

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE STABILITÉ DES VARIÉTÉS SPÉCIALES

FRÉDÉRIC CAMPANA ET BENOÎT CLAUDON

RÉSUMÉ. Nous montrons que les fibres du morphisme d'Albanese d'une variété complexe projective spéciale sont spéciales, répondant ainsi positivement à une question posée dans [C04]. L'ingrédient principal de la preuve est un cas particulier de la version orbifolde, conjecturée dans *loc.cit.*, de la conjecture $C_{n,m}$ d'Itaka, établi par Birkar-Chen [BC15]. Nous donnons également quelques applications (groupe fondamental et revêtement universel des variétés spéciales).

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Fibration d'Albanese	2
3. Conjecture d'abélianité	4
4. Revêtement universel	5
5. Annulation de la pseudo-métrique de Kobayashi	8
6. Démonstrations	10
Annexe A. Résumé orbifolde	16
Références	19

1. INTRODUCTION

Nous considérons ici certaines propriétés de stabilité des variétés dites spéciales. Rappelons que les éléments de cette classe, introduite dans [C04], sont les variétés projectives lisses (ou plus généralement kählériennes compactes) qui n'admettent aucune fibration de type général non triviale, une fibration $f : X \rightarrow Y$ nette étant dite de type général si la paire orbifolde $(Y, \Delta(f))$ est de type général, c'est-à-dire si le \mathbb{Q} -diviseur $K_Y + \Delta(f)$ est *big*. Le diviseur $\Delta(f)$ est un \mathbb{Q} -diviseur sur la base Y de la fibration f encodant les fibres multiples de f . Pour plus de détails, nous renvoyons à l'appendice à la fin de cet article ainsi qu'aux articles [C04] et [C11].

Pour une classe de variétés (projectives lisses, ici) \mathcal{S} , nous considérerons les propriétés de stabilité suivantes :

- (i) stabilité par passage au quotient : si $f : X \rightarrow Y$ est surjective et si $X \in \mathcal{S}$, Y est-elle aussi dans \mathcal{S} ?

Date: 9 novembre 2015.

BC bénéficie du soutien du CNRS et de l'IMPA *via* un séjour de recherche effectué à l'IMPA. BC est également membre de l'ANR-10-JCJC-0111. Le présent travail a été initié alors que les auteurs se trouvaient à l'IMPA : ils souhaitent remercier l'IMPA pour son hospitalité. Les auteurs remercient également le rapporteur anonyme pour sa relecture attentive de l'article, ainsi que pour ses remarques ayant permis d'améliorer la présentation.

- (ii) stabilité par passage aux fibres d'une fibration : si $f : X \rightarrow Y$ est une fibration (morphisme surjectif à fibres connexes) et si $X \in \mathcal{S}$, les fibres générales de f sont-elles dans \mathcal{S} ?
- (iii) stabilité par revêtement étale : si $\pi : Y \rightarrow X$ est un revêtement étale fini et si $X \in \mathcal{S}$, Y est-elle aussi dans \mathcal{S} ?
- (iv) stabilité par revêtement universel (généralisation de la question précédente) : si X et Y ont des revêtements universels (analytiquement) isomorphes et si $X \in \mathcal{S}$, Y est-elle aussi dans \mathcal{S} ?
- (v) stabilité par déformation : si $X \rightarrow B$ est une famille lisse et si $X_b \in \mathcal{S}$ pour un point $b \in B$, cela implique-t-il que $X_b \in \mathcal{S}$ pour tout point $b \in B$? Cette dernière question se scinde en deux : montrer que propriété est ouverte et fermée.

Si \mathcal{S} est la classe des variétés de type général la propriété (i) n'est pas vérifiée mais les autres propriétés de stabilité (ii)-(v) sont vérifiées. Le point (iv) est un résultat de H. Tsuji [Tsu96, th. 1], (v) étant l'invariance des plurigenres de Y.-T. Siu [Siu98, Siu02].

Si \mathcal{S} est la classe des variétés spéciales, la propriété (i) est trivialement vérifiée par définition, mais bien sûr pas la propriété (ii) (pinceau de courbes de genre au moins 2 dans \mathbb{P}^2). Cependant, (ii) est satisfait si f est l'application d'Albanese de $X \in \mathcal{S}$, par le théorème 1 ci-dessous.

La stabilité par revêtement étale est établie dans [C04, th. 5.12, p. 580] : la démonstration repose sur la généralisation orbifolde de la profonde faible-positivité des images directes des faisceaux pluricanoniques, due à E. Viehweg. Le théorème 1 permet d'en déduire (moyennant la conjecture d'abélianité sur le groupe fondamental des variétés spéciales, voir la section 3) une réponse affirmative à la question (iv).

La stabilité par déformation, si vraie, semble pour le moment hors d'atteinte avec les techniques actuelles. Dès la dimension 3, cette question est ouverte (pour les surfaces, la stabilité par déformation du caractère spécial résulte de sa caractérisation par la dimension de Kodaira et le groupe fondamental, qui sont invariants par déformation, voir [C04, cor. 3.32, p. 552]).

Théorème 1.

Si X est une variété projective lisse et spéciale, les fibres générales de l'application d'Albanese de X sont encore des variétés spéciales.

2. FIBRATION D'ALBANESE

Nous renvoyons le lecteur à l'appendice pour les notions utilisées concernant les variétés spéciales et les orbifoldes lisses.

Théorème 2.1.

Si X est une variété kählérienne compacte spéciale, son application d'Albanese

$$\alpha_X : X \rightarrow \text{Alb}(X)$$

est une fibration et est sans fibre multiple en codimension un.

Ce résultat (établi dans [C04, prop. 5.3, p. 576]) généralise et renforce l'énoncé similaire de Y. Kawamata [Kaw81, th. 1] concernant les variétés projectives de dimension de Kodaira nulle (qui sont spéciales, par [C04, th. 5.1, p. 575]), ainsi que celui de K. Ueno [Uen75, lem. 13.1 et lem. 13.6, p. 157-158] concernant les variétés complexes compactes de dimension algébrique nulle (également spéciales par [C04, th. 2.39, p. 540]).

Dans [C04, question 5.4, p. 577], il est demandé si les fibres génériques de l'application d'Albanese de X sont spéciales (pour X kählérienne compacte spéciale) et il est remarqué que l'on peut le démontrer si la conjecture $C_{n,m}^{orb}$ est vraie (cette conjecture est énoncée en [C04, conj. 4.1, p. 564]).

Conjecture 2.2 (Conjecture $C_{n,m}^{orb}$).

Soit (X, D) une paire orbifold lisse (compacte kähler) et $f : X \rightarrow Y$ une fibration nette (au sens de la définition A.9). Soit D_y la restriction de D à la fibre générale X_y de f , et $(Y, D_{f,D})$ la base orbifold de (f, D) (définie en A.3). On a alors :

$$\kappa(X, D) \geq \kappa(X_y, D_y) + \kappa(Y, D_{f,D}).$$

Un cas particulier de cette conjecture $C_{m,n}^{orb}$ a été établi sous une forme un peu plus faible dans [BC15, th. 1.1] :

Théorème 2.3.

