Quelques aspects de l'étude d'une hypersurface complexe à singularité isolée

17 septembre 2004

Le problème soulevé ici est l'étude d'un germe de fonction holomorphe ayant une singularité isolée à l'origine. On souhaite alors construire des objets qui porteront les informations concernant la singularité (invariants géométriques ou numériques par exemple).

1 Intégration sur des formes tests

On va ici présenter une première méthode consistant à examiner des fonctions obtenues en intégrant des formes différentielles tests. Mais avant toute chose, il convient de bien choisir le répresentant de notre germe.

1.1 La construction de Milnor

Soit donc un germe holomorphe en zéro $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ avec $n \geq 1$ et telle que $\{x/\, df_x = 0\}$ admette l'origine comme point isolé. Ainsi f est définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et, quitte à restreindre ce voisinage, on peut supposer que l'origine est le seul point critique de f.
Pour ϵ et η des réels strictement positifs (et assez petits pour que ce qui suit ait un sens), on pose :

$$X(\epsilon,\eta) = \{x \in \mathbb{C}^{n+1}/\|x\| < \epsilon \ \text{ et } |f(x)| < \eta\}$$

et la notation $D(0,\eta)$ désigne le disque ouvert dans $\mathbb{C}$. On doit le théorème suivant a Milnor :

Théorème 1.1 *Si ϵ est assez petit et si $\eta \leq \eta_0(\epsilon)$ alors*

$$f \ : \ X(\epsilon,\eta)\backslash f^{-1}(0) \to D^\star(0,\eta)$$

induit une fibration C^∞ localement triviale et de plus, la fibration ne depend pas de ϵ et η suffisament petits. En particulier,la cohomologie de la fibre ne dépend pas de ϵ et η et vérifie :

$$H^p(X_z,\mathbb{C}) = 0 \ \textit{pour} \ p \neq 0,n \quad \textit{et dim} \ H^n(X_z,\mathbb{C}) = \mu$$

où $X_z = f^{-1}(z)$ désigne la fibre au dessus de z et $\mu = \dim \mathcal{O}/J(f)$ avec $J(f)$ l'idéal engendré par les dérivées partielles de f.

Ce theoreme nécessite bien entendu quelques explications ; le fait que l'on parle de fibration localement triviale signifie ceci : pour tout $z_0 \in D^\star$, il existe un voisinage Δ (par exemple un petit disque) et un C^∞-difféomorphisme $\psi : f^{-1}(\Delta) \to X_{z_0} \times \Delta$ tels que :

$$\forall x \in f^{-1}(\Delta), \quad \mathrm{pr}_2(\psi(x)) = f(x)$$

où pr_2 désigne la projection selon la deuxieme coordonnée. En fait, cela signifie qu'on est localement dans une situation produit. On peut aussi remarquer que comme 0 est le seul point critique de f et que $0 \notin X_z$, la fibre X_z est lisse.

Dans la suite on considérera donc $f : X \to D$ holomorphe avec X un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$, D un disque de $\mathbb{C}$ et X et D sont choisis assez petits pour que f soit surjective et qu'elle f induise une fibration C^∞ localement triviale de $X\backslash f^{-1}(0) \to D^\star$ (f ainsi choisie s'appelle un représentant de Milnor du germe).

1.2 Développements asymptotiques

Une première approche possible consiste à intégrer des formes tests sur les fibres de f ; on obtient ainsi des fonctions de $s \in D^\star$ et on examine alors leurs comportements pour s voisin de 0.

Définition 1.1 *Pour φ forme C^∞ sur X à support compact de type (n, n), on pose :*

$$F_\varphi(s) = \int_{\{f=s\}} \varphi \qquad (s \in D^\star)$$

On souhaite alors étudier ces fonctions près de zéro pour obtenir des renseignements sur le type de singularité. Tout d'abord, bien que n'étant pas définies pour $s = 0$, on peut montrer (mais ce n'est pas facile) que ces fonctions sont continues en 0. Mais, on dispose d'un théorème beaucoup plus précis qui nous donne un développement asymptotique de F_φ quand $s \to 0$:

Théorème 1.2 *Il existe un ensemble fini de rationnels $R \subset [0;1[$ tel que, pour toute forme φ C^∞ de type (n, n) à support compact, la fonction F_φ admette un développement asymptotique indéfiniment dérivable :*

$$F_\varphi(s) \sim \sum_{(r,j)\in R\times[0,n]} \sum_{l,m\geq 0} \alpha_{r,j,l,m} s^l \overline{s}^m |s|^{2r} (\mathrm{Log}\,|s|)^j$$

Ce théorème (du à M. Barlet) nous donne directement les comportements possibles pour les fonctions F_φ. En effet, grâce à un théorème de Borel, on peut réécrire le développement car l'application qui à un germe de fonction C^∞ en 0 associe sa série de Taylor est surjective :

$$C_0^\infty \to \mathbb{C}[[s,\overline{s}]] \to 0$$

Le théorème (**??**) signifie que pour φ une (n,n) forme C^∞, il existe $(\theta_{r,j})_{(r,j)\in R\times[0..n]}$ des fonctions C^∞ telles que :

$$F_\varphi(s) = \sum_{(r,j)\in R\times[0,n]} \theta_{r,j}(s)|s|^{2r}(\mathrm{Log}\,|s|)^j \quad \text{(au voisinage de } s=0) \tag{1}$$

Nous sommes maintenant confrontés à deux problèmes :

1. relier les rationnels à la géométrie de f
2. savoir *a priori* quels couples d'exposants vont intervenir dans (**??**).

