Compléments sur les martingales

Bernard Delyon

Une source importante d'informations sur les martingales est le livre classique de Hall et Heyde [5] ; en plus de nombreux résultats techniques, il contient en particulier de nombreux points historiques oubliés ici.

Dans tout ce document, on suppose connues les propriétés essentielles de l'espérance conditionnelle.

1 Définition

1 - DÉFINITION

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé, $\mathscr{F}_n$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathscr{F}$ (une filtration), et M_n, $n \geqslant 1$ une suite de v.a. réelles de $L_1(P)$.
On dit que M_n est une $\mathscr{F}_n$-martingale si

$$E\big[M_{n+1}|\mathscr{F}_n\big] = M_n.$$

Si l'égalité est remplacée par $\leqslant$ (resp. $\geqslant$) on parle d'une surmartingale (resp. sousmartingale).

Une surmartingale a donc tendance à diminuer. Par commodité, on peut ajouter la tribu triviale $\mathscr{F}_0$ et $M_0 = E[M_1]$ et conserver la propriété de martingale. Nous considérerons dans la suite par défaut que si M_0 ou $\mathscr{F}_0$ apparaît, ce sera toujours le cas.

Si M_n est une $\mathscr{F}_n$-martingale, c'est aussi une $\sigma(M_1, \dots M_n)$-martingale, ce qui fait que la filtration peut ne pas être mentionnée. Il est cependant parfois intéressant de pouvoir conserver la propriété de martingale pour des tribus plus grosses (par exemple pour que plusieurs martingales le soient vis-à-vis de la même filtration ; on verra qu'une martingale arrêtée $M_{\tau\wedge n}$ est encore une martingale par rapport à la filtration d'origine) et dans ce cas le choix de $\mathscr{F}_n$ devient important.

Soit M_n une martingale, si l'on note

$$X_{n+1} = M_{n+1} - M_n, \quad n \geqslant 0 \tag{1}$$

alors

$$E[X_{n+1}|\mathscr{F}_n] = 0, \quad n \geqslant 0 \tag{2}$$

(avec inégalité si M_n est seulement une sousmartingale ou une surmartingale). Et l'on observe facilement que si M_n est dans $L_2(P)$ pour tout n alors

$$E\big[M_n^2\big] = E\big[M_0^2\big] + \sum_{i=1}^{n} E\big[X_i^2\big] \tag{3}$$

EXEMPLE. Si Y_n est une suite i.i.d. d'espérance nulle à valeurs ± 1 (résultat du n-ième coup d'un jeu de pile ou face), alors la suite

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{Y_{k-1}<0} Y_k$$

est une martingale qui correspond au gain au n-ième coup si la stratégie consiste à ne miser qu'après un coup perdant. De manière générale, pour toute suite i.i.d. centrée, la suite

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} f(Y_{k-1}) Y_k$$

est une martingale (sous des hypothèses d'intégrabilité adéquates).

Exemple. Soit X_n un processus autorégressif d'ordre 1 :

$$X_{n+1} = \theta X_n + Y_{n+1}$$

où la suite Y_n est i.i.d. centrée, et X_0 déterministe donné. L'estimateur du paramètre θ aux moindres carrés à partir de $X_1, \dots X_n$, qui est également l'estimateur au maximum de vraisemblance sous l'hypothèse que les Y_i sont gaussiens est

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1} X_i}{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2}.$$

En substituant X_{i+1} par $\theta X_i + Y_{i+1}$ il vient

$$\hat{\theta}_n - \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} Y_{i+1} X_i}{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2}.$$

Le numérateur est une martingale.

Exemple. Soit X et Y deux v.a. réelles, $X \geqslant 0$; définissons

$$Z_n = E[Y|[2^n X]]$$

ou plus explicitement

$$Z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} E[Y|A_k^n] 1_{A_k^n} \qquad A_k^n = \{k 2^{-n} \leqslant X(\omega) < (k+1) 2^{-n}\}$$

où

$$E[Y|A] = \begin{cases} \frac{E[Y 1_A]}{P(A)} & \text{si} \quad \omega \in A \\ \frac{E[Y 1_{A^c}]}{P(A^c)} & \text{si} \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

Alors Z_n est une $\mathscr{F}_n$ martingale où $\mathscr{F}_n$ est la tribu engendrée par la partition des $(A_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ (exercice). On pourra vérifier plus tard que Z_n converge vers $E[Y|X]$.

2 - Théorème (Inégalité de Jensen)

Soit φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. On suppose que $E[|\varphi(M_n)|] < \infty$ pour tout n.
- Si M_n est une martingale alors $\varphi(M_n)$ est une sousmartingale.
- Si M_n est une sousmartingale et φ croissante alors $\varphi(M_n)$ est une sousmartingale.

Démonstration: En effet, pour tous $x, h \in \mathbb{R}$ on a

$$\varphi(x+h) \geqslant \varphi(x) + h\varphi'(x)$$

où $\varphi'(x)$ désigne la dérivée de φ en x si elle existe, et n'importe quel sous gradient sinon (la dérivée à droite p. ex.). Il suffit maintenant d'appliquer cette inégalité à $x = M_n$ et $h = X_{n+1}$ et de prendre l'espérance conditionnelle à $\mathscr{F}_n$. ∎

2 Temps d'arrêt.

Ce paragraphe a pour but d'introduire les temps d'arrêt et de donner leur propriétés essentielles. Nous allons voir dans la suite leur utilisation à la démonstration du théorème de convergence des martingales et à l'étude de la ruine du joueur.

3 - Définition

Soit $(\mathscr{F}_n)_{n\geqslant 1}$ une filtration. Une v.a. positive à valeurs entières ou infinie τ est un temps d'arrêt (ou plus précisément un temps d'arrêt pour $\mathscr{F}_n$) si

$$\forall n \geqslant 1,\ \{\omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

Par exemple : $\tau = \inf\{n \geqslant 1 : M_n + M_{n-1}^2 > 3\}$. En raison de la croissance des tribus, la définition revient à dire que pour tout n

$$\{\tau \leqslant n\} \in \mathscr{F}_n$$

mais attention :

$$\{\tau \geqslant n\} \in \mathscr{F}_{n-1}$$

car c'est le complémentaire de $\{\tau < n\}$.

Si τ et σ sont deux TA, alors $\tau \wedge \sigma$ en est un ; en particulier, pour tout entier p, $\tau \wedge p$ en est un.

4 - Définition

Soit τ un temps d'arrêt, on définit la tribu $\mathscr{F}_\tau$ par

$$A \in \mathscr{F}_\tau \Longleftrightarrow \forall n,\ A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

C'est un exercice de montrer que $\mathscr{F}_\tau$ est engendrée par les ensembles de la forme $A_n \cap \{\tau = n\}$ avec $A_n \in \mathscr{F}_n$ (tout ensemble de $\mathscr{F}_\tau$ est même réunion de tels ensembles). On a également

5 - Proposition

Une v.a. V est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable si et seulement si pour tout n, la variable $V1_{\tau\leqslant n}$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable.
Si U_n est une suite $\mathscr{F}_n$-adaptée (chaque U_n est $\mathscr{F}_n$-mesurable), alors

- $U_\tau = \sum_n U_n 1_{\tau=n}$ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable.
- Pour tout p, $U_p 1_{\tau>p}$ est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable.

Démonstration: V est $\mathscr{F}_\tau$-mesurable si et seulement si pour tout t, $\{\omega : V(\omega) \leqslant t\} \in \mathscr{F}_\tau$, ce qui revient à dire que pour tous t et n $\{V \leqslant t\} \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$, ou encore que $V1_{\tau=n}$ est $\mathscr{F}_n$-mesurable.
Les affirmations suivantes sont désormais immédiates. ∎

6 - Théorème

Si $\sigma \leqslant \tau$ sont deux TA alors $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.

