

[19] S.Dubuc, “Interpolation through an iterative scheme”, *J. Math. Anal. and Appl.*, 114, 185-204.

[20] K. Grochenig and W. R. Madych, “Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings of R^n”, *IEEE Trans. on Computers,* March 1992.

[21] C.Herley , M.Vetterli, “Wavelets and Recursive Filter Banks”, *IEEE-SP*, vol.41, No.8, 1993.

[22] A.Juditsky, “Wavelet estimators : adapting to unknown smoothness”, *Publication interne IRISA* 815.

[23] S.Jaffard, P. Laurentçot, “Wavelets and P.D.E.’s”, *Wavelets : A Tutorial ...*, C.K.Chui editeur, Academic Press.

[24] I.Johnstone, G.Kerkyacharian, D.Picard, “Estimation d’une densité de probabilité par méthode d’ondelettes” *C.R.A.S.*, 1993.

[25] G.Kerkyacharian, D.Picard, *Introduction aux ondelettes et estimation de densité,* Cours, Universités Nancy 1, Paris 6, Paris 7.

[26] G.Kerkyacharian, D.Picard, “Density Estimation in Besov Spaces”, *Statistics & Probability Letters* 13 (1992).

[27] P.G.Lemarié, “Fonction à support compact dans les analyses multi-resolutions”, *Revista Matematica Iberoamericana.*

[28] Y.Meyer, *Ondelettes et opérateurs,* Hermann, 1990

[29] Y.Meyer, “Ondelettes sur l’intervalle”, *Revista Matemática Ibero-Americana* 7 (2), 115-133.

[30] N.Saito, G.Beylkin, “Multiresolution representation using the auto-correlation functions of compactly supported wavelets”, 1992.

[31] G.Strang et G.Fix, “A Fourier analysis of the finite element variational method”, *Constructive aspects of functional analysis*, Geymonat ed., C.I.M.E., 1978, pp 793-840.

[32] G.Strang et V.Strela, “Short Wavelets and Matrix Dilation Equations”, IEEE-SP, vol 43, No 1, janv 1995.

[33] H.Triebel, *Theory of Function Spaces II,* Birkhauser 1983.

[34] P.P.Vaidyanathan, “Quadrature Mirror Filter Banks, M-Band Extensions and Perfect Reconstruction Techniques”, *IEEE-ASSP Magazine* 4 No3, 4-20, 1987.

[35] L.F.Villemoes, “Energy Moments in Time and...”, *SIAM J. Math. Anal.* Vol 23, No. 6, Nov 1992.

[36] M.V.Wickerhauser, *Adapted wavelet analysisfrom theory to software*, A.K.Peters Wellesley, Mass. 1994.