Soit $f : X \rightarrow A$ une fibration entre variétés projectives et supposons X munie d'une structure orbifold (X, D) lisse vérifiant la propriété suivante : les fibres orbifoldes générales (X_a, D_a) sont de type général. Si A est de dimension d'Albanese maximale (en particulier si A est une variété abélienne), alors :

$$\kappa(X, D) := \kappa(X, K_X + D) \geq \dim(X) - \dim(A) + \kappa(A).$$

Rappelons que l'hypothèse faite sur A signifie que le morphisme d'Albanese de A est génériquement fini sur son image. Notons également que le théorème 1.1 de [BC15] affirme également que la paire (X, D) admet sous ces conditions un bon modèle minimal.

Nous en déduisons :

Théorème 2.4.

Si X est une variété projective lisse et spéciale, les fibres générales de l'application d'Albanese sont également spéciales.

Remarque 2.5. *Si X est une variété projective avec $\kappa(X) = 0$, les fibres de l'application d'Albanese ont aussi une dimension de Kodaira nulle, par [CH11, th. 1.3].*

Nous déduisons en fait le théorème 2.4 d'un renforcement de l'énoncé de [BC15, th. 1.1]. En effet, sous les hypothèses du théorème 2.3, la fibration d'Iitaka de (X, D) est non triviale et nous montrons qu'elle est de type général (sur un bon modèle birationnel).

Théorème 2.6.

Soit $f : X \rightarrow A$ une fibration entre variétés projectives lisses et supposons X munie d'une structure orbifold lisse (X, D) dont les fibres orbifoldes générales (X_a, D_a) sont de type général. Si A est une variété de dimension d'Albanese maximale, alors, après modification birationnelle de (X, D) , la base orbifold (Z, D_Z) de la fibration d'Iitaka-Moishezon $g : (X, D) \rightarrow Z$ de (X, D) est (lisse) de type général et :

$$\kappa(Z, D_Z) = \dim(Z) = \kappa(X, D) \geq \dim(X) - \dim(A) + \kappa(A).$$

Ce résultat est en fait une version orbifold (plus précise) de [CCE15, th. 3.1]. Remarquons également que ce résultat permet de retrouver le fait que (X, D) admet un bon modèle minimal, d'après les résultats de [BCHM10, th. 1.2].

Un examen plus précis de la situation fournit aussi le renforcement suivant de [BC15], qui n'est autre que la conjecture $C_{n,m}^{orb}$ (conjecture 2.7 ci-dessus) dans le cas particulier considéré.

Corollaire 2.7.

Soit $f : (X, D) \rightarrow Y$ une fibration (X et Y étant supposées lisses) dont les fibres sont de type général et notons Δ la base orbifold de f induite par D . Si Y est de dimension d'Albanese maximale, nous avons alors l'inégalité suivante entre les dimensions de Kodaira :

$$\kappa(X, D) \geq \kappa(X_y, D_y) + \kappa(Y, \Delta) = \dim(f) + \kappa(Y, \Delta).$$

Exemple 2.8. Dans la situation du théorème 2.6, il n'est en général pas vrai que la base orbifold (Z, D_Z) est de type général sans modifier (X, D) , même si la fibration g est *nette* (voir la définition A.9). Considérons $X_0 = \mathbb{P}^2 \times E$, où E est une courbe elliptique, et soit $G \subset \mathbb{P}^2$ une courbe lisse de degré $d > 3$ munie d'un morphisme surjectif $\psi : G \rightarrow E$. On munit X_0 du diviseur orbifold $c.(G \times E)$, où $1 > c > \frac{3}{d}$ est rationnel. Donc $(Z, D_Z) := (\mathbb{P}^2, c.G)$ est de type général. On considère $(X_0, D_0) := (X_0, g_0^*(cG))$, avec les projections naturelles $g_0 : X_0 \rightarrow Z := \mathbb{P}^2$ et $f_0 : X_0 \rightarrow E$. Alors (Z, D_Z) est la base orbifold de $g_0 : (X_0, D_0) \rightarrow Z$, et les fibres orbifolds de $F : (X_0, D_0) \rightarrow E$ sont évidemment de type général.

Soit $\eta : X \rightarrow X_0$ l'éclatement de X_0 le long de la courbe $G' \subset X_0$ graphe du morphisme $\psi : G \rightarrow E$, soit D le transformé strict de D_0 dans X et $f := f_0 \circ \eta : X \rightarrow E$ et $g := g_0 \circ \eta : X \rightarrow Z$ les fibrations induites sur X . On vérifie aisément que les fibres orbifolds de f sont encore de type général. Toutefois, dans cette situation, la base orbifold de $g : X \rightarrow Z$ est maintenant $(Z, 0) = (\mathbb{P}^2, 0)$ et n'est donc pas de type général. Si on munit cependant le diviseur exceptionnel E de η d'une multiplicité c' plus grande que $\frac{3}{d}$, alors la base orbifold de $g' : (X, D + c'E) \rightarrow Z$ est $(Z, c'G)$ qui est de type général.

Exemple 2.9. L'exemple suivant montre la nécessité d'introduire la base orbifold de $g : (X, D) \rightarrow Z$, même lorsque $D = 0$. Considérons en effet

$$X := (C \times E) / \langle s \times t \rangle$$

où C est une courbe hyperelliptique (de genre au moins 2) d'involution s et E une courbe elliptique munie de t une translation par un point d'ordre 2 (dans cet exemple $D = 0$). La deuxième projection

$$p_2 : X \rightarrow E / \langle t \rangle$$

est une fibration sur une courbe elliptique dont les fibres sont de type général et la fibration d'Iitaka est donnée par la première projection

$$p_1 : X \rightarrow C / \langle s \rangle \simeq \mathbb{P}^1.$$

La base de cette fibration ne devient de type général qu'une fois ajouté le diviseur orbifold (ici le diviseur de branchement de $C \rightarrow \mathbb{P}^1$).

Nous démontrerons les théorèmes 2.6 et 2.4 et le corollaire 2.7 dans la section 6. Avant cela, donnons quelques applications du théorème 2.4, notamment au problème envisagé dans l'introduction.

3. CONJECTURE D'ABÉLIANITÉ

Une variété spéciale étant conjecturalement (par abondance) une extension successive d'orbifolds soit Fano, soit à fibré canonique numériquement trivial (en un sens birationnel adéquat), son groupe fondamental devrait être presque abélien. La conjecture suivante, extraite de [C04, conj. 7.1, p. 595], est basée sur cette observation.

Conjecture 3.1.

Soit X une variété spéciale. Alors :

- (1) $\pi_1(X)$ est presque abélien.

(2) Si $\tilde{q}(X) = 0$, $\pi_1(X)$ est fini.

Rappelons que l'irrégularité maximale est définie par

$$\tilde{q}(X) = \sup \left(q(\tilde{X}) \mid \tilde{X} \rightarrow X \text{ étale fini} \right).$$

Cette quantité est finie et vérifie $\tilde{q}(X) \leq \dim(X)$ si X est spéciale d'après le théorème 2.1.