Démonstration: Soit $A \in \mathscr{F}_\sigma$ et $n \geqslant 1$, alors

$$A \cap \{\tau = n\} = \cup_k (A \cap \{\tau = n\} \cap \{\sigma = k\}) = \cup_{k\leqslant n} (A \cap \{\tau = n\} \cap \{\sigma = k\})$$

qui appartient bien à $\mathscr{F}_n$. ∎

Le théorème qui suit est autant important pour souligner ce qui marche bien que pour mettre en évidence les fortes hypothèses nécessaires (le caractère borné des TA) :

7 - Théorème (Théorème d'arrêt)

Si $1 \leqslant \sigma \leqslant \tau \leqslant c < +\infty$ sont deux TA uniformément bornés et M_n une martingale alors

$$E\big[M_\tau|\mathscr{F}_\sigma\big] = M_\sigma$$

avec les inégalités attendues si M_n est seulement une sousmartingale ou une surmartingale.

Démonstration: Commençons par le cas $\tau = c$: Comme $M_\sigma \in \mathscr{F}_\sigma$, il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathscr{F}_\sigma$, on a $E[M_c 1_A] = E[M_\sigma 1_A]$. Mais

$$E[M_c 1_A] = \sum_k E[M_c 1_{\sigma=k} 1_A] = \sum_k E[M_k 1_{\sigma=k} 1_A] = E[M_\sigma 1_A].$$

Pour un τ général on a

$$E[M_\tau|\mathscr{F}_\sigma] = E[E[M_c|\mathscr{F}_\tau]|\mathscr{F}_\sigma] = E[M_c|\mathscr{F}_\sigma] = M_\sigma.$$ ∎

La conséquence suivante est très utilisée :

8 - Corollaire (Martingale arrêtée)

Si τ est un TA pour la filtration $\mathscr{F}_n$ et M_n une martingale (resp. sousmartingale, surmartingale) pour $\mathscr{F}_n$, alors $M_{\tau\wedge n}$ également pour la filtration $\mathscr{F}_{\tau\wedge n}$.

La condition de borne uniforme sur les TA du théorème d'arrêt est très forte, on peut s'en défaire au prix d'hypothèses supplémentaires assez fortes également, voici un exemple :

9 - Theorem (Théorème d'arrêt. Cas non borné)

Soit M_n une martingale et τ un TA. Si $E[|M_\tau|] < \infty$ et $E[M_n 1_{\tau>n}] \to 0$ quand $n \to \infty$, alors

$$E[M_\tau] = E[M_1].$$

Démonstration: Pour tout n

$$E[M_\tau] = E[M_{\tau\wedge n}] - E[M_n 1_{\tau>n} - M_\tau 1_{\tau>n}] = E[M_1] - E[M_n 1_{\tau>n}] + E[M_\tau 1_{\tau>n}]$$

et les deux derniers termes tendent vers 0 quand $n \to \infty$. ∎

Exercice. Montrer la formule, pour deux T.A. bornés et X une v.a. bornée : $E\big[E[X|\mathcal{F}_\tau]|\mathcal{F}_\sigma\big] = E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}]$ (on pourra commencer par le cas σ constant). Montrer également la formule $1_{\sigma\leqslant\tau} E[X|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}] = 1_{\sigma\leqslant\tau} E[X|\mathcal{F}_\sigma]$.

3 Convergence

10 - Théorème

Soit M_n une sousmartingale telle que la suite $E[M_n^+]$ est bornée, alors M_n converge presque sûrement vers une limite quand n tend vers l'infini.
En particulier toute surmartingale positive converge p.s.

Démonstration: Notons que la suite $E[|M_n|] = E[2M_n^+ - M_n]$ est bornée, et remarquons d'abord qu'en vertu du lemme de Fatou

$$E\big[\varliminf_n |M_n|\big] \leqslant \varliminf_n E\big[|M_n|\big] < \infty.$$

Par conséquent

$$P(\varliminf_n |M_n| < +\infty) = 1.$$

Pour montrer la convergence, il s'agit de montrer que $\varliminf_n M_n < \varlimsup_n M_n$ arrive avec probabilité nulle, ce qui revient à dire, puisque $|M_n|$ ne tend pas vers $+\infty$, qu'il n'existe pas de paire de rationnels $0 < a < b$ tels que

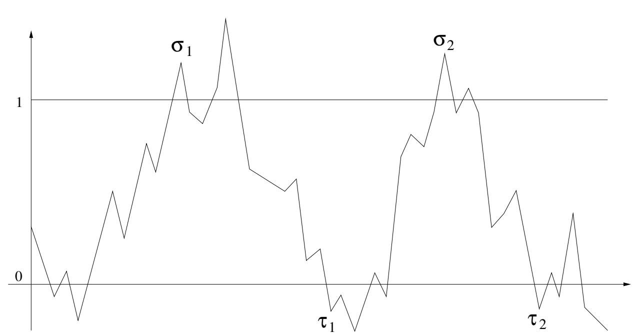
$$M_n < a \text{ i.o.} \quad \text{et} \quad b < M_n \text{ i.o.}$$

(i.o. = infiniment souvent) ; on est donc ramené à démontrer que

$$P(M_n < a \text{ i.o., et } b < M_n \text{ i.o.}) = 0$$

pour tous rationnels $0 < a < b$, car on manipule un nombre dénombrable d'ensembles. Quitte à remplacer M_n par $(M_n - a)/(b - a)$, on peut supposer $a = 0$ et $b = 1$. Considérons les temps successifs de sortie de $[0, 1]$, en commençant par un dépassement de 1 :

$$\sigma_1 = \inf\{n : M_n > 1\}$$
$$\tau_k = \inf\{n > \sigma_k : M_n < 0\}, \quad k \geqslant 1$$
$$\sigma_{k+1} = \inf\{n > \tau_k : M_n > 1\} \quad k \geqslant 1.$$



Soit N_n le nombre de franchissements de 1 vers 0 jusqu'au temps n ; on a

$$N_n \leqslant \sum_k M_{\sigma_k} 1_{\sigma_k \leqslant n} \leqslant \sum_k M_{\sigma_k} 1_{\sigma_k \leqslant n} - M_{\tau_k} 1_{\tau_k \leqslant n}$$

(tous les termes sont positifs). Donc, par application du théorème d'arrêt avec les temps d'arrêt $\sigma_k \wedge n$ et $\tau_k \wedge n$ puis avec $\tau_k \wedge n$ et n (noter que $1_{\sigma_k \leqslant n} - 1_{\tau_k \leqslant n} \geqslant 0$) :

$$\begin{aligned} E[N_n] &\leqslant \sum_k E\big[M_{\sigma_k\wedge n} 1_{\sigma_k \leqslant n} - M_{\tau_k \wedge n} 1_{\tau_k \leqslant n}\big] \\ &\leqslant \sum_k E\big[M_{\tau_k\wedge n}(1_{\sigma_k\leqslant n} - 1_{\tau_k\leqslant n})\big], \quad \text{car} \quad \{\sigma_k \leqslant n\} \in \mathscr{F}_{\sigma_k \wedge n} \\ &= E\Big[M_n\big(\sum_k 1_{\sigma_k\leqslant n} - 1_{\tau_k \leqslant n}\big)\Big] \\ &\leqslant E\big[M_n^+\big] \end{aligned} \tag{4}$$

car la dernière somme vaut 0 ou 1. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient que le nombre total de franchissements est d'espérance finie, il est donc fini avec probabilité 1. ∎

Un complément. Mentionnons un autre théorème qui peut s'avérer utile (on en trouvera bien d'autres dans [5]) :

11 - Théorème

Soit $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ une $\mathscr{F}_n$-surmartingale, $1 \leqslant p \leqslant 2$, et $s_n = \sum_{i=1}^n E\big[|X_i|^p|\mathscr{F}_{i-1}\big]$. Alors sur $\{s_\infty < \infty\}$, la suite M_n converge p.s. vers une limite finie et sur $\{s_\infty = \infty\}$, pour tout $\varepsilon > 0$, $M_n/(s_n \log(s_n)^{1+\varepsilon})^{1/p} \to 0$.