Dans ce qui va suivre, on va examiner des possibilités de réponses à ces problèmes.

2 Lien avec le polynôme de Bernstein

Dans cette partie, on va montrer que les rationnels peuvent être reliés à des invariants numériques de f (en fait les racines d'un certain polynôme).

2.1 Transformation de Mellin

Comme les fonctions F_φ sont continues sur D, on peut considérer des expressions de la forme : $\int_D |s|^{2\lambda} F_\varphi(s) ds \wedge d\overline{s}$. Ces intégrales existent dès que $\Re(\lambda) > 0$ et définissent même des fonctions holomorphes sur le domaine $\Re(\lambda) > 0$. On constate alors :

$$\int_D |s|^{2\lambda} F_\varphi(s) ds \wedge d\overline{s} = \int_D |s|^{2\lambda} (\int_{\{f=s\}} \varphi) ds \wedge d\overline{s} = \int_D \int_{\{f=s\}} |s|^{2\lambda} \varphi \wedge ds \wedge d\overline{s} = \int_X |f|^{2\lambda} \varphi \wedge df \wedge d\overline{f}$$

(d'après Fubini). Or, maintenant $\varphi \wedge df \wedge d\overline{f}$ est une $(n+1, n+1)$ forme. Considérons un cas simple pour nous convaincre de l'utilite de ce calcul ; si $F_\varphi(s) = |s|^{2r}$ alors on a : $\int_D |s|^{2\lambda} F_\varphi(s) ds \wedge d\overline{s} = \frac{c}{\lambda+r+1}$ (où c est une constante non nulle) et donc un terme en $|s|^{2r}$ produit un pôle simple en $\lambda = -r-1$.De même, un terme en $|s|^{2r}(\mathrm{Log}\,|s|)^j$ produit au même point un pôle d'ordre $j+1$. Ainsi, si on peut prolonger analytiquement une expression de la forme $\int_X |f|^{2\lambda} \psi$ (avec ψ une $(n+1, n+1)$ forme) en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, les pôles de ce prolongement nous donneront des renseignements sur les exposants du développement. Dans la suite, on notera $G_\psi(\lambda) = \int_X |f|^{2\lambda}\psi$.

Remarque 2.1 *on peut ici remarquer que, dans la transformation de Mellin, ce n'est pas un forme quelconque qui apparaît mais $\varphi \wedge df \wedge d\overline{f}$. En fait, quitte à translater λ d'un entier, on a équivalence entre les deux car on dispose du fait suivant : il existe un entier l tel que pour toute forme ψ (n+1,n+1), il existe φ (n,n) vérifiant $|f|^{2l}\psi = \varphi \wedge df \wedge d\overline{f}$.*

2.2 Polynôme de Bernstein de f

Il s'agit ici d'établir une certaine identité différentielle pour f. Bernstein (dans le cas algébrique) puis Björk (dans le cas analytique) ont montré :

Théorème 2.1 *il existe un opérateur différentiel $P \in \mathbb{C} < z,\frac{\partial}{\partial z} > [\lambda]$ et un polynôme $b \in \mathbb{C}[\lambda]$ non nul tel que :*

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z},\lambda) \cdot f^{\lambda+1} = b(\lambda)f^\lambda \tag{2}$$

Cette identité doit être vue pour l'instant comme une identité formelle. L'opérateur P qui agit sur $f^{\lambda+1}$ vérifie les propriétés suivantes : il est analytique en z et polynômial en $\frac{\partial}{\partial z}$ (les crochets dans l'énoncé signifient que les différents termes ne commutent pas) ; il est également polynômial en λ. De plus, on peut noter que l'ensemble des polynômes b qui vérifient une telle égalité est un idéal non trivial de $\mathbb{C}[\lambda]$.

Définition 2.1 *Le polynôme de Bernstein de f est le générateur unitaire de cet idéal.*

On doit également a Kashiwara le théorème (très important) suivant :

Théorème 2.2 *Les racines du polynôme de Bernstein de f sont rationnelles et strictement négatives.*

Il convient ici d'illustrer ces deux théorèmes par un exemple. On considère donc $n = 1$ et $f(x,y) = x^2 - y^3$; de plus cet exemple nous servira de référence pour la suite. On constate que les calculs ne sont déjà pas si simple pour f. En effet, on a :

$$[\frac{3}{8}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{x}{8}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{1}{27}\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{y}{6}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}] \cdot (x^2-y^3)^{\lambda+1} = (\lambda+1)(\lambda+\frac{5}{6})(\lambda+\frac{7}{6})(x^2-y^3)^\lambda$$

2.3 Prolongement de G_ψ

C'est l'identité (**??**) qui va nous fournir le prolongement souhaité. Pour cela, notons $P = \sum_{\alpha,p} g_{\alpha,p}(z)\lambda^p \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha}$ et de meme : $\overline{P} = \sum_{\alpha,p} \overline{g_{\alpha,p}(z)}\lambda^p \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \overline{z}^\alpha}$. P et $\overline{P}$ sont alors des opérateurs différentiels qui commutent entre eux et comme, en conjuguant, on a :

$$\overline{P} \cdot \overline{f}^{\lambda+1} = \overline{b(\overline{\lambda})}\overline{f}^\lambda \tag{3}$$

en combinant (**??**) et (**??**), on obtient :

$$P\overline{P} \cdot |f|^{2\lambda+2} = b(\lambda)\overline{b(\overline{\lambda})}|f|^{2\lambda} \tag{4}$$

Il convient ici de noter que, pour $\Re(\lambda)$ suffisament grande, $|f|^{2\lambda+2}$ est alors assez différentiable pour que (**??**) soit une véritable identité différentielle sur X. On peut la justifier brièvement par le fait que P et $\overline{P}$ commutent et qu'ils agissent respectivement sur la partie holomorphe et antiholomorphe de f.