Il est clair que la conjecture (3.1.1) implique la conjecture (3.1.2). Le théorème 2.4 permet cependant de montrer que ces deux énoncés sont en fait équivalents et donc de réduire la conjecture (3.1.1) à l'énoncé (3.1.2).

Proposition 3.2.

La validité de la conjecture (3.1.2) implique celle de la conjecture (3.1.1).

Démonstration : On procède par récurrence sur la dimension de X . Si X vérifie $\tilde{q}(X) > 0$, on choisit un revêtement étale (toujours noté X) pour lequel $q(X) = \tilde{q}(X)$. C'est possible, puisque les revêtements étales de X restent spéciaux et ont une irrégularité majorée par $\dim(X)$. Comme l'application d'Albanese α_X de X est sans fibres multiples en codimension 1, la suite de groupes :

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(\text{Alb}(X)) \longrightarrow 1$$

est exacte, F étant une fibre lisse de α_X . D'après le théorème 2.4, F est une variété spéciale. Par récurrence sur la dimension, son groupe fondamental $\pi_1(F)$ est presque abélien et $\pi_1(F)_X$ (son image dans celui de X) l'est également. Comme il en est de même pour $\pi_1(\text{Alb}(X))$, les résultats de [C98, th. 6. 2 et 6.3] montrent que $\pi_1(X)$ est bien presque abélien. \square

Notons ici que la conjecture (3.1.1) est connue en dimension 3 : une variété kählérienne compacte *spéciale* de dimension 3 a un groupe fondamental presque abélien. Il s'agit en effet du résultat principal de [CC14, th. 1.1].

4. REVÊTEMENT UNIVERSEL

Nous considérons ici la stabilité par revêtement universel (point (iv) de l'introduction) : être une variété spéciale ne devrait dépendre que du revêtement universel. En effet, il est conjecturé [C04, conj. 9.2, p. 614] qu'être spéciale équivaut à l'annulation de la pseudo-métrique de Kobayashi (pour une discussion de ces aspects, voir également la question 5.3). Cette pseudo-métrique étant invariante par revêtement [Kob98, prop. 3.5.26, p. 91], son annulation équivaut à l'annulation de celle de son revêtement universel. Ainsi, si X et Y sont deux variétés kählériennes compactes ayant le même revêtement universel, elles sont, selon cette conjecture, simultanément spéciales ou non-spéciales.

Question 4.1. Soient X et Y des variétés kählériennes compactes ayant le même revêtement universel. Si X est spéciale, Y l'est-elle également ?

Cette question est similaire à la conjecture d'Iitaka : si X est une variété abélienne, Y est-elle une variété abélienne (à revêtement étale fini près) ?

H. Tsuji [Tsu96, th. 1] résoud cette question dans le cas « opposé » des variétés de type général : il montre en effet que, dans la situation de la question 4.1, si X est de type général, alors Y l'est aussi.

Le résultat suivant montre que la conjecture d'abélianité 3.1 implique une réponse positive (dans le cas projectif) à la question 4.1. Notons qu'il est établi dans [C04, th. 7.11, p. 598] que la conjecture d'abélianité implique une réponse positive

à la conjecture d'Itaka précédente (sous une hypothèse plus faible : la linéarité du groupe fondamental de X , au lieu de son abélianité).

Théorème 4.2.

Soient X et Y des variétés projectives lisses ayant le même revêtement universel. Si X est une variété spéciale et si son groupe fondamental est presque abélien, alors Y est spéciale également.

En combinant le résultat ci-dessus avec le résultat principal de [CC14] (valable dans le cas kählérien compact), nous obtenons :

Corollaire 4.3.

Si X et Y sont des variétés kählériennes compactes ayant le même revêtement universel et de dimension au plus 3, alors X est spéciale si et seulement si Y l'est.

Démonstration : Notons \mathcal{D} le revêtement universel de X et Y . Comme X est spéciale et de groupe fondamental presque abélien, on peut remplacer X par un revêtement étale fini et supposer que l'application d'Albanese de X induit un isomorphisme sur les groupes fondamentaux. En particulier, si A désigne la variété d'Albanese de X , l'application induite entre les revêtement universels

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{A} \simeq \mathbb{C}^q(X) \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\alpha} & A \end{array}$$

est propre. Nous savons en outre que les fibres générales de $\tilde{\alpha}_X$ sont spéciales (puisqu'elles sont celles de α). Comme $\tilde{\alpha}$ est propre (et \tilde{A} étant de Stein), les automorphismes de \mathcal{D} induisent¹ des automorphismes de \tilde{A} ; en particulier, $\tilde{\alpha}$ est donc équivariant pour une action (proprement discontinue) de $\pi_1(Y)$ sur \tilde{A} . En passant au quotient, nous obtenons ainsi un morphisme :

$$f : \mathcal{D}/\pi_1(Y) = Y \longrightarrow Z := \tilde{A}/\pi_1(Y).$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que Y n'est pas spéciale. Soit alors

$$c : Y \longrightarrow (C, \Delta_C)$$

un représentant net de son cœur², l'orbifold (C, Δ_C) étant lisse et de type général avec $p := \dim(C) > 0$. En particulier, les formes méromorphes ayant des pôles le long de Δ_C deviennent donc holomorphes sur Y (proposition A.11) :

$$c^* (H^0(C, m(K_C + \Delta_C))) \subset H^0(Y, (\Omega_Y^p)^{\otimes m}).$$

En prenant l'image réciproque par π_Y , il en résulte que les pluriformes méromorphes sur C se relèvent en des tenseurs holomorphes sur \mathcal{D} le revêtement universel de Y :

$$(c \circ \pi_Y)^* (H^0(C, m(K_C + \Delta_C))) \subset H^0(\mathcal{D}, (\Omega_{\mathcal{D}}^p)^{\otimes m}).$$

Les fibres de f correspondant par projection à celles de $\tilde{\alpha}$, elles sont spéciales. Par propriété universelle du cœur, il existe une factorisation $g : Z \dashrightarrow C$ de c telle

1. Le translaté d'une fibre par un automorphisme de \mathcal{D} est encore une sous-variété compacte connexe et son image par $\tilde{\alpha}_X$ est donc un point.