Démonstration: Commençons par la convergence sur $\{s_\infty < \infty\}$.

Considérons pour tout entier a la surmartingale $M_n^{(a)} = \sum_{i=1}^n X_i 1_{s_i \leqslant a}$. Pour tout ω tel que $s_\infty < \infty$, il existe a tel que la suite $M_n^{(a)}$ soit identique à la suite M_n ; pour traiter le cas $s_\infty < \infty$, il suffit donc de montrer que chaque surmartingale $M_n^{(a)}$ converge p.s. Notons que si $m, x \in \mathbb{R}$, et si σ_m est le signe de m, on a par convexité de $x \mapsto |x|^p$ (rappel : $f(x+h) \leqslant f(x) + hf'(x+h)$ où f' est la dérivée à droite ou à gauche)

$$\begin{aligned} |m+x|^p &\leqslant |m|^p + px|m+x|^{p-1}\sigma_{m+x} \\ &= |m|^p + px|m|^{p-1}\sigma_m + px|m|^{p-1}(\sigma_{m+x} - \sigma_m) + px(|m+x|^{p-1} - |m|^{p-1})\sigma_{m+x} \\ &\leqslant |m|^p + px|m|^{p-1}\sigma_m + 2p|x|^p \end{aligned}$$

(si les signes diffèrent alors $|m| \leqslant |x|$) ce qui permet de montrer immédiatement que $E[|M_{n+1}^{(a)}|^p] \leqslant E[|M_n^{(a)}|^p] + 2pE[|X_{n+1}|^p 1_{s_{n+1}\leqslant a}]$; donc

$$E\big[|M_{n+1}^{(a)}|^p\big] \leqslant 2p \sum_k E\big[|X_k|^p 1_{s_k \leqslant a}\big] = 2p \sum_k E\big[(s_k - s_{k-1}) 1_{s_k \leqslant a}\big] \leq 2ap.$$

Par conséquent $M_n^{(a)}$ est bornée dans L_p et donc dans L_1.

Le résultat concernant $\{s_\infty = \infty\}$ s'obtient en appliquant le premier à $M'_n = \sum_{i=1}^n (s_i \log(s_i)^{1+\varepsilon})^{-1/p} X_i$ (on a bien $s'_\infty < \infty$!) et en utilisant ensuite le lemme de Kronecker [5]. ∎

Exemple : Chaînes de Markov. Soit une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à espace d'états fini S. On identifie les fonctions sur S à des vecteurs, et la matrice de transition Π à l'opérateur de transition :

$$(\Pi f)_i = E[f(X_n)|X_{n-1} = i] = \sum_j p_{ij} f_i.$$

On suppose que le chaîne est apériodique indécomposable : la valeur propre 1 de Π est simple et est l'unique valeur propre de module 1. Dans ce cas, la mesure invariante π est unique et Π^n converge exponentiellement vite vers la matrice ayant π sur chaque ligne. Si une fonction f satisfait

$$\pi(f) = \sum_i \pi_i f_i = 0$$

alors l'équation de Poisson

$$g - \Pi g = f \tag{5}$$

a une solution

$$g = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi^i f$$

et les autres solutions diffèrent d'une constante. On peut alors réécrire

$$\sum_{i=1}^{n} f(X_i) = \sum_{i=1}^{n} g(X_i) - (\Pi g)(X_i) = M_n + g(X_0) - (\Pi g)(X_n)$$

avec la martingale

$$M_k = \sum_{i=1}^{k} g(X_i) - \Pi g(X_{i-1}).$$

(Cette construction s'étend à toute chaîne de Markov pour autant que l'on puisse résoudre l'équation (5)). Le théorème 11 appliqué avec $p = 2$ montre alors que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{n \log n}(\log n)^{\varepsilon}} \sum_{i=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow{p.s.} 0.$$

4 Autre application des TA : le casino

Soit

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$
$$P(X_i = 1) = p, \; P(X_i = -1) = 1 - p = q.$$

Le X_i sont indépendantes. S_n représente le gain après n jeux ayant une probabilité de gain p. Soient a et b entiers, $a \leqslant 0 \leqslant b$, on cherche ici à calculer la probabilité que S_n atteigne b avant a.

Soit la fonction

$$g(x) = (q/p)^x.$$

$M_n = g(S_n)$ est une martingale :

$$\begin{aligned} E[g(S_n)|X_1...X_{n-1}] =& g(S_{n-1})E[(q/p)^{X_n}|X_1...X_{n-1}] \\ =& g(S_{n-1})(p(q/p)^1 + q(q/p)^{-1}) \\ =& g(S_{n-1}). \end{aligned}$$

Soit le TA $\tau = \min\{n : S_n \notin [a, b]\}$ et $c = \max(b, |a|)$. Clairement $E[|M_\tau|] \leqslant 1 + (q/p)^{c+1}$. Par ailleurs $E[M_n 1_{\tau > n}] \leqslant (1 + (q/p)^c)P(\tau > n)$. Si $p \neq q$ alors $\frac{S_n}{n} \to p - q \neq 0$, et donc $P(\tau < \infty) = 1$; avec un peu plus d'efforts, on peut montrer que ceci reste vrai si $p = q = 1/2$ (utiliser le corollaire 13 plus bas) . Par conséquent $E[M_n 1_{\tau > n}] \to 0$ et l'on peut appliquer le théorème 9 :

$$E[g(S_\tau)] = 1.$$

Mais, par définition

$$E[g(S_\tau)] = (q/p)^a P(S_\tau = a) + (q/p)^b P(S_\tau = b) = (q/p)^a + ((q/p)^b - (q/p)^a) P(S_\tau = b).$$

Donc

$$P(S_\tau = b) = \frac{1 - (q/p)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a}.$$

C'est la probabilité d'atteindre b avant a. Si la fortune initiale est F, en prenant $a = -F$, il vient

$$P(\text{gagner } b \text{ avant la ruine}) = \frac{1 - (q/p)^{-F}}{(q/p)^b - (q/p)^{-F}} = \frac{(q/p)^F - 1}{(q/p)^{F+b} - 1}.$$

5 Lemme de Borel-Cantelli conditionnel

12 - Théorème

Soit S_n une sous-martingale telle que pour tout $a > 0$

$$E\big[(S_{\tau_a})_+ 1_{\tau_a < \infty}\big] < \infty$$

où τ_a est le premier instant n où $S_n \geqslant a$. Alors la suite $S_n(\omega)$ converge là où elle est bornée supérieurement :

$$P\big(\lim_n S_n \text{ existe}\big) + P\big(\sup_n S_n = +\infty\big) = 1.$$

Remarque. La condition n'est pas superflue : soit une suite de v.a. indépendantes X_n telles que $P(X_n = n^2) = 1 - P(X_n = -1) = 1/(n^2+1)$; le lemme de Borel-Cantelli implique que $X_n = n^2$ n'arrive qu'un nombre fini de fois et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est une martingale qui tend vers $-\infty$.