Si maintenant dz désigne $dz_0 \wedge \cdots \wedge dz_n$, comme ψ est de degré maximum, elle s'écrit $\psi = g(z)dz \wedge d\overline{z}$ et ainsi d'après (**??**) :

$$G_\psi(s) = \frac{1}{b(\lambda)\overline{b(\overline{\lambda})}} \int_X P\overline{P}|f|^{2\lambda+2} g dz \wedge d\overline{z} = \frac{1}{b(\lambda)\overline{b(\overline{\lambda})}} \int_X |f|^{2\lambda+2}(P^\star\overline{P}^\star g)dz \wedge d\overline{z}$$

pour $\Re(\lambda) \gg 1$; mais cette fois ci, la dernière intégrale converge pour $\Re(\lambda) > -1$ et on a ainsi prolongé G_ψ d'une bande de largeur 1 et les seules pôles qui peuvent apparaître proviennent des zéros de b. En itérant ce procédé, on constate que l'on peut prolonger G_ψ à $\mathbb{C}$, les pôles du prolongement étant des translatés par des entiers négatifs des zéros de b.

Compte tenu du rapport entre F_φ et G_ψ, on peut affirmer que les rationnels qui apparaissent dans le développement de F_φ sont des translatés entiers des zéros de b. On a ainsi relié les exposants du développement à des invariant numériques de f, à savoir les racines du polynôme de Bernstein de f.

3 Connexion de Gauss-Manin

Dans ce qui va suivre, on va changer de point de vue et ne plus travailler directement sur f mais plutôt analyser la structure géométrique de ses fibres.

3.1 Construction du fibré de Gauss-Manin sur $D^\star$ par la cohomologie de la fibre de Milnor

Examinons un peu plus en détails le théorème de Milnor ; si $\Delta \subset D^\star$ est un disque assez petit et $z_0 \in \Delta$, on est dans la situation commutative suivante :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(\Delta) & \longrightarrow & X_{z_0} \times \Delta \\ \searrow & & \swarrow \\ f & \Delta & pr_2 \end{array}$$

Si, de plus, on considère les espaces de cohomologies en dimension n, on a un morphisme de restriction canonique :

$$\begin{array}{ccc} H^n(f^{-1}(\Delta),\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^n(X_{z_0},\mathbb{C}) \\ \omega & \mapsto & \omega_{|X_{z_0}} \end{array}$$

Mais, d'après le théorème (**??**), on sait que : $H^n(f^{-1}(\Delta),\mathbb{C}) \simeq H^n(X_{z_0} \times \Delta,\mathbb{C})$; or, on dispose du

Lemme 3.1 *Si V est une variété différentiable alors, pour $p \geq 1$ on a :*

$$H^n(V \times]0;1[,\mathbb{C}) \simeq H^n(V,\mathbb{C})$$

On généralise facilement ce lemme à un disque et donc le morphisme ci-dessus est un isomorphisme que l'on notera $\tau_{z_0} : H^n(f^{-1}(\Delta),\mathbb{C}) \to H^n(X_{z_0},\mathbb{C})$. Pour z_0 et z_1 dans un même disque Δ qui trivialise f, on dispose alors d'un isomorphisme canonique entre $H^n(X_{z_0},\mathbb{C})$ et $H^n(X_{z_1},\mathbb{C})$ à savoir :

$$\tau_{z_0} \circ \tau_{z_1}^{-1} : H^n(X_{z_1},\mathbb{C}) \to H^n(X_{z_0},\mathbb{C})$$

Ces isomorphismes vont nous permettre de définir les notions de familles localement constantes et analytiques de n-classes de cohomologies.

Définition 3.1 *Soit V un ouvert de $D^\star$ et $(C_z)_{z \in V}$ une famille de n-classes de cohomologie ($\forall z \in V, C_z \in H^n(X_z,\mathbb{C})$). La famille est dite localement constante si pour tout disque $\Delta \subset V$ au dessus duquel la fibration de Milnor est triviale et pour tout $z_0, z_1 \in \Delta$, C_{z_0} est l'image de C_{z_1} par $\tau_{z_0} \circ \tau_{z_1}^{-1}$; cela revient à dire qu'il existe $C \in H^n(f^{-1}(\Delta),\mathbb{C})$ telle que : $\forall z \in \Delta, \quad C_z = \tau_z(C)$.*

Cela signifie en fait que localement la famille (C_z) provient d'une même classe sur $f^{-1}(\Delta)$.

Pour ce qui va suivre, on utilise encore une fois le théorème de Milnor et plus particulièrement le fait que : $\dim H^n(X_z,\mathbb{C}) = \mu$ où μ désigne le nombre de Milnor de f.