2. Nous renvoyons à [C04, §3] pour plus de détails sur le cœur. Nous utiliserons la propriété universelle qu'il vérifie : toute fibration dont les fibres générales sont spéciales se factorisent par le cœur.

que $c = g \circ f$. Résumons la situations dans le diagramme suivant :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{A} \\ \pi_Y \downarrow & & \downarrow r \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow c & \swarrow g \\ & & C \end{array}$$

où $r : \tilde{A} \rightarrow Z$ et $\pi_Y : \mathcal{D} \rightarrow Y$ sont les quotients par $\pi_1(Y)$. Nous avons donc : $c \circ \pi_Y = g \circ r \circ \tilde{\alpha}$ et il s'ensuit que :

$$(c \circ \pi_Y)^*(H^0(C, m(K_C + \Delta_C))) = \tilde{\alpha}^*((g \circ r)^*(H^0(C, m(K_C + \Delta_C)))) \subset H^0(\mathcal{D}, (\Omega_{\mathcal{D}}^p)^{\otimes m}).$$

Dans notre situation, les pluriformes méromorphes se relèvent en fait déjà comme des tenseurs holomorphes sur \tilde{A} :

$$(g \circ r)^*(H^0(C, m(K_C + \Delta_C))) \subset H^0(\tilde{A}, (\Omega_{\tilde{A}}^p)^{\otimes m}).$$

En effet, le morphisme $\tilde{\alpha} : \mathcal{D} \rightarrow \tilde{A}$ n'ayant pas de fibres multiples en codimension 1 (par le théorème 2.1), les formes différentielles méromorphes $(g \circ r)^*(m(K_C + \Delta_C))$ se prolongent en codimension 1 (et donc partout, par le théorème d'Hartogs) en des sections holomorphes de $(\Omega_{\tilde{A}}^p)^{\otimes m}$. Pour se convaincre de cela, considérons $a \in \tilde{A}$ un point où $(g \circ r)$ est définie et qui a pour image un point du support de $\Delta_C \subset C$, et s une forme méromorphe section de $(g \circ r)^*(m(K_C + \Delta_C))$. Comme nous l'avons constaté ci-dessus, le tenseur $\tilde{\alpha}^*(s)$ devient holomorphe sur \mathcal{D} . Du fait de l'absence de fibres multiples en codimension 1 de $\tilde{\alpha}$, on peut cependant supposer l'existence d'une section locale³ $\sigma : \tilde{A} \rightarrow \mathcal{D}$ de $\tilde{\alpha}$ qui permet de redescendre $\tilde{\alpha}^*(s)$ sur \tilde{A} en appliquant σ^* .

La propriété

$$(g \circ r)^*(H^0(C, m(K_C + \Delta_C))) \subset H^0(\tilde{A}, (\Omega_{\tilde{A}}^p)^{\otimes m})$$

étant établie, nous pouvons appliquer la proposition 4.4 ci-dessous (qui n'est autre que [C04, th. 8.2, p. 599]), en y choisissant $U = \tilde{A} = V \setminus D$, $V = \mathbb{P}^q$, $D = \mathbb{P}^{q-1}$: les pluriformes $(g \circ r)^*(H^0(C, m(K_C + \Delta_C)))$ se prolongent à V en des éléments de

$$H^0(V, (\Omega_V^p)^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_V((m-1)D)).$$

Cependant, l'espace en question est nul si $V = \mathbb{P}^q$ et $D = \mathbb{P}^{q-1}$ [C04, Ex. 8.8, 8.13 et prop.8.14, p. 600-601]. Ceci contredit le fait que (C, Δ_C) est de type général avec $p > 0$. \square

Nous avons utilisé ci-dessus le fait que l'on peut étendre les sections et contrôler l'ordre des pôles pour une application non dégénérée vers une orbifolde de type général, énoncé qui est une version orbifolde du théorème de Kobayashi-Ochiai [KO75, th. 2]. Il est à noter qu'une version orbifolde (plus faible, et insuffisante pour conclure ici) avait déjà été établie dans [Sak74, th. 1].

Proposition 4.4.

Soit $f : U = V \setminus D \dashrightarrow (Z, \Delta)$ une application méromorphe non-dégénérée vers une orbifolde lisse de type général avec D un diviseur de la variété lisse (non nécessairement compacte) V . Si les images réciproques par f^ des sections (pour $m > 0$ suffisamment divisible) de*

$$H^0(Z, m(K_Z + \Delta))$$

3. La considération des multiplicités non classiques est ici essentielle.

sont des tenseurs holomorphes sur U (c'est-à-dire des sections de $(\Omega_U^p)^{\otimes m}$), alors on a en fait :

$$f^* H^0(Z, m(K_Z + \Delta)) \subset H^0(V, (\Omega_V^p)^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_V((m-1)D)).$$

Les arguments donnés dans la section 8 de [C04] fournissent en effet cet énoncé. Rappelons-en les grandes lignes. Le fait de supposer l'orbifolde (Z, Δ) de type général permet de construire une pseudo-forme volume dont la courbure de Ricci est négative. Cette pseudo-forme volume étant construite à partir d'une base de sections de $m(K_Z + \Delta)$ (pour m assez grand et suffisamment divisible), l'hypothèse faite dans l'énoncé ci-dessus montre que l'image réciproque par f de cette pseudo-forme volume a un sens et est encore une pseudo-forme volume à courbure de Ricci négative (au moins dans le cas équidimensionnel, cas qui nous occupe ici). On applique alors le lemme d'Ahlfors-Schwarz dans un polydisque contenu dans V et centré sur une composante de D : la pseudo-forme volume est dominée par la forme volume standard du polydisque (épointé) et en particulier intégrable au voisinage de D . Ceci montre immédiatement que les sections s'étendent et un calcul local [C04, prop. 8.28, p. 611] permet de contrôler l'ordre des pôles.

5. ANNULATION DE LA PSEUDO-MÉTRIQUE DE KOBAYASHI

Il est conjecturé dans [C04, §9.1] que les propriétés suivantes (pour X compacte kählérienne connexe) sont équivalentes :

- (1) X est spéciale.
- (2) La pseudo-métrique de Kobayashi d_X est identiquement nulle.
- (3) X est \mathbb{C} -connexe (ie : deux quelconques de ses points peuvent être joints par une chaîne de courbes entières tracées dans X).
- (4) Il existe une courbe entière dense dans X .
- (5) Il existe une courbe entière Zariski-dense dans X .
- (6) La pseudo-métrique infinitésimale d_X^* de Kobayashi est identiquement nulle (cette dernière propriété n'étant pas explicitement considérée dans *loc. cit.*).

Considérons maintenant une variété kählérienne compacte Y ayant même revêtement universel que X .

Il est clair que Y possède les propriétés (3) et (6) respectivement si X les possède. Les conjectures précédentes impliquent qu'il devrait en être de même pour les autres propriétés. Ceci est cependant loin d'être évident sans hypothèses additionnelles. Nous faisons quelques remarques à ce sujet.

Supposons par exemple que $\pi_1(X)$ soit presque abélien. Alors Y possède la propriété (1) si c'est le cas pour X d'après le théorème 4.2. Il serait intéressant de savoir si les propriétés (2),(4) et (5) respectivement pour X l'impliquent alors pour Y .

Cette question nous a été posée par Erwan Rousseau (dans le cas (5)) et a motivée l'ajout de la présente section.

Nous faisons quelques observations élémentaires dans le cas des propriétés (2) et (5), fournissant des indications très partielles pour leur étude, qui montrent la difficulté du problème.

Nous avons tout d'abord un analogue exact du théorème 2.1 pour la propriété (5).

Proposition 5.1.

Soit X une variété projective admettant une courbe entière Zariski dense. Son morphisme d'Albanese est surjectif, à fibres connexes et n'a pas de fibre multiple en codimension 1.