Démonstration: Pour tout $a > 0$, la sous-martingale $S_{n \wedge \tau_a}$ arrêtée à sa première entrée dans $[a, +\infty[$ satisfait

$$(S_{n \wedge \tau_a})_+ \leqslant a + (S_{\tau_a})_+ 1_{\tau_a < \infty}.$$

Par conséquent $(S_{n \wedge \tau_a})_+$ est bornée dans L_1, et la sous-martingale $S_{n \wedge \tau_a}$ converge p.s. Sur l'ensemble $\{\omega : \sup_n S_n < a\}$, S_n et $S_{n \wedge \tau_a}$ coïncident, et donc S_n converge. Puisque ceci est vrai pour tout a, on en déduit la convergence S_n sur $\{\omega : \sup_n S_n < +\infty\}$. ∎

13 - Corollaire

Soit M_n une martingale telle que tout $n > 0$

$$E\big[\sup_n |M_n - M_{n-1}|\big] < \infty$$

alors

$$P\big(\lim_n M_n \text{ existe}\big) + P\big(\sup_n M_n = +\infty \text{ et } \inf_n M_n = -\infty\big) = 1.$$

Démonstration: Appliquer le théorème précédent à $S_n = M_n$ et à $S_n = -M_n$. ∎

14 - THÉORÈME (BOREL-CANTELLI CONDITIONNEL)

Soit une filtration croissante $\mathscr{F}_n$ et $A_n \subset \mathscr{F}_n$, alors

$$\Big\{\omega : \omega \in A_n \text{ infiniment souvent}\Big\} = \Big\{\omega : \sum_n P(A_n|\mathscr{F}_{n-1}) = \infty\Big\}.$$

Démonstration: Appliquer le corollaire précédent à $M_n = \sum_{k=1}^n 1_{A_k} - \sum_{k=1}^n P(A_k|\mathscr{F}_{k-1})$, car presque sûrement : soit $M_n(\omega)$ converge et les deux sommes ont même comportement, soit $M_n(\omega)$ diverge et en vertu du corollaire les deux sommes sont non bornées et donc tendent vers l'infini. ∎

6 Martingales renversées

Soit $\mathscr{F}_n$, $n \geqslant 1$; une filtration *décroissante*, une $\mathscr{F}_n$-martingale renversée est une suite (M_n) de v.a. intégrables telles que

$$E[M_{n-1}|\mathscr{F}_n] = M_n, \quad n > 1.$$

On a donc

$$M_n = E[M_1|\mathscr{F}_n]. \tag{6}$$

15 - THÉORÈME

Soit (M_n) une martingale renversée, alors $\|M_n\|_1 \leqslant \|M_1\|_1$ et M_n converge avec probabilité 1 et dans L_1 vers une limite finie M_∞ qui vaut $E\big[M_1|\mathscr{F}_\infty\big]$, $\mathscr{F}_\infty = \cap_n \mathscr{F}_n$.

Nous ne détaillons pas la démonstration : il faut voir que pour tout n, la suite $M_n, M_{n-1}, \dots M_1$ est une martingale usuelle et la formule (4) peut être encore utilisée. Etant valide pour tout n on obtient encore que le nombre total de franchissements est d'espérance fini, ce qui permet de conclure comme avant. La convergence dans L_1 vient de ce que la formule (6) implique que la suite M_n est uniformément intégrable en vertu de la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
E[|M_n|1_{|M_n|>a}] \leqslant & E[|M_1|1_{|M_n|>a}] \\
\leqslant & E[|M_1|1_{|M_1|>\sqrt{a}}] + E[|M_1|1_{|M_1|\leqslant\sqrt{a}}1_{|M_n|>a}] \\
\leqslant & E[|M_1|1_{|M_1|>\sqrt{a}}] + \sqrt{a}P(|M_n| > a) \\
\leqslant & E[|M_1|1_{|M_1|>\sqrt{a}}] + \frac{\sup_n E[|M_n|]}{\sqrt{a}}.
\end{aligned}$$

Le fait que $M_\infty = E[M_1|\mathscr{F}_\infty]$ s'obtient alors par passage à la limite dans l'identité $E[M_1\xi] = E[E[M_1|\mathscr{F}_n]\xi]$ valide pour tout v.a. ξ bornée et $\mathscr{F}_\infty$-mesurable.

Une application intéressante existe pour les variables échangeables [5].

7 Théorème-limite central pour les tableaux de martingale

Un tableau de martingales, possiblement vectorielles, est une famille de v.a. et de tribus $\{S_{ni}, \mathscr{F}_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant n\}$ telles que

$$E[S_{n,i+1}|\mathscr{F}_{ni}] = S_{ni}.$$

C'est-à-dire que pour tout n fixé, la suite S_{ni}, $1 \leq i \leq n$, est une martingale. On notera dans la suite

$$X_{ni} = S_{ni} - S_{n,i-1}$$

les accroissements de martingale. L'exemple le plus simple est

$$S_{ni} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

où Y_i est une suite i.i.d. centrée, $X_{ni} = \frac{1}{\sqrt{n}} Y_i$. Pour toute cette partie, on se réfère à [5].

On verra deux types de résultats sur les martingales selon que le contrôle de S_{nn} se base sur $\sum_{i=1}^{n} X_{ni}^2$ ou sur $\sum_{i=1}^{n} E[X_{ni}^2 | \mathscr{F}_{n,i-1}]$. Les premiers ont le défaut d'avoir en général moins d'intérêt pratique (penser au cas où les X_{ni} sont des variables indépendantes).

16 - Lemme

Pour tout $b > 0$ il existe une constante c_b avec la propriété suivante : Soit $Y_1, \ldots Y_n$ une suite d'accroissements de martingale, et

$$T_k = Y_1 + \ldots Y_k, \quad U_k = Y_1^2 + \ldots Y_k^2,$$
$$\tau = \inf\{k : 1 \leqslant k \leqslant n, U_k > b\}$$

avec $\tau = n+1$ si la condition n'est jamais satisfaite, alors

$$\left| E[e^{iT_{\tau-1} + U_{\tau-1}/2}] - 1 \right| \leqslant c_b E[\sup_k |Y_k|]. \tag{7}$$

Démonstration. Il existe une constante C_b telle que pour $|y|^2 \leqslant b$

$$|e^{iy+y^2/2} - iy - 1| \leqslant C_b |y|^3.$$

Posons pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $R_k = e^{iT_k + U_k/2}$, $R_0 = 1$. On a

$$E[R_{\tau-1}] - 1 = \sum_{k=1}^{n} E[(R_k - R_{k-1}) 1_{k \leqslant \tau-1}] \tag{8}$$
$$= \sum E[1_{k \leqslant \tau-1} R_{k-1} (e^{iY_k + Y_k^2/2} - 1 - iY_k)] + iE[1_{k \leqslant \tau-1} R_{k-1} Y_k]. \tag{9}$$

D'une part

$$|E[1_{k \leqslant \tau-1} R_{k-1} (e^{iY_k + Y_k^2/2} - 1 - iY_k)] \leqslant C_b e^{b/2} E[1_{k \leqslant \tau-1} Y_k^2 \sup_i |Y_i|]$$

et d'autre part, en posant $Y_{n+1} = 0$, comme $\{k \leqslant \tau\} \in \mathscr{F}_{k-1}$

$$|E[1_{k \leqslant \tau-1} R_{k-1} Y_k]| = |E[1_{k \leqslant \tau} R_{k-1} Y_k] - E[R_{k-1} 1_{k=\tau} Y_k]| \leqslant e^{b/2} E[1_{k=\tau} \sup_i |Y_i|].$$