Si maintenant $(\gamma_z)_{z \in V}$ est une famille quelconque de n-classes et $\Delta \subset V$ un petit disque, on choisit $(C^j)_{j=1..\mu}$ une base de $H^n(f^{-1}(\Delta),\mathbb{C})$; on peut donc écrire : $\gamma_z = \sum_{j=1}^{\mu} a_j(z) C_z^j$ sur Δ. On peut tout de suite remarquer que si $\Delta^{'}$ est un autre (petit) disque tel que $\Delta\cap\Delta^{'}\neq\emptyset$, on a les isomorphismes de restrictions suivants :

$$H^n(f^{-1}(\Delta),\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^n(f^{-1}(\Delta\cap\Delta^{'}),\mathbb{C}) \xleftarrow{\sim} H^n(f^{-1}(\Delta^{'}),\mathbb{C})$$

Or, on peut décomposer γ sur $\Delta^{'}$ et on obtient ainsi deux décompositions sur $\Delta\cap\Delta^{'}$. On constate immédiatement que l'on passe d'une décomposition à l'autre en multipliant le vecteur $(a_j(z))_{j=1..\mu}$ par une matrice constante inversible (celle du changement de base dans $H^n(f^{-1}(\Delta\cap\Delta^{'}),\mathbb{C})$).

Définition 3.2 *la famille $(\gamma_z)_{z\in V}$ est dite analytique si, dans toute décomposition locale, les coefficients a_j sont holomorphes.*

Avec la remarque ci-dessus, l'analycité d'une famille de n-classes est bien définie. On dispose ainsi d'un faisceau de $\mathcal{O}_{D^\star}$-module : le faisceau des familles analytiques de n-classes de cohomologie ; on le notera $\mathcal{O}(G)$. On va le munir d'un morphisme de faisceau $\mathbb{C}$-linéaire $\nabla : \mathcal{O}(G)\to\mathcal{O}(G)$. Si, localement, on a $\gamma_z=\sum_{j=1}^{\mu} a_j(z)C_z^j$, on pose :

$$(\nabla\gamma)_z=\sum_{j=1}^{\mu}\frac{da_j}{dz}(z)C_z^j \tag{5}$$

On vérifie aisément avec (**??**) que ∇ satisfait à :

$$\forall k\in H^0(V,\mathcal{O}_{D^\star}), \forall\gamma\in H^0(V,\mathcal{O}(G)), \qquad \nabla(k\gamma)=\frac{dk}{dz}\gamma+k\nabla\gamma \tag{6}$$

et ceci pour tout ouvert V de $D^\star$. Un morphisme de faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels qui satisfait (**??**) est appelé une *connexion*.

Définition 3.3 *Dans le cadre général des fibrés à connexion, une section γ est dite horizontale si $\nabla\gamma=0$.*

On remarque que l'on a défini ∇ de telle sorte que les sections horizontales soient précisément les familles localement constantes.

3.2 Monodromie associée à $(\mathcal{O}(G),\nabla)$

La monodromie (qui est définie pour un faisceau localement constant) consiste à associer au faisceau en question un opérateur linéaire sur une fibre quelconque. Cette opération consiste en fait à suivre une section le long d'un lacet et l'image du point de départ est tout simplement le point d'arrivé (dans le cas de $D^\star$, on fait un tour autour de 0 dans le sens direct).

Définition 3.4 *Un faisceau $\mathcal{F}$ localement constant sur $D^\star$ vérifie : pour tout $z\in D^\star$, il existe un voisinage ouvert V tel que $\mathcal{F}_{|V}$ soit un faisceau constant de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.*

On va maintenant pouvoir définir la monodromie pour un tel système. Si $z_0\in D^\star$, on désigne par δ le lacet $t\mapsto z_0e^{2i\pi t}, t\in[0;1]$. Le faisceau $\delta^{-1}\mathcal{F}$ est alors un faisceau localement constant sur $[0;1]$

Lemme 3.2 *Un faisceau localement constant $\mathcal{G}$ sur $[0;1]$ est constant (d'où un isomorphisme τ canonique de $\mathcal{G}_0$ sur $\mathcal{G}_1$).*

On a donc les isomorphismes suivants :

$$\mathcal{F}_{z_0}=\mathcal{F}_{\delta(0)}\simeq(\delta^{-1}\mathcal{F})_0\overset{\tau}{\simeq}(\delta^{-1}\mathcal{F})_1\simeq\mathcal{F}_{\delta(1)}=\mathcal{F}_{z_0}$$

Définition 3.5 *l'automorphisme de $\mathcal{F}_{z_0}$ obtenu ci-dessus est la monodromie sur $\mathcal{F}_{z_0}$.*

On va préciser les choses en ce qui concerne les fibrés muni d'une connexion méromorphe en zéro.

Définition 3.6 *Si F est un fibré holomorphe de rang d sur D et $l\in\mathbb{N}^\star$, une connexion méromorphe est un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\nabla:\mathcal{O}(F)\to z^{-l}\mathcal{O}(F)$ vérifiant (**??**) ($\mathcal{O}(F)$ désigne le faisceau des sections holomorphes sur F).*

Dans cette situation, on peut exhiber presque immédiatement un faisceau localement constant sur $D^\star$. En effet, on peut examiner de plus près les sections horizontales de ce fibré. Si $\Delta \subset D^\star$ est une trivialisation du fibré, on a une base de sections sur Δ notée $(e_1,\dots,e_d)$; on adopte dans la suite une notation matricielle :

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \quad (\text{où } a_j \text{ est holomorphe sur } \Delta)$$

Comme $\vec{e}$ est une base, on peut écrire : $\nabla\vec{e} = M\vec{e}$ où M est une matrice holomorphe sur Δ (car z^{-l} est holomorphe sur Δ). De même, si σ est une section quelconque, on peut l'écrire : $\sigma = {}^t\vec{a}\cdot\vec{e}$. La recherche de sections horizontales passe alors par la résolution de :

$$\nabla\sigma = 0 \iff \frac{d\vec{a}}{dz} = -{}^tM\vec{a} \tag{7}$$

Sur Δ, les solutions de (**??**) forment un espace vectoriel de dimension d (c'est le théorème de Cauchy pour un disque) et ceci nous fournit un faisceau localement constant ; on note $\mathcal{G}$ le faisceau des sections horizontales. On peut alors associer naturellement à $\mathcal{G}$ une monodromie (et donc à (F,∇)).