Démonstration : Cet énoncé est une conséquence immédiate de [NWX07, Main Theorem], [LW12, cor. 1.4] et [Kaw81, th. 13]. \square

Ces informations ne permettent cependant pas de conclure directement que la courbe entière Zariski-dense C de X relevée à son revêtement universel redescend en une courbe entière Zariski-dense sur Y : le choix de X et Y des tores complexes adéquats et où C est linéaire montre que ceci est faux en général. Il semble nécessaire de construire de nouvelles courbes entières pour pouvoir conclure.

Si vraies, les conjectures précédentes impliqueraient une réponse⁴ positive à la :

Question 5.2. Soit X une variété kählérienne compacte telle que $d_X \equiv 0$. A-t-on également $d_X^* \equiv 0$?

6. DÉMONSTRATIONS

Nous commençons par donner la

Démonstration du théorème 2.6 :

Première étape : étude de la fibration d'Iitaka de (X, D) . Comme la paire orbifolde initiale est lisse, nous pouvons la remplacer par un modèle lisse birationnel au sens de la définition A.4 et qui sera encore noté (X, D) : cela ne change pas les hypothèses de départ et la dimension de Kodaira $\kappa(X, D)$ est également inchangée car la paire initiale est lisse. Nous supposons donc dorénavant que le morphisme d'Iitaka $g : (X, D) \rightarrow Z$ de $K_X + D$ est holomorphe et *net* (avec Z lisse). Ce morphisme est non trivial puisque le théorème 2.3 appliqué à f fournit la minoration

$$\kappa(X, D) \geq \dim(f) + \kappa(A) > 0.$$

Nous munissons alors la base Z de g de la structure orbifolde (Z, D_Z) induite par g et D sur X (comme dans la définition A.3).

Soit $(X_z, D_z := D \cap X_z)$ une fibre orbifolde générique de g (lisse par le théorème de Sard). Par définition, nous avons $\kappa(X_z, D_z) = 0$ et (X_z, D_z) est donc spéciale [C11, th. 7.7, p. 885], ainsi *a fortiori* que X_z . Il s'ensuit que $f(X_z) = C_z \subset A$ est une sous-variété spéciale de A . Par [Kaw81, th. 13], l'image de C_z dans $\text{Alb}(A)$ est un translaté d'une sous-variété abélienne fixe $C \subset \text{Alb}(A)$ et $C_z \rightarrow C$ est birationnel. Les sous-variétés C_z sont donc contenues dans les fibres de la fibration d'Iitaka $j : A \rightarrow B$ de A qui est (birationnel à) une fibration localement analytiquement triviale de fibre une variété abélienne (à nouveau par [Kaw81, th. 13]). Il existe donc une factorisation de $j \circ f : X \rightarrow B$ par Z , c'est-à-dire un morphisme $h : Z \rightarrow B$ tel que $j \circ f = h \circ g$.

Nous allons montrer, c'est l'étape essentielle, que l'application

$$f_z := f|_{X_z} : X_z \rightarrow C_z$$

est génériquement finie (pour $z \in Z$ général). Pour $a \in C_z$ général, $(X_{z,a}, D_{z,a})$ désignera la fibre orbifolde (lisse) de $f_z : (X_z, D_z) \rightarrow C_z$. La fibre orbifolde générique (X_a, D_a) de f est par hypothèse de type général et est recouverte par les $(X_{z,a}, D_{z,a})$ pour les z tels que $a \in C_z$, c'est-à-dire tels que $h(z) = q(a)$, ou encore : $z \in h^{-1}(q(a))$. Nous en déduisons que $(X_{z,a}, D_{z,a})$ est encore de type général [C11, th. 9.12, p. 893] et nous pouvons donc appliquer de nouveau le théorème 2.3 à f_z . Ceci donne alors

$$0 = \kappa(X_z, D_z) \geq \kappa(X_{z,a}, D_{z,a}) + \kappa(C_z) = \dim(X_{z,a}) \geq 0$$

et implique que $\dim(X_{z,a}) = 0$, c'est-à-dire que $f_z : X_z \rightarrow C_z$ est génériquement finie.

4. Notons que l'annulation de d_X^* implique celle de d_X par [Kob98, th. 3.5.31, p. 94].

Puisque $\kappa(X_z, D_z) = 0$ et que C_z est une variété abélienne, on en déduit que la factorisation de Stein de f_z

$$f_z : X_z \xrightarrow{f'_z} C'_z \xrightarrow{p_z} C_z$$

vérifie : p_z est étale et D_z est f'_z -exceptionnel. L'application naturelle

$$\eta := g \times f : X \rightarrow Z \times_B A$$

est donc surjective et génériquement finie. De plus, $g(D)$ est contenu dans un diviseur de Z .

Deuxième étape : cas où η est birationnelle. Supposons tout d'abord que η est birationnelle et voyons comment conclure dans ce cas.

Nous munissons alors $X_0 := Z \times_B A$ du diviseur $D_0 := \eta_*(D)$ et examinons la projection naturelle $g_0 : X_0 \rightarrow Z$. Puisque g_0 est submersive et que $g_0(D_0) = g(D)$ est un diviseur de Z , nous avons

$$D_0 = g_0^*(D_Z^0)$$

si D_Z^0 est la base orbifolde de $g_0 : (X_0, D_0) \rightarrow Z$. De plus,

$$K_{X_0} + D_0 = (g_0)^*(K_Z + D_Z^0)$$

et les dimensions de Kodaira coïncident donc $\kappa(X_0, D_0) = \kappa(Z, D_Z^0)$. Puisque

$$K_X + D = \eta^*(K_{X_0} + D_0) + E,$$

où E est diviseur η -exceptionnel (pas nécessairement effectif) et que X_0 est lisse (car Z l'est), le théorème de Hartogs montre que

$$\dim(Z) := \kappa(X, D) \leq \kappa(X_0, D_0) = \kappa(Z, D_Z^0)$$

et (Z, D_Z^0) est donc de type général.

Troisième étape : changement de base. Nous allons montrer que η devient birationnelle après changement de base étale fini adéquat $\pi : A' \rightarrow A$ et analyserons ce changement de base.

Soit, en effet, $f_*(\pi_1(X_z)) \subset \pi_1(C_z) = \pi_1(C)$ (avec $C \subset \text{Alb}(A)$, voir ci-dessus) : c'est un sous-groupe d'indice fini de $\pi_1(C)$ indépendant de z générique dans Z . Il existe alors un revêtement étale fini (avec des notations évidentes)

$$\pi : \text{Alb}(A') \rightarrow \text{Alb}(A)$$

tel que $\pi_1(\text{Alb}(A')) \cap \pi_1(C_z) = f_*(\pi_1(X_z)) = \pi_1(C')$ pour une sous-variété abélienne C' de $\text{Alb}(A')$ et tel que, de plus, $\text{Alb}(A')/C' = \text{Alb}(A)/C$. Ceci est une conséquence du fait que $\pi_1(C)$ est un facteur direct de $\pi_1(\text{Alb}(A))$ (le scindage n'étant en aucun cas canonique).