En reportant dans (8) on obtient

$$\left| E[e^{iT_{\tau-1} + U_{\tau-1}/2}] - 1 \right| \leqslant (C_b b + 1) e^{b/2} E[\sup_k |Y_k|]. \qquad \blacksquare$$

17 - Théorème

Soit $\{S_{ni}, \mathscr{F}_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant n\}$ un tableau de martingales vectorielles :

$$E[S_{n,i+1}|\mathscr{F}_{ni}] = S_{ni}.$$

Supposons que les variables $X_{ni} = S_{ni} - S_{n,i-1}$ satisfont les conditions suivantes

$$E[\sup_i \|X_{ni}\|] \longrightarrow 0, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ni}X_{ni}^T \xrightarrow{P} V \tag{11}$$

pour une certaine matrice V. Alors

$$S_{nn} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V). \tag{12}$$

Remarque. En pratique, pour vérifier (10), on utilisera souvent que

$$E[\sup_i \|X_{ni}\|] \leqslant E[(\sum_i \|X_{ni}\|^p)^{1/p}]] \leqslant (\sum_i E[\|X_{ni}\|^p])^{1/p}$$

avec un $p > 2$. Voir aussi le Théorème 20.

Démonstration. Commençons par le cas scalaire et appliquons le lemme avec $Y_k = tX_{nk}$, $t \in \mathbb{R}$. La dépendance en n fait qu'on a deux suites $\widetilde{T}_n = T_{n,\tau-1}$ et $\widetilde{U}_n = U_{n,\tau-1}$ qui satisfont (7). Si b a été choisi supérieur à t^2V, $P(\tau - 1 = n)$ converge vers 1 et donc $\widetilde{U}_n$ converge en probabilité vers V. Comme la suite $\widetilde{U}_n$ est bornée, on a convergence dans L_1 de $e^{\widetilde{U}_n/2}$ vers $e^{V/2}$. Par conséquent $\widetilde{T}_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, V)$ car le membre de droite de (7) tend vers 0 par hypothèse, ce qui conclut car $P(\widetilde{T}_n = S_{nn})$ tend vers 1. Pour l'extension à plusieurs dimensions il suffit d'appliquer le résultat de dimension 1 à $\langle S_{ni}, u\rangle$ pour tout vecteur u, ce qui montre bien la convergence des fonctions caractéristiques. ∎

18 - Théorème

On se place sous les hypothèses du théorème 17 sauf que l'on autorise V à être une variable aléatoire. On suppose en outre que $\mathscr{F}_{ni} \subset \mathscr{F}_{n+1,i}$. Dans ce cas on a la même conclusion, conditionnellement à V, au sens où pour tout $u \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction φ continue bornée

$$E[\varphi(V)e^{i\langle u, S_{nn}\rangle}] \to E[\varphi(V)e^{-\langle Vu,u\rangle/2}]. \tag{13}$$

Démonstration. Commençons par supposer $0 < a < V$ p.s. pour un certain réel a et posons $V_n = \sum_{i=1}^n X_{ni}X_{ni}^T$. Soit $p_n \to \infty$ une suite telle que $p_n \sup_i \|X_{ni}\| \to 0$ en probabilité. Les variables

$$X'_{ni} = 1_{i+p_n \leqslant n} 1_{V_{p_n} > a/2} V_{p_n}^{-1/2} X_{n,i+p_n}$$

satisfont les hypothèses du théorème avec $V' = Id$ (on prend la racine carrée définie positive, qui est une fonction continue). Ceci reste vrai si l'on modifie pour chaque n la mesure par une densité D_n $\mathscr{F}_{p_n p_n}$-mesurable bornée indépendamment de n car les X'_{ni} restent des accroissements de martingale. Par conséquent

$$E[e^{i\langle u, S'_{nn}\rangle} D_n] \to e^{-u^2/2}$$

ce qui entraîne pour toute fonction φ positive bornée continue, choisissant $D_n = \varphi(V_{p_n})/E[\varphi(V_{p_n})]$:

$$E[e^{i\langle u, S'_{nn}\rangle}\varphi(V_{p_n})] \to e^{-\|u\|^2/2}E[\varphi(V)].$$

Comme par ailleurs

$$S'_{nn} - V^{-1/2}1_{V_{p_n}>a/2}S_{nn} = (1 - V^{-1/2}V_{p_n}^{1/2})S'_{nn} - V^{-1/2}1_{V_{p_n}>a/2}\sum_{i\leqslant p_n} X_{n,i+p_n}$$

$S'_{nn} - V^{-1/2}S_{nn}$ converge en probabilité vers 0, et donc

$$E[e^{i\langle u, V^{-1/2}S_{nn}\rangle}\varphi(V)] \to e^{-\|u\|^2/2}E[\varphi(V)].$$

Donc la paire $(V, V^{-1/2}S_{nn})$ converge en loi vers (V, Γ) où Γ est $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de V, d'où la conclusion. Pour le cas où V peut être arbitrairement proche de 0, on considère $X'_{ni} = X_{ni} + \varepsilon Y_i/\sqrt{n}$, pour une suite $Y_i \sim \mathcal{N}(0, Id)$ i.i.d., $V' = V + \varepsilon^2 Id$, et il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 dans (13). ∎

19 - Lemme

Soit $(Z_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des v.a. $\geqslant 0$, et des tribus $\mathscr{F}_{i-1} \subset \mathscr{F}_i$. Soit

$$U = \sum_{i=1}^n E[Z_i|\mathscr{F}_{i-1}], \qquad V = \sum_{i=1}^n Z_i.$$

Alors pour toute fonction φ convexe sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée à droite φ'

$$E[\varphi(U)] - \varphi(0) \leqslant E[V\varphi'(U)].$$

En particulier, en appliquant cette inégalité à $\varphi(x) = (1-x)_+$, on obtient que si une suite U_k de telles v.a. converge en probabilité vers 0 alors la suite V_k correspondante aussi.

Démonstration. Soit $U_k = \sum_{i=1}^k E[Z_i|\mathscr{F}_{i-1}]$; la convexité de φ implique

$$\varphi(U_k) - \varphi(U_{k-1}) \leqslant E[Z_k|\mathscr{F}_{k-1}]\varphi'(U_k)$$

et donc, comme $U_k \in \mathscr{F}_{k-1}$ et φ' est croissante

$$E[\varphi(U)] - \varphi(0) = \sum_{k=1}^n E[\varphi(U_k) - \varphi(U_{k-1})] \leqslant \sum_{k=1}^n E[Z_k\varphi'(U_k)] = E[V\varphi'(U)].$$

Pour le dernier point noter que l'application à $\varphi(x) = (1-x)_+$ donne $E[V1_{U<1}] \leqslant E[U \wedge 1]$ ce qui implique le résultat si l'on note que $E[V \wedge 1] \leqslant E[V1_{U<1}] + P(U \geqslant 1)$. ∎

20 - Théorème

Dans le théorème 17 ou 18 on peut remplacer (10) par

$$\sum_i E[\|X_{ni}\|1_{\|X_{ni}\|>1}|\mathscr{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{P} 0 \tag{14}$$

$$\sup_i \|X_{ni}\| \xrightarrow{P} 0. \tag{15}$$

Démonstration. Il suffit de décomposer S_{nn} en

$$S_{nn} = \sum_i X_{ni} 1_{\|X_{ni}\| \leqslant 1} - E[X_{ni} 1_{\|X_{ni}\| \leqslant 1} | \mathscr{F}_{n,i-1}] + \sum_i X_{ni} 1_{\|X_{ni}\| > 1} - \sum_i E[X_{ni} 1_{\|X_{ni}\| > 1} | \mathscr{F}_{n,i-1}].$$