On peut également définir la monodromie en travaillant directement autour de l'origine. Si on effectue les mêmes calculs que précédemment avec cette fois ci Δ un petit disque centré en zéro qui trivialise F, on est obligé d'écrire : $\nabla\vec{e} = \frac{M}{z^l}\vec{e}$ et (**??**) devient :

$$\frac{d\vec{a}}{dz} = -\frac{{}^tM}{z^l}\vec{a} \tag{8}$$

Les solutions d'une telle équation sont *a priori* des fonctions multiformes, c'est à dire des fonctions définies sur le revêtement universel de $\Delta^\star$ et vues comme fonctions sur $\Delta^\star$. Quitte à se restreindre autour de zéro, on peut supposer que $\Delta = D$ et on pose : $H = \{\xi \in \mathbb{C} \setminus \Re(\xi) < 0\}$. $\exp : H \to D^\star$ est alors le revêtement universel de $D^\star$. Une fonction multiforme sur $D^\star$ est alors la donnée d'une fonction $\hat{f}$ analytique sur H et telle que $f(z) = \hat{f}(\xi)$ dès que $z = e^\xi$; si $\vec{a}(z) = X(\xi)$, on a alors formellement :

$$\frac{d\vec{a}}{dz} = \frac{dX}{d\xi}\frac{d\xi}{dz} = e^{-\xi}\frac{dX}{d\xi}$$

et l'équation (**??**) ramenée sur H donne :

$$\frac{dX}{d\xi}(\xi) = -e^{\xi}\frac{{}^tM(e^\xi)}{e^{l\xi}}X(\xi) \tag{9}$$

et on a maintenant un système différentielle sur H.

On a vu que la monodromie consistait à suivre une section horizontale le long d'un lacet autour de l'origine ; on voit bien que les fonctions multiformes se prêtent bien à ce genre d'opération. En effet, si $\xi_0 \in H$ vérifie $e^{\xi_0} = z_0$, le lacet δ se relève sur H en : $t \mapsto \xi_0 + 2i\pi t$; un simple segment. On définit alors la monodromie comme suit : soit $v \in \mathbb{C}^d$; au lieu de suivre une section *uniforme*, on cherche une section multiforme qui *vaut* v en z_0. On note alors $\widetilde{\sigma_v}$ la solution de (**??**) vérifiant : $\widetilde{\sigma_v}(\xi_0) = v$ (c'est encore le théorème de Cauchy mais cette fois sur H) et on pose : $Tv = \widetilde{\sigma_v}(\xi_0 + 2i\pi)$. Ceci correspond à la situation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & & (H,\xi_0) & \to & \widetilde{\sigma_v} \in \mathcal{O}_H & \to & Tv = \widetilde{\sigma_v}(\xi_0 + 2i\pi) \\ & \nearrow & \downarrow exp & & \updownarrow & & \updownarrow \\ (0;1) & \xrightarrow{\delta} & (D^\star,z_0) & \to & \sigma_v \text{ multiforme} & \to & Tv = \sigma_v(z_0 e^{2i\pi}) \end{array}$$

On verra plus loin comment calculer la monodromie sur l'exemple $f(x,y) = x^2 - y^3$.

3.3 Extension de Deligne par les formes relatives

Dans ce qui précède, on a construit une connexion mais au vue de ce que l'on vient d'établir, on aimerait pouvoir prolonger celle-ci en une connexion méromorphe à l'origine afin de pouvoir manipuler plus facilement la monodromie.

On va cette fois construire un faisceau de muni d'une connexion méromorphe sur D ; la restriction de ce dernier à $D^\star$ sera isomorphe horizontalement, en tant que fibré à connexion sur $D^\star$, à $\mathcal{O}(G)$ (ce fait est admis). On peut alors objecter : pourquoi cette extension et pas une autre? C'est un résultat de Deligne qui permet de répondre à cette question :

Proposition 3.1 *Pour tout fibré vectoriel à connexion holomorphe (G,∇) sur $D^\star$, il existe un fibré $\widetilde{G}$ sur D et $\widetilde{\nabla}$ une connexion à pôle simple en 0 tels que $(\widetilde{G},\widetilde{\nabla})_{|D^\star}$ soit isomorphe (par $\widetilde{\theta}$) à (G,∇). De plus, pour tout fibré $(\hat{G},\hat{\nabla})$ sur D à connexion méromorphe* régulière[1] *en 0 vérifiant $\hat{\theta} : (\hat{G},\hat{\nabla}_{|D^\star} \xrightarrow{\sim} (G,\nabla)$, les sections méromorphes de $(\hat{G},\hat{\nabla})$ coincident via $\hat{\theta}$ et $\widetilde{\theta}$ avec celles de $(\widetilde{G},\widetilde{\nabla})$.*

Pour construire la dite extension, on va considérer les formes holomorphes sur X. On dispose déjà du complexe de De Rahm sur X :

$$0 \xrightarrow{d} \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n_X \xrightarrow{d} \Omega^{n+1}_X \to 0$$

où Ω^p_X $(p \geq 1)$ désigne le faisceau des p-formes holomorphes sur X et $\Omega^0_X = \mathcal{O}_X$.