Nous considérons alors la fibration

$$f' : (X', D' := \pi^*(D)) \rightarrow A'$$

obtenue par changement de base et conservons la notation π pour désigner le revêtement étale $X' \rightarrow X$. Une fois ce changement de base effectué, l'application

$$\eta' := g' \times f' : X' \rightarrow Z' \times_B A' =: X'_0$$

est alors surjective et envoie birationnellement X'_z sur C'_z et η' est donc birationnelle. La notation Z' désigne naturellement la base de la fibration d'Iitaka du \mathbb{Q} -diviseur $K_{X'} + D'$. Remarquons toutefois que, lors de cette opération, le morphisme induit $Z' \rightarrow Z$ n'est en général pas étale.

Considérons enfin la factorisation de Stein

$$\eta : X \xrightarrow{\varphi} X_1 \xrightarrow{p} X_0$$

de $\eta = p \circ \varphi$. L'application η étant génériquement finie, φ est birationnelle (connexe) et p finie. Nous allons voir plus loin que p est galoisienne au-dessus de X_0 pour une action adéquate naturelle de $G := \text{Gal}(C'/C) = \text{Gal}(\text{Alb}(A')/\text{Alb}(A))$ sur X_1 . Nous pouvons résumer la situation dans le diagramme suivant.

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} X' & \xrightarrow{\pi} & & & X \\ & \searrow \eta' & & \nearrow \varphi & \\ & & X_1 & & \\ & & \downarrow p & & \\ & & X_0 & & \\ & \nearrow q & \xrightarrow{\pi_0} & \searrow \eta & \\ X'_0 & & & & X_0 \\ & \searrow g'_0 & & \nearrow g_0 & \\ Z' & \xrightarrow{\rho} & & & Z \end{array}$$

Les applications qui apparaissent ci-dessus possèdent les propriétés suivantes :

- g, g', g_0 et g'_0 sont des fibrations, les deux dernières sont de plus lisses.
- π, π_0 et ρ sont finies (galoisiennes), π étant étale.
- η' et φ sont birationnelles.
- p est finie.

Le groupe G agit de deux façons. Tout d'abord, l'action de G sur X' (dédue par changement de base de celle de G par translations sur $\text{Alb}(A')$) induit une action de G sur Z' car c'est la base de la fibration d'Iitaka du \mathbb{Q} -diviseur G -invariant $K_{X'} + D'$. Il est à noter que cette action sur Z' possède en général des points fixes. D'autre part, il est aisé de constater que $G \times G$ agit sur X'_0 . En effet, la variété en question est obtenue comme produit fibré :

$$X'_0 = Z' \times_B A'$$

et le groupe G agit à la fois sur Z' et A' . Comme les projections $Z' \rightarrow B$ et $A' \rightarrow B$ sont invariantes sous ces actions, on en déduit une action compatible de $G \times G$ sur X'_0 . Notons au passage que le quotient de X'_0 par l'action de $G \times G$ n'est autre que X_0 . Nous restreignons désormais cette action à la diagonale de $G \times G$. C'est en effet cette action qui est naturelle dans le cadre qui est le nôtre, comme le montre l'affirmation ci-dessous.

Affirmation. *Les applications f' et g' sont G -équivariantes (pour les actions précédentes de G sur X', A' et Z'). En particulier, l'application η' est G -équivariante pour l'action naturelle de G sur X' et pour l'action diagonale de G sur X'_0 .*

Remarquons enfin qu'il existe un morphisme naturel $q : X'_0 \rightarrow X_1$. En effet, l'application η' est G -équivariante d'après l'affirmation ci-dessus et nous pouvons passer au quotient. Nous obtenons ainsi une application birationnelle (à fibres connexes)

$$\eta'/G : X'/G = X \rightarrow X'_0/G$$

et qui, composée avec la projection naturelle $X'_0/G \rightarrow X'_0/G \times G = X_0$ n'est autre que η :

$$\eta = X \xrightarrow{\eta'/G} X'_0/G \rightarrow X_0.$$

Par unicité de la factorisation de Stein, nous en déduisons que $\eta'/G = \varphi$. En particulier, X_1 n'est autre que le quotient⁵ de X'_0 sous l'action diagonale de G . Comme

5. Remarquons que, le groupe G étant abélien, G est distingué dans $G \times G$ et on en déduit que X_1 hérite *via* X'_0 d'une action de $G \times G/G \simeq G$. Cette action peut également être décrite de la manière suivante. Soit $Z^* \subset Z$ l'ouvert de Zariski dense (puisque $X_z \rightarrow A_b, b := h(z)$ est étale pour $z \in Z$ générique) au-dessus duquel $g : X \rightarrow Z$ est lisse et soit $X_1^* := g^{-1}(Z^*)$. L'application

l'action sur le deuxième facteur (celle qui vient de A') est sans point fixe, on en déduit que $q : X'_0 \rightarrow X_1$ est étale et que $g_1 : X_1 \rightarrow Z$ est obtenu en prenant le quotient de $g'_0 : X'_0 \rightarrow Z'$.

Conclusion. Considérons alors les orbifolles $(X'_0, D'_0 := \eta'_*(D'))$ et $(X_1, D_1 := \varphi_*(D))$ et notons que le morphisme

$$(X'_0, D'_0) \xrightarrow{q} (X_1, D_1)$$

est étale au sens orbifolde, *i.e.*

$$K_{X'_0} + D'_0 = q^*(K_{X_1} + D_1)$$

car les composantes contractées par φ sur X et par η' sur X' se correspondent *via* π . Munissons également Z' et Z des bases orbifolles de $g'_0 : (X'_0, D'_0) \rightarrow Z'$ et $g_1 : (X_1, D_1) \rightarrow Z$; nous les noterons $(Z', D_{Z'}^0)$ et (Z, D_Z^1) . Nous avons alors la suite d'inégalités :

$$\dim(Z) = \kappa(X, D) \leq \kappa(X_1, D_1) = \kappa(X'_0, D'_0) = \kappa(Z', D_{Z'}^0) \leq \dim(Z).$$

La première inégalité est une conséquence du théorème de Hartogs, les égalités suivantes provenant du caractère étale de q et du résultat de la deuxième étape.

Il nous suffit donc de vérifier que

$$\rho : (Z', D_{Z'}^0) \rightarrow (Z, D_Z^1)$$

est étale (au sens orbifolde précédent) en codimension un. Une fois ceci établi, nous obtiendrons en effet l'égalité souhaitée des dimensions de Kodaira (montrant que la fibration d'Iitaka de (X_1, D_1) est de type général) :

$$\kappa(Z, D_Z^1) = \kappa(Z', D_{Z'}^0) = \dim(Z') = \dim(Z).$$

Un calcul simple de multiplicités montre l'égalité :

$$K_{Z'} + D_{Z'}^0 = \rho^*(K_Z + D_Z^1).$$

En effet, nous avons vu ci-dessus que la fibration $g_1 : X_1 \rightarrow Z$ est obtenue à partir de la fibration lisse $g'_0 : X'_0 \rightarrow Z'$ en prenant le quotient par l'action de G . Cela montre que, si F est un diviseur de Z , la multiplicité de F dans D_Z^1 est donnée par :

$$m_{D_Z^1}(F) = r_F \cdot m_{D_{Z'}^0}(F')$$

où r_F est l'ordre de ramification de ρ le long de F et F' est une composante irréductible de $\rho^{-1}(F)$.