Les deux dernières sommes tendent vers 0 en probabilité en vertu de (14) et du lemme 19. De plus la première somme satisfait l'hypothèse (10) car chacun des deux termes est de norme $\leqslant 1$ et il y a convergence vers 0 en probabilité : c'est évident pour le premier et

$$P(\sup_i \|E[X_{ni} 1_{\|X_{ni}\| \leqslant 1} | \mathscr{F}_{n,i-1}]\| \geqslant \varepsilon) = P(\sup_i \|E[X_{ni} 1_{\|X_{ni}\| > 1} | \mathscr{F}_{n,i-1}]\| \geqslant \varepsilon) \to 0.$$

Vérifions qu'elle satisfait également (11) avec la même variance asymptotique. Utilisons pour cela que pour montrer que $\sum (u_i - v_i)(u_i - v_i)^T \to V$ il suffit d'avoir $\sum u_i u_i^T \to V$ et $\sum \|v_i\|^2 \to 0$. Or (15) implique que $\sum_i X_{ni} X_{ni}^T 1_{\|X_{ni}\| \leqslant 1} \to V$ en probabilité, et (14) que $\sum_i \|E[X_{ni} 1_{\|X_{ni}\| \leqslant 1} | \mathscr{F}_{n,i-1}]\|^2 \to 0$ en probabilité. ∎

21 - Théorème

Dans le théorème 17 ou 18 on peut remplacer (10) par (16), et (10,11) par (16,17) :

$$\sum_i E[\|X_{ni}\|^2 1_{\|X_{ni}\| > \varepsilon} | \mathscr{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{P} 0, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0 \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^n E[X_{ni} X_{ni}^T | \mathscr{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{P} V. \tag{17}$$

Démonstration. Clairement (16) implique (14) et (15) en raison du lemme 19, et donc (10).

Il s'agit maintenant de montrer que sous (16,17), $\sum_{i=1}^n E[X_{ni} X_{ni}^T | \mathscr{F}_{n,i-1}] - X_{ni} X_{ni}^T$ converge en probabilité vers 0. L'équation (16) implique l'existence d'une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que

$$\sum_i E[\|X_{ni}\|^2 1_{\|X_{ni}\| > \varepsilon_n} | \mathscr{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{P} 0 \tag{18}$$

il suffit de prendre

$$\varepsilon_n = \inf \Big\{ \varepsilon : \forall k \geqslant n,\ P\Big(\sum_i E[\|X_{ki}\|^2 1_{\|X_{ki}\| > \varepsilon} | \mathscr{F}_{k,i-1}] > \varepsilon \Big) < \varepsilon \Big\}.$$

En vertu du lemme 19 on a également $\sum_i \|X_{ni}\|^2 1_{\|X_{ni}\| > \varepsilon_n} \longrightarrow 0$ en probabilité. Pour conclure, il suffit donc de pouvoir appliquer le théorème 17 aux accroissements de martingale

$$Y_{ni} = X_{ni} X_{ni}^T 1_{\|X_{ni}\| \leqslant \varepsilon_n} - E[X_{ni} X_{ni}^T 1_{\|X_{ni}\| \leqslant \varepsilon_n} | \mathscr{F}_{n,i-1}]$$

et montrer que la variance asymptotique correspondante est nulle. La condition (10) est clairement satisfaite puisque $\|Y_{ni}\| \leqslant 2\varepsilon_n^2$. Et par ailleurs

$$\sum_{i=1}^n \|Y_{ni}\|^2 \leqslant 2\varepsilon_n^2 \sum_{i=1}^n \|Y_{ni}\| \leqslant 2\varepsilon_n^2 \sum_{i=1}^n \|X_{ni}\|^2 1_{\|X_{ni}\| \leqslant \varepsilon_n} + 2\varepsilon_n^2 \sum_{i=1}^n E[\|X_{ni}\|^2 1_{\|X_{ni}\| \leqslant \varepsilon_n} | \mathscr{F}_{n,i-1}].$$

La deuxième somme converge converge en probabilité vers 0 en raison de (17) et du facteur ε_n^2, et par conséquent la première également grâce au lemme 19. ∎

8 Complément : Inégalités de Burkholder

Nous ne démontrons ici que les inégalités de Doob et de Burkholder. Il existe d'autres inégalités du même style qui peuvent être utiles, en particulier les inégalités de Rosenthal [5].

22 - LEMME

Soit $M_n = X_1 + \cdots + X_n$, $M_0 = 0$, une martingale, on pose

$$V_n = X_1^2 + \cdots + X_n^2$$
$$S_n = \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} M_k$$
$$Y_n = \sup_{k \leqslant n} X_k^2.$$

Si f est une fonction convexe alors $f'(S_n)(S_n - M_n) - f(S_n)$ est une surmartingale (sous réserve d'intégrabilité des trois termes ; si f' est discontinue, tout choix de sous-gradient croissant en x convient). Ceci reste vrai si f est de plus croissante (resp. décroissante) et M_n une sousmartingale (resp. surmartingale).
Si g est une fonction dont la dérivée g' est convexe alors $g(M_n) - \frac{1}{2}V_n g''(S_n)$ est une surmartingale (sous réserve d'intégrabilité des deux termes). Ceci reste vrai si g est de plus décroissante (resp. croissante) et M_n une sousmartingale (resp. surmartingale).
Si h est une fonction convexe croissante et M_n une martingale ou une sousmartingale positive alors $h(V_n - Y_n) - M_n^2 h'(V_n)$ est une surmartingale (sous réserve d'intégrabilité des deux termes).

REMARQUE. Le lemme implique $E[f'(S_n)(S_n - M_n) - f(S_n)] \leqslant -f(0)$ qui, si l'on prend $f(x) = (x-a)_+$, pour un $a > 0$, donne l'inégalité de Doob : $aP(S_n > a) \leqslant E[M_n 1_{S_n > a}]$.

Démonstration: La première inégalité vient de

$$f'(S_n)(S_n - M_n) - f(S_n) \leqslant f'(S_{n-1})(S_{n-1} - M_n) - f(S_{n-1})$$

qui est évident si $S_n \neq M_n$ (auquel cas $S_{n-1} = S_n$) et provient de la convexité de f si $S_n = M_n$. Pour la seconde, observer que du fait que g'' est croissante

$$g(M_n) \leqslant g(M_{n-1}) + X_n g'(M_{n-1}) + \frac{X_n^2}{2} g''(S_n)$$

et donc

$$g(M_n) - \frac{1}{2} V_n g''(S_n) \leqslant g(M_{n-1}) + X_n g'(M_{n-1}) - \frac{V_{n-1}}{2} g''(S_n).$$

Pour la troisième, en exploitant la convexité de h et le fait que $V_{n-1} \geqslant V_n - Y_n$ puis le fait que $V_n - M_n^2$ est une martingale (resp. surmartingale) si M_n est une martingale (resp. sousmartingale positive), il vient :

$$\begin{aligned} h(V_n - Y_n) - M_n^2 h'(V_n) &\leqslant h(V_{n-1} - Y_n) + h'(V_{n-1})(V_n - V_{n-1}) - M_n^2 h'(V_n) \\ &\leqslant h(V_{n-1} - Y_{n-1}) + h'(V_{n-1})(V_n - V_{n-1}) - M_n^2 h'(V_{n-1}) \\ E[h(V_n - Y_n) - M_n^2 h'(V_n) | \mathscr{F}_{n-1}] &\leqslant h(V_{n-1} - Y_{n-1}) - M_{n-1}^2 h'(V_{n-1}) \end{aligned}$$

∎

23 - Théorème

Soit M_n une martingale. On pose ici $S_n = \max_{k\leqslant n}|M_k|$. Alors, pour $p>1$

$$\|S_n\|_p \leqslant q\|M_n\|_p, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{19}$$

$$\|V_n^{1/2}\|_p \leqslant C_p\|M_n\|_p, \quad C_p = 2q\sqrt{\max(p,2)} \tag{20}$$

$$\|M_n\|_p \leqslant C_q\|V_n^{1/2}\|_p. \tag{21}$$

Les deux premières inégalités valent pour les sousmartingales positives.