On pose alors pour $p \geq 1$: $\Omega^p_{X|D} = \Omega^p_X / df \wedge \Omega^{p-1}_X$ et $\Omega^0_{X|D} = \mathcal{O}_X$. On vérifie de plus que la différentielle passe au quotient ; pour cela, on travaille sur des germes de p-formes : si au voisinage d'un point $z \in X$ on a $\omega = \omega^{'} + df \wedge \alpha$, sur ce voisinage on aura également $d\omega = d\omega^{'} - df \wedge d\alpha$ et les germes correspondants à $d\omega$ et $d\omega^{'}$ seront égaux dans $\Omega^p_{X|D}$. On a donc un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire de faisceau que l'on notera : $d_{X|D}$ et on peut considérer le complexe suivant :

$$0 \xrightarrow{d_{X|D}} \Omega^0_{X|D} \xrightarrow{d_{X|D}} \Omega^1_{X|D} \xrightarrow{d_{X|D}} \dots \xrightarrow{d_{X|D}} \Omega^n_{X|D} \xrightarrow{d_{X|D}} \Omega^{n+1}_{X|D} \to 0$$

C'est le complexe de De Rahm relatif.

Examinons de façon plus précise le cas des $(n+1)$-formes relatives (et ce point nous servira plus loin) : soit ω une $(n+1)$-forme définie au voisinage de $z_0 \neq 0$; comme $df_{z_0} \neq 0$, on peut effectuer un changement de coordonnées $(y_0, y_1, \dots, y_n)$ tel que $y_0 = f$ et on a alors au voisinge de z_0 :

$$\omega = g(y) dy_0 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n = dy_0 \wedge (g(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = df \wedge \beta$$

et donc, dans $\Omega^{n+1}_{X|D}$, le germe $(\omega)_{z_0}$ est nul. Ceci se résume en : $Supp(\Omega^{n+1}_{X|D}) = \{0\}$.

Dans la suite, on utilisera le résultat suivant (admis également) qui n'est autre que le théorème B de Cartan :

Théorème 3.1 *Si Δ est un ouvert de D alors on a :*

$$\forall q \geq 1, \forall p \geq 0, \quad H^q(f^{-1}(\Delta), \Omega^p_X) = 0$$

(on a le même résultat si on remplace Ω^p_X par $df \wedge \Omega^p_X$).

Une première application du théorème (**??**) nous donne un aperçu de l'efficacité de la cohomologie ; considérons pour cela la courte suite exacte (pour $p \geq 1$) :

$$0 \longrightarrow df \wedge \Omega^{p-1}_X \longrightarrow \Omega^p_X \longrightarrow \Omega^p_{X|D} \longrightarrow 0$$

on en déduit le début d'une longue suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), df \wedge \Omega^{p-1}_X) \longrightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega^p_X) \longrightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega^p_{X|D}) \longrightarrow H^1(f^{-1}(\Delta), df \wedge \Omega^{p-1}_X) \longrightarrow \dots$$

et, d'après le théorème (**??**), $H^1(f^{-1}(\Delta), df \wedge \Omega^{p-1}_X) = 0$ et donc de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), df \wedge \Omega^{p-1}_X) \longrightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega^p_X) \longrightarrow H^0(f^{-1}(\Delta), \Omega^p_{X|D}) \longrightarrow 0$$

1. c'est en particulier le cas pour une connexion à pôle simple mais nous n'entrerons pas plus dans les détails.

on obtient :

$$H^0(f^{-1}(\Delta),\Omega^p_{X|D}) = \frac{H^0(f^{-1}(\Delta),\Omega^p_X)}{H^0(f^{-1}(\Delta),df \wedge \Omega^{p-1}_X)} \tag{10}$$

La cohomologie permet donc de passer du local au global : les sections sur $\Omega^p_{X|D}$ définies sur $f^{-1}(\Delta)$ sont donc les sections sur Ω^p_X (les p-formes) modulo les p-formes que l'on peut écrire $df \wedge \beta$ (avec β $(p-1)$-forme). On notera $[\,]$ la projection canonique de $H^0(f^{-1}(\Delta),\Omega^p_X) \longrightarrow H^0(f^{-1}(\Delta),\Omega^p_{X|D})$.

On considère alors le faisceau $\mathcal{H}$ défini de la façon suivante :

$$\text{pour } \Delta \text{ ouvert de } D,\ \mathcal{H}(\Delta) = H^n(f^{-1}(\Delta),\Omega^\bullet_{X|D}) = \frac{Ker(\Omega^n_{X|D}(f^{-1}(\Delta)) \xrightarrow{d_{X|D}} \Omega^{n+1}_{X|D}(f^{-1}(\Delta)))}{d_{X|D}(\Omega^{n-1}_{X|D}(f^{-1}(\Delta)))}$$

(on regarde les n-formes relativement fermées sur $f^{-1}(\Delta)$). De la même façon que ci-dessus, si β est une n-forme relative telle que $d_{X|D}\beta = 0$, on notera $\{\beta\}$ sa classe.