En écrivant D_Z^1 sous la forme

$$D_Z^1 = \sum_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{r_i m_i}\right) F_i$$

$g_1^* : X_1^* \rightarrow Z^*$ est donc lisse : c'est un fibré principal de fibre C' au-dessus de Z^* . Le groupe G agit sur X_1^* par translations dans les fibres de g_1^* . Cette action se prolonge analytiquement à X_1 . En effet, si nous notons Γ_γ^* , $\gamma \in G$ le graphe dans $X_1^* \times X_1^*$ de l'automorphisme de X_1^* défini ci-dessus, il est contenu dans $(p \times p)^{-1}(\Delta)$ (avec Δ la diagonale de $X_0 \times X_0$), l'action de G laissant invariante la projection p . Son adhérence dans $X_1 \times X_1$ est donc algébrique, puisque $p \times p : X_1 \times X_1 \rightarrow X_0 \times X_0$ est finie. C'est donc le graphe d'un automorphisme de X_1 , puisque X_1 est normal.

où $(F_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des composantes de D_Z^1 et m_i les multiplicités correspondantes sur Z' , il vient alors :

$$\begin{aligned} \rho^*(K_Z + D_Z^1) &= \rho^*\left(K_Z + \sum_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{r_i m_i}\right) F_i\right) \\ &= \rho^*(K_Z) + \sum_{i \in I} r_i \left(1 - \frac{1}{r_i m_i}\right) \rho^*(F_i) \\ &= \rho^*(K_Z) + \sum_{i \in I} (r_i - 1) \rho^*(F_i) + \sum_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) \rho^*(F_i) \\ &= K_{Z'} + D_{Z'}^0, \end{aligned}$$

et le morphisme ρ est bien orbifold-étale en codimension un. \square

Remarque 6.1. *L'exemple 2.9 montre qu'il est nécessaire d'effectuer un changement de base pour obtenir le caractère birationnel de l'application η .*

Remarque 6.2. *L'exemple 2.8 ci-dessus montre que, dans la situation présente, (Z, D_Z^0) peut être de type général tandis que (Z, D_Z) ne l'est pas, si les multiplicités sur le diviseur exceptionnel de η sont insuffisamment grandes.*

Nous démontrons maintenant le théorème 2.4.

Démonstration du théorème 2.4 : Soit $\alpha_X : X \rightarrow A := \text{Alb}(X)$ le morphisme d'Albanese de X qui est supposée lisse, connexe, projective et spéciale. Donc (théorème 2.1) α_X est surjective et à fibres connexes. Supposons que ses fibres ne soient pas spéciales. Il existe alors un cœur relatif (appliquer par exemple [C04a, th. 3.2, p. 663])

$$c := c_{X/A} : X \longrightarrow Y := C(X/A)$$

et une fibration $f : Y \rightarrow A$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{c} & (Y, D) \\ & \searrow \alpha_X & \swarrow f \\ & & A \end{array}$$

commute. Le morphisme c peut, quitte à modifier X , être rendu holomorphe et la base orbifold (Y, D) de c être supposée lisse. Les fibres orbifoldes générales de $f : (Y, D) \rightarrow A$ sont les parties f -verticales de la base orbifold de c , par le lemme 6.3 ci-dessous, et sont donc de type général.

Nous pouvons donc appliquer le théorème 2.6 au morphisme $f : (Y, D) \rightarrow A$. Nous en déduisons un morphisme birationnel $\eta : Y \rightarrow Y_0$ construit comme dans la démonstration du théorème 2.6. En particulier, si $D_0 = \eta_*(D)$, la fibration d'Iitaka-Moishezon $g_0 : (Y_0, D_0) \rightarrow (Z, D_Z^0)$ est de type général et nous noterons $g := g_0 \circ \eta$ la composée.

Quitte à modifier X, Y et Z , nous pouvons supposer que l'application $g \circ c : X \rightarrow Z$ est nette. Même si toute fibration admet un modèle net (voir la proposition A.10), la situation étudiée présente une difficulté supplémentaire : la fibration g dépend de c et il n'est *a priori* pas évident qu'une modification de Z soit compatible avec le fait d'être la base de la fibration d'Iitaka de (Y, D) . Pour parvenir à nos fins (rendre $g \circ c$ nette), nous pouvons par exemple choisir un modèle birationnel de $c : X \rightarrow (Y, D)$ de telle sorte que $\kappa(Y, D)$ soit minimal (et rappelons que $\dim(Z) = \kappa(Y, D) > 0$ d'après le théorème 2.3). Cette dimension de Kodaira sera préservée par toute modification nette de ce modèle de c (voir [C04, §1.3]). Une fois ce choix fait, nous

remarquons que si $Z' \rightarrow Z$ est une modification de Z et si nous considérons les changements de base qui s'en déduisent :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{c} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ X' & \xrightarrow{c'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

l'application $g' : Y' \rightarrow Z'$ s'identifie à nouveau avec la fibration d'Iitaka de la paire $(Y', D' = \Delta(c'))$ car $\kappa(Y', D') = \kappa(Y, D)$. Fort de cette remarque, nous pouvons donc construire un modèle net de $g \circ c : X \rightarrow Z$ en commençant par aplatir cette fibration puis en désingularisant l'espace total (nous renvoyons à nouveau à [C04, cor. 1.13, p. 513] pour les détails).

En particulier, Z est lisse et le morphisme $g_0 : Y_0 \rightarrow Z$ est submersif à fibres connexes entre variétés lisses. De plus, (Z, D_Z^0) est aussi la base orbifold de

$$g \circ c : X \rightarrow Z$$

puisque, pour toute composante $F \subset Z$ du support de D_Z^0 , et toute composante irréductible E de $(g \circ c)^{-1}(F)$, la multiplicité de E dans $(g \circ c)^*(F)$ est un multiple de celle de $E_0 = g_0^{-1}(F)$ dans $g_0^*(F)$. Or cette multiplicité est aussi celle de E_0 dans $D_0 = \eta_*(D)$, puisque les fibres de g_0 sont toutes irréductibles.

Il en résulte que X n'est pas spéciale car (Z, D_Z^0) est de type général (voir A.12). Ceci constitue une contradiction et montre que les fibres générales de α sont donc bien spéciales. \square

Dans la démonstration précédente, nous avons utilisé le résultat élémentaire suivant.

Lemme 6.3.

Soit $f : X/A \rightarrow Y/A$ une fibration au dessus de A , c'est-à-dire que X et Y sont elles-mêmes fibrées sur A et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow & \swarrow \\ & A & \end{array}$$

commute. Considérons le diviseur orbifold $D := D_f$ de f . Si $a \in A$ est un point suffisamment général, notons $f_a : X_a \rightarrow Y_a$ la restriction de f aux fibres X_a et Y_a et D_a la restriction de D à Y_a . Nous avons alors

$$D_a \geq D_{f_a},$$

où D_{f_a} est le diviseur orbifold de f_a . En particulier, si f est le cœur relatif de $X \rightarrow A$, alors les fibres de $(Y, D) \rightarrow A$ sont de type général.