Démonstration: Il suffit de montrer (19) pour une sousmartingale positive car si M_n est une martingale, alors $M_n' = |M_n|$ est une sousmartingale positive. La propriété de surmatingale implique bien que si le membre de droite est fini, alors $E[M_k^p]$ aussi pour tout $k \leqslant n$ (M_k^p est une sous martingale, th.2) et donc $E[S_n^p]$ également. Par application du lemme à $f(x) = x_+^p, p>1$ on a :

$$(p-1)E[S_n^p] \leqslant pE[M_nS_n^{p-1}] \leqslant p\|M_n\|_p\|S_n\|_p^{p-1}$$

ce qui implique que $q^{-1}\|S_n\|_p \leqslant \|M_n\|_p$. Pour (20) commençons par le cas où M_n est une sousmartingale positive. Dans le cas $p\geqslant 2$, appliquons le lemme à $h(x) = x_+^{p/2}$; il vient

$$E(V_n - Y_n)^{p/2}] \leqslant \frac{p}{2}E[M_n^2V_n^{p/2-1}]$$

soit

$$\begin{aligned}\|V_n\|_{p/2} \leqslant& \|Y_n\|_{p/2} + \left(\frac{p}{2}E[M_n^2V_n^{p/2-1}]\right)^{2/p}\\ \leqslant& \|S_n\|_p^2 + \left(\frac{p}{2}\|M_n\|_p^2\right)^{2/p}\|V_n\|_{p/2}^{1-2/p}\\ \leqslant& \|S_n\|_p^2 + \|M_n\|_p^2 + (1-2/p)\|V_n\|_{p/2}\end{aligned}$$

qui implique $\|V_n\|_{p/2} \leqslant p\|S_n\|_p^2$. Si $1<p\leqslant 2$, notons que pour tout $\lambda>0$

$$(\lambda V_n)^{p/2} \leqslant \frac{p}{2}\lambda V_nS_n^{p-2} + \frac{2-p}{2}S_n^p.$$

et appliquons le lemme à $g(x) = -x^p$

$$E[V_nS_n^{p-2}] \leqslant \frac{2}{p(p-1)}E[M_n^p]$$

ce qui donne finalement en exploitant (19) et en prenant $\lambda = q^{p-1}p^2/2$

$$\begin{aligned}\lambda^{p/2}E[V_n^{p/2}] \leqslant& \frac{\lambda}{p-1}E[M_n^p] + \frac{2-p}{2}q^pE[M_n^p]\\ \|V_n\|_{p/2} \leqslant& \lambda^{-1}\left(\frac{\lambda}{p-1}+\frac{2-p}{2}q^p\right)^{2/p}\|M_n\|_p^2 = \lambda^{-1}q^2\|M_n\|_p^2 \leqslant 2q^2\|M_n\|_p^2.\end{aligned}$$

On a donc démontré (20) dans le cas sousmartingale positive avec une constante $C_p^0 = q\sqrt{\max(p,2)}$. Si maintenant M_n est une martingale, écrivons $M_n = M_n^+ - M_n^-$ différence de deux sousmartingales positives ; l'inégalité de Minkowski implique que $V_n^{1/2} \leqslant (V_n^+)^{1/2} + (V_n^-)^{1/2}$, et en l'appliquant à nouveau :

$$\|V_n^{1/2}\|_p \leqslant \|(V_n^+)^{1/2}\|_p + \|(V_n^-)^{1/2}\|_p \leqslant 2C_p^0E[|M_n|^p]^{1/p}.$$

L'équation (21) peut se démontrer à partir de (20) comme suit. Soit $N_k = E[|M_n|^{p-2}M_n|\mathscr{F}_k]$, $Y_k = N_k - N_{k-1}$, et $W_n = \sum_{k=1}^n Y_k^2$; alors

$$\begin{aligned}\|M_n\|_p^p &= E[M_n N_n] \\ &= E\Big[\sum_{k=1}^n X_k Y_k\Big] \\ &\leqslant E[V_n^{1/2} W_n^{1/2}] \\ &\leqslant \|V_n^{1/2}\|_p \|W_n^{1/2}\|_q \\ &\leqslant \|V_n^{1/2}\|_p C_q^{1/2} \|N_n\|_q \\ &= C_q \|V_n^{1/2}\|_p \|M_n\|_p^{p/q}.\end{aligned}$$

∎

9 Complément : Inégalité de Bennett

Voici un résultat essentiellement dû à Freedman[1] :

24 - Théorème (Inégalité de Bennett pour les surmartingales)

Soit $S_n = X_1 + X_2 + \dots X_n$, une surmartingale nulle en 0, alors en notant $S^* = \max_{1\leqslant k<\infty} S_k$, $X^* = \max_{1\leqslant k<\infty} X_k$, et

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} E[X_k^2|\mathscr{F}_{k-1}].$$

On a pour tous $x, c, s > 0$

$$P(S^* > x, X^* \leqslant c, U \leqslant s^2) \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2s^2}B(xcs^{-2})\right\},$$

où

$$B(t) = 2t^{-2}[(1+t)\log(1+t) - t].$$

Remarques. 1/ On verra (voir l'exercice plus bas) que si les $\|X_k\|_\infty$ sont de l'ordre de $E[X_k^2|\mathscr{F}_{k-1}]^{1/2}$ (Bernoulli équilibré...) on peut avoir intérêt à utiliser l'inégalité plus simple (23) (voir la remarque qui suit (23)).

2/ On vérifie facilement que la fonction B se compare bien à $t^{-1}\log(1+t)$, elle satisfait

$$\max\Big((1+t/3)^{-1}, 2t^{-1}\log(t), t^{-1}\log(1+t)\Big) \leqslant B(t) \leqslant 2t^{-1}\log(1+t).$$

L'inégalité de Bernstein classique est celle obtenue si l'on suppose les X_i indépendantes, majorées par une constante fixe $c > 0$ et que l'on utilise $B(t) \geqslant (1+t/3)^{-1}$:

$$P(S_n > x) \leqslant \exp -\frac{x^2}{2Var(S_n) + 2xc/3}\ , \qquad x \geqslant 0. \tag{22}$$

1. Dans [3] ($B(t)$ est remplacé par la minoration habituelle $(1+t/3)^{-1}$, généralement satisfaisante, mais insuffisante pour obtenir le Théorème 26 plus bas.