La encore la cohomologie va nous permettre de représenter agréablement un élément de $\mathcal{H}(\Delta)$. Soit donc $\tau \in \mathcal{H}(\Delta)$; il existe alors $\beta \in \Omega^n_{X|D}(f^{-1}(\Delta))$ telle que $d_{X|D}\beta = 0$ et $\{\beta\} = \tau$. Or, d'après (**??**), il existe ω une n-forme holomorphe sur $f^{-1}(\Delta)$ telle que $[\omega] = \beta$; le fait que β soit relativement fermée entraine $d_{X|D}\beta = [d\omega] = 0$. Donc $d\omega$ est une $(n+1)$-forme telle que $[d\omega] = 0$ et d'après (**??**) : $d\omega \in H^0(f^{-1}(\Delta),df \wedge \Omega^n_X)$ et ainsi $d\omega = df \wedge \alpha$ avec α une n-forme sur $f^{-1}(\Delta)$. Résumons :

Proposition 3.2 *si $\tau \in \mathcal{H}(\Delta)$, on peut trouver ω et α n-formes holomorphes sur $f^{-1}(\Delta)$ telles que :*

$$\{[\omega]\} = \tau \quad \textit{et} \quad d\omega = df \wedge \alpha$$

On va maintenant munir $\mathcal{H}$ d'une structure de $f^{-1}\mathcal{O}_D$-module ; pour ce faire, on commence tout d'abord par examiner ce qui se passe sur $\Omega^p_{X|D}$. Si $\beta \in H^0(f^{-1}(\Delta),\Omega^p_{X|D})$ et $k \in H^0(\Delta,\mathcal{O}_D)$, alors $\beta = [\omega]$ avec $\omega \in H^0(f^{-1}(\Delta),\Omega^p_X)$ et on pose :

$$k \cdot \beta = k \cdot [\omega] = [(k \circ f)\omega]$$

et on vérifie tout de suite qu'avec cette structure, $d_{X|D}$ est $f^{-1}\mathcal{O}_D$-linéaire :

$$d_{X|D}(k \cdot \beta) = d_{X|D}[k \circ f\omega] = [d\big((k \circ f)\omega\big)] = [df \wedge (\frac{dk}{dz} \circ f)\omega + (k \circ f)d\omega] = [(k \circ f)d\omega] = k \cdot [d\omega] = k \cdot d_{X|D}\beta$$

La structure passe alors naturellement à $\mathcal{H}$ et c'est elle qui va nous permettre de définir une connexion sur $\mathcal{H}$.

Pour commencer, considérons le cas où $\Delta \subset D^\star$ et $\tau \in \mathcal{H}(\Delta)$; on dispose (d'après la proposition (**??**)) de ω et α telles que : $\{[\omega]\} = \tau$ et $d\omega = df \wedge \alpha$. Mais alors, comme $Supp(\Omega^{n+1}_{X|D}) = \{0\}$ et que $0 \notin \Delta$, on a : $d_{X|D}[\alpha] = [d\alpha] = 0$ et donc $[\alpha]$ est un cocycle relatif. Il est alors naturel de poser :

$$\nabla\{[\omega]\} = \{[\alpha]\}$$

tout en vérifiant que cette définition ne dépend pas des représentants choisis (ce qui est très aisé).
Vérifions tout de suite que ∇ vérifie (**??**) :

$$\begin{aligned} \nabla(k \cdot \{[\omega]\} &= \nabla\{k \cdot [\omega]\} = \nabla\{[(k \circ f)\omega]\} \\ \text{Or, } d\big((k \circ f)\omega\big) &= df \wedge (\frac{dk}{dz} \circ f)\omega + (k \circ f)d\omega = df \wedge \big(\frac{dk}{dz} \circ f)\omega + (k \circ f)\alpha\big) \end{aligned}$$

et on a donc bien :

$$\nabla(k \cdot \{[\omega]\} = \{[\frac{dk}{dz} \circ f)\omega + (k \circ f)\alpha]\} = \frac{dk}{dz} \cdot \{[\omega]\} + k \cdot \{[\alpha]\} = \frac{dk}{dz} \cdot \{[\omega]\} + k \cdot \nabla\{[\omega]\}$$

Reste à étendre cette connexion à D tout entier en une connexion méromorphe à l'origine ; pour cela, si on a Δ quelconque et $\tau \in \mathcal{H}(\Delta)$, on dispose toujours de ω et α comme précédemment mais cette fois ci, α

n'a plus de raison d'être un cocycle relatif. Pour définir $\nabla\tau$, on utilise le résultat déjà mentionné dans la remarque (**??**) :

$$\exists l \geq 1 \text{ et } \beta \text{ une } n\text{-forme tels que} : f^l d\alpha = df \wedge \beta$$

(et l'entier l ne dépend que de f). Ainsi, on constate que :

$$d(f^l\alpha) = lf^{l-1}df \wedge \alpha + f^l d\alpha = df \wedge (lf^{l-1}\alpha + \beta)$$

ce qui signifie que $[f^l\alpha]$ est un cocycle relatif et on pose :

$$\nabla\tau = \frac{1}{z^l} \cdot \{[f^l\alpha]\}$$

On peut tout de suite remarquer que si $0 \notin \Delta$, comme $z \mapsto \frac{1}{z^l} \in H^0(\Delta,\mathcal{O}_D)$, on retrouve bien : $\nabla\tau = \{[\alpha]\}$. $(\mathcal{H},\nabla)$ est alors l'extension souhaitée du faisceau $\mathcal{O}(G)$; c'est l'extension de Deligne.