Démonstration : Soit D_i une composante de D et écrivons la décomposition :

$$f^*(D_i) = \sum_{j \in J} m_j^{(i)} D_j^{(i)} + R_i$$

où les diviseurs $D_j^{(i)}$ (contenus dans X) s'envoient surjectivement sur D_i et où R est f -exceptionnel. En restreignant cette égalité à X_a , on constate que l'ensemble des diviseurs sur lequel on prend l'infimum pour calculer la multiplicité de $D_i|_{Y_a}$ dans D_{f_a} est plus grand que J : en effet, certaines composantes de $R_i|_{Y_a}$ peuvent ne plus être f_a -exceptionnelles. Cela fournit l'inégalité annoncée. \square

Pour finir, donnons quelques mots d'explication sur la **Démonstration du Corollaire 2.7** : Reprenons les notations de la démonstration du théorème 2.6 : nous avons un diagramme

$$\begin{array}{ccc} (X, D) & \xrightarrow{f} & (Y, \Delta) \\ g \downarrow & & \downarrow \\ Z & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

dans lequel Z est la base de la fibration d'Iitaka associée à $K_X + D$ et B un certain quotient de Y . Il vient donc :

$$\kappa(X, D) = \dim(Z) = \dim(f) + \dim(B).$$

Pour montrer l'inégalité souhaitée, il suffit de montrer que $\dim(B) \geq \kappa(Y, \Delta)$ ce qui revient à montrer que, si $b \in B$ est un point général, la dimension de Kodaira de la fibre orbifold (Y_b, Δ_b) vérifie :

$$\kappa(Y_b, \Delta_b) = 0.$$

Pour cela, observons que la restriction (encore notée f)

$$f : (X_z, D_z) \longrightarrow (Y_b, \Delta_b)$$

est un morphisme orbifold entre orbifolds de même dimension (avec $h(z) = b$). Nous obtenons la conclusion souhaitée :

$$0 \leq \kappa(Y_b) \leq \kappa(Y_b, \Delta_b) \leq \kappa(X_z, D_z) = 0,$$

la première inégalité étant une conséquence du fait que Y_b est de dimension d'Albanese maximale. \square

ANNEXE A. RÉSUMÉ ORBIFOLDE

Dans cet appendice, nous présentons quelques définitions et propriétés des morphismes orbifolds utilisées ci-dessus. Nous renvoyons à [C04, C11] pour une étude plus détaillée de ces notions.

A.1. La catégorie des orbifolds : objets et morphismes.

Définition A.1.

Une orbifold est la donnée d'un couple (X, Δ_X) où X est une variété complexe et Δ_X un \mathbb{Q} -diviseur dont les **coefficients** sont compris entre 0 et 1. Les **multiplisités** de Δ_X sont définies par :

$$\Delta_X = \sum_{D \subset X} \left(1 - \frac{1}{m(D)}\right) \cdot D = \sum_{D \subset X} c(D) \cdot D$$

où la somme (localement finie) porte sur tous les diviseurs premiers de X . En particulier, $m(D) \geq 1$ et $m(D) = 1$ pour (localement) presque tout D .

Nous dirons que l'orbifold (X, Δ_X) est lisse si X l'est et si le support de Δ_X est à croisements normaux simples.

Le fait de considérer une telle structure additionnelle est motivée par l'introduction de la base orbifold d'une fibration (qui tient compte des fibres multiples de cette dernière).

Définition A.2.

Soient $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe et $E \subset X$ un diviseur premier de X . Nous définissons $m(f, E)$ la multiplicité de f le long de E de la façon suivante :

- (i) si E est f -exceptionnel (c'est-à-dire si $\text{codim}_Y(f(E)) \geq 2$) ou si $f(E) = Y$, alors $m(f, E) = 1$.
- (ii) sinon $f(E) = D$ est un diviseur premier de Y et nous pouvons écrire

$$f^*(D) = m(f, E)E + F$$

où F est un diviseur effectif de X ne contenant pas E dans son support.

Plus généralement :

Définition A.3.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe et supposons X munie d'une structure orbifolde Δ_X . Pour tout diviseur premier $D \subset Y$, nous pouvons écrire :

$$f^*(D) = \sum_{E \subset X | f(E)=D} m(f, E)E + R$$

où R est f -exceptionnel. Le diviseur

$$\Delta(f, \Delta_X) := \sum_{D \subset Y} \left(1 - \frac{1}{m_f(D)}\right) D$$

est appelé diviseur orbifolde de f (induit par Δ_X) avec :

$$m_f(D) := \inf\{m(f, E).m_X(E) | f(E) = D\}.$$

Les morphismes pour la catégorie des orbifolles lisses sont les applications holomorphes entre les variétés sous-jacentes aux orbifolles et qui respectent les structures additionnelles.

Définition A.4.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application holomorphe et supposons X et Y munies de structures orbifoldes Δ_X et Δ_Y respectivement telles que (X, Δ_X) et (Y, Δ_Y) soient lisses. Nous dirons que f est un morphisme orbifolde entre (X, Δ_X) et (Y, Δ_Y) si, pour tout diviseur premier $D \subset Y$, nous avons :

$$m_i.m_X(E_i) \geq m_Y(D)$$

où nous avons écrit la décomposition irréductible de $f^*(D)$ sous la forme :

$$f^*(D) = \sum_i m_i E_i.$$

Si de plus f est biméromorphe et si $f_*(\Delta_X) = \Delta_Y$, f sera alors appelé un morphisme biméromorphe orbifolde.

Remarque A.5. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application holomorphe et si Δ_X est une structure orbifolde sur X , le morphisme $f : (X, \Delta_X) \rightarrow (Y, \Delta(f, \Delta_X))$ n'est en général pas un morphisme orbifolde puisque les diviseurs f -exceptionnels ne sont pas pris en compte dans la définition de $\Delta(f, \Delta_X)$.

A.2. Différentielles symétriques orbifoldes et fibrations nettes. On se place dans la situation d'une orbifolde lisse (X, Δ_X) . Les différentielles symétriques adaptées à la structure orbifolde se définissent de la manière suivante :

Définition A.6.

Soit (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées locales dans lequel le diviseur orbifolde a pour équation (symbolique) :

$$\Delta_X = \left(\prod_{i=1}^n x_i \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) = 0 \right).$$

Le faisceau $\mathbf{S}_q^m(X, \Delta_X)$ est le faisceau de \mathcal{O}_X -modules localement libre engendré par les éléments suivants :

$$\bigotimes_{j=1}^m x_j^{\lceil -k_j a_j \rceil} dx_{J_j}.$$

Dans l'écriture ci-dessus, $\lceil a \rceil$ désigne sa partie entière supérieure et on a de plus :

- (1) $a_j = 1 - \frac{1}{m_j}$ est le coefficient de $(x_j = 0)$ dans Δ_X