3/ L'application typique de ce théorème est sa conséquence pour une martingale $M_n = X_1 + \ldots X_n$

$$P(|M|^* > x, |X|^* \leqslant c, U \leqslant s^2) \leq 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2s^2}B(xcs^{-2})\right\},$$

(on note $|M|^* = \sup_k |M_k|$) par application à $S_n = M_n$ et $S_n = -M_n$, puis

$$P(|M|^* > x) \leqslant 2\exp\left\{-\frac{x^2}{2s^2}B(xcs^{-2})\right\} + P(|X|^* > c) + P(U > s^2).$$

Démonstration. Commençons par introduire un paramètre d'échelle et une troncature : pour tout $\lambda > 0$ la variable $Y_k = \lambda \min(X_k, c)$ satisfait

$$E[Y_k|\mathscr{F}_{k-1}] \leqslant 0, \quad E[Y_k^2|\mathscr{F}_{k-1}] \leqslant \lambda^2 E[X_k^2|\mathscr{F}_{k-1}].$$

Notons que si $y \leqslant A$ et $A \geqslant 0$ on a [2]

$$\varphi(y) \leqslant \varphi(A), \qquad \varphi(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

En exploitant cette inégalité avec $A = \lambda c$, on obtient $e^{Y_k} \leqslant 1 + Y_k + Y_k^2\varphi(\lambda c)$ pour tout k, puis en utilisant $1 + x \leqslant e^x$, il vient

$$E[e^{Y_{j+1}}|\mathscr{F}_j] \leqslant 1 + E[Y_{j+1}|\mathscr{F}_j] + E[Y_{j+1}^2|\mathscr{F}_j]\varphi(\lambda c) \leqslant \exp\left\{E[Y_{j+1}^2|\mathscr{F}_j]\varphi(\lambda c)\right\}$$

soit

$$E[e^{Y_{j+1} - \varphi(\lambda c)E[Y_{j+1}^2|\mathscr{F}_j]}|\mathscr{F}_j] \leqslant 1$$

et par conséquent le processus

$$P_k = e^{\sum_{j=1}^k Y_j - \varphi(\lambda c)\sum_{j=1}^k E[Y_j^2|\mathscr{F}_{j-1}]}$$

est une surmartingale positive et en particulier, en vertu du lemme 25, $P(P^* > x|\mathscr{F}_0) \leqslant P_0/x$. Donc

$$P(S^* \geqslant x, X^* \leqslant c, U \leqslant s^2) \leqslant P(P^* \geqslant e^{\lambda x - \lambda^2 s^2 \varphi(\lambda c)}) \leqslant e^{-\lambda x + \lambda^2 s^2 \varphi(\lambda c)}.$$

On termine en choisissant $\lambda = c^{-1}\log(1 + xc/s^2)$. ∎

25 - Lemme (Inégalité maximale)

Soit P_n une surmartingale positive, alors pour tout $x > 0$ on a

$$P(\max_{k \geqslant 0} P_k > x|\mathscr{F}_0) \leqslant \frac{P_0}{x}.$$

Démonstration. Soit τ le premier instant que $P_k > x$ alors, en vertu du théorème d'arrêt, $P_{\tau\wedge k}$ est encore une surmartingale et pour tout $n > 0$

$$P(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} P_k > x|\mathscr{F}_0) = P(P_{\tau\wedge n} > x|\mathscr{F}_0) \leqslant \frac{1}{x}E(P_{\tau\wedge n}|\mathscr{F}_0) \leqslant \frac{P_0}{x}.$$ ∎

2. La fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (à cause de son développement) ; et par ailleurs la fonction $e^y - 1 - y - y^2/2$ étant concave sur $\mathbb{R}_-$ avec dérivée nulle en 0, est nécessairement croissante sur $\mathbb{R}_-$, ce qui implique que $\varphi(y) \leqslant \varphi(0)$ pour $y \leqslant 0$.

Exercice (*Inégalité de Azuma généralisée*)**.** Démontrer les inégalités $e^{x-x_+^2/2} \leqslant 1+x+x_-^2/2$, et $e^{x-x^2/6} \leqslant 1+x+x^2/3$ et les utiliser pour démontrer que si $S_k=\sum_{j=1}^k X_j$ est une surmartingale et

$$V_k=\sum_{j=1}^k (X_j^+)^2+E[(X_j^-)^2|\mathscr{F}_{j-1}], \quad \text{ou bien} \quad V_k=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^k X_j^2+2E[X_j^2|\mathscr{F}_{j-1}]$$

alors pour tout $\lambda>0$, $\exp\{\lambda S_k-\lambda^2 V_k/2\}$ est aussi une surmartingale. En déduire que

$$P(S_n>x, V_n\leqslant s^2)\leqslant \exp(-x^2/2s^2). \tag{23}$$

Remarques. Si les X_i sont i.i.d. et x d'ordre $\sqrt{n}$, le deuxième terme de la somme dans (22) est petit devant le premier et la borne correspond à ce que l'on attend du théorème-limite central, contrairement à (23) avec $s^2=\|V_n\|_\infty$. En revanche dans la zone des x grands, (23) devient avantageux.

Application : Convergence presque sûre des tableaux de martingales

Le théorème suivant est utile à l'étude de la convergence vers 0 de sommes $n^{-\alpha}\sum_{i=1}^n Y_i$ (la correspondance avec l'énoncé du théorème est $X_{ni}=n^{-\alpha}Y_i$), mais peut s'appliquer dans des circonstance bien plus générales ; il s'agit d'un résultat de Ghosal et Chandra [4] revisité :

26 - Théorème

Soit $\{S_{nk},\mathscr{F}_{nk}, 1\leqslant k<\infty\}$ un tableau de martingales :

$$S_{nk}=\sum_{i=1}^k X_{ni}, \qquad E[S_{n,k+1}|\mathscr{F}_{nk}]=S_{nk}.$$

On suppose que pour un certain $\varepsilon>0$ on ait

$$n^\varepsilon\sum_{i=1}^\infty E[X_{ni}^2|\mathscr{F}_{n,i-1}] \xrightarrow{p.s.} 0 \qquad \text{et} \qquad \sup_i |X_{ni}| \xrightarrow{p.s.} 0$$

alors $S_{n\infty}$ converge presque sûrement vers 0.

Démonstration. Soit $c,x>0$, on a (rappelons que $B(t)\geqslant 2t^{-1}\log(t)$)

$$\begin{aligned}&P(|S_{n\infty}|>x, \max_k |X_{nk}|\leqslant c, \sum_i E[X_{ni}^2|\mathscr{F}_{n,i-1}]\leqslant n^{-\varepsilon})\\ &\qquad\leqslant 2\exp\left\{-\frac{n^\varepsilon x^2}{2}B(cxn^\varepsilon)\right\}\leqslant 2\exp\left\{-\frac{x}{c}\log(cxn^\varepsilon)\right\}=2\left(\frac{1}{xcn^\varepsilon}\right)^{x/c}.\end{aligned}$$

Faisons $x=2c/\varepsilon$; le lemme de Borel-Cantelli implique alors qu'il existe $N(\omega)$ tel qu'une des trois inégalités soit violée pour $n>N(\omega)$. Comme les deux dernières sont satisfaites pour n assez grand on a bien que $\limsup|S_{n\infty}|\leqslant 2c/\varepsilon$. Comme c'est vrai pour tout $c>0$ le théorème est démontré. ∎

Références

[1] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley, 1968.

[2] R. Durrett, *Probability theory and examples*, Duxbury, 1996.

[3] D.A. Freedman, On tail probabilities for martingales, Ann. Probability, Vol. 3, pp. 100–118,, 1975.

[4] S. Ghosal, T.K. Chandra, Complete convergence of martingale arrays, *J. Theoret. Probab.*, Vol. 11, N. 3, pp. 621–631, 1998.

[5] P. Hall, C.C. Heyde, *Martingale Limit Theory and its Applications*, Academic Press, 1980.