Pour terminer cette partie, reprenons l'exemple de $f(x,y) = x^2 - y^3$. On pose $\omega = -2ydx + 3xdy$ et $\alpha = y\omega$; ces deux formes vérifient :

$$d\omega = \frac{5}{6}\frac{df}{f} \wedge \omega \quad \text{et} \quad d\alpha = \frac{7}{6}\frac{df}{f} \wedge \alpha$$

D'où :

$$\nabla\{[\omega]\} = \frac{5}{6}\frac{1}{z} \cdot \{[\omega]\} \quad \text{et} \quad \nabla\{[\alpha]\} = \frac{7}{6}\frac{1}{z} \cdot \{[\alpha]\}$$

Le système différentiel associé est donc :

$$\frac{dX}{dz} = \frac{1}{z}\begin{pmatrix} 5/6 & 0 \\ 0 & 7/6 \end{pmatrix} X$$

d'où sur H :

$$\frac{dY}{d\xi}(\xi) = \begin{pmatrix} 5/6 & 0 \\ 0 & 7/6 \end{pmatrix} Y(\xi) \Longrightarrow Y_v(\xi) = \begin{pmatrix} e^{5/6(\xi-\xi_0)} & 0 \\ 0 & e^{7/6(\xi-\xi_0)} \end{pmatrix} v$$

et ainsi :

$$Tv = Y_v(\xi_0 + 2i\pi) = \begin{pmatrix} e^{2i\pi 5/6} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi 7/6} \end{pmatrix} v$$

4 Le module des développements asymptotiques

Pour finir et ainsi répondre au deuxième problème que nous nous étions posés, on va étudier le module des développements asymptotiques et donner un moyen d'en obtenir un aperçu en minimisant les calculs.

4.1 Le module $\mathcal{M}$

On considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{M} = \{D.A.(F_\varphi) \setminus D.A. = 0\}$$

et on le munit d'une structure de $\mathbb{C}[[s,\overline{s}]]$-module de manière naturelle ; on utilise là encore le théorème de Borel : si $\theta \in \mathbb{C}[[s,\overline{s}]]$, on pose alors

$$[\theta F_\varphi] = [F_{(\hat{\theta}\circ f)\varphi}] = [D.A.(\hat{\theta}(s)F_\varphi(s))]$$

où $\hat{\theta}$ désigne un antécédent de θ ; on remarque que si $\hat{\theta}$ est une fonction plate (développement nul en zéro), le développement de θF_φ est alors nul lui aussi : l'action de $\mathbb{C}[[s,\overline{s}]]$-module est donc bien définie. Cela revient en fait à multiplier les deux développements (comme on le ferait pour deux séries) ; le théorème (**??**) revient alors à dire que $\mathcal{M}$ est un sous-module du $\mathbb{C}[[s,\overline{s}]]$-module libre $\bigoplus_{(r,j)\in R\times[0,n]} \mathbb{C}[[s,\overline{s}]]|s|^{2r}(\mathrm{Log}\,|s|)^j$.

Mais, on ne sait pas si tous les couples (r,j) vont intervenir et on aimerait savoir lesquels. Le théorème suivant nous indique comment, en faisant un nombre limité de calculs, on peut obtenir des renseignements sur les couples qui apparaissent effectivement.

Théorème 4.1 *Si $(\omega_1, \ldots, \omega_\mu)$ est une base (au voisinage de l'origine) des sections sur $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{M}$ est engendré par 1 et par les germes en $s = 0$ des fonctions :*

$$\int_{\{f=s\}} \rho\omega_j \wedge \overline{\omega}_k \quad \textit{pour } (j,k) \in [1,\mu]^2$$

où $\rho \in C_c^\infty(X)$ est une fonction quelconque vérifiant $\rho \equiv 1$ au voisinage de l'origine.

On va illustrer ce théorème en examinant le cas de notre exemple.

4.2 Calcul de $\mathcal{M}$ dans le cas de $f(x,y) = x^2 - y^3$

Dans ce cas précis de f, on a :

$$\mu = \dim \mathbb{C}\{x,y\}/(x,y^2) = \dim \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}y = 2$$

et :

$$\omega_1 = \omega = -2ydx + 3xdy \quad \text{et} \quad \omega_2 = \alpha = y\omega.$$

Par un raisonnement d'homogénéité et en choisissant ρ radiale, on se convaint facilement que les intégrales

$$\int_{\{f=s\}} \rho y\omega \wedge \overline{\omega} \quad \text{et} \quad \int_{\{f=s\}} \rho\overline{y}\omega \wedge \overline{\omega}$$

sont identiquement nulles. Les deux derniers cas donnent (modulo les termes C^∞) :

$$\int_{\{f=s\}} \rho\omega \wedge \overline{\omega} = c_1|s|^{5/3} \quad \text{et} \quad \int_{\{f=s\}} \rho|y|^2\omega \wedge \overline{\omega} = c_2|s|^{7/3}$$

où c_1 et c_2 sont deux constants non nulles ; et donc :

$$\mathcal{M} = \mathbb{C}[[s,\overline{s}]] \oplus \mathbb{C}[[s,\overline{s}]]|s|^{5/3} \oplus \mathbb{C}[[s,\overline{s}]]|s|^{7/3}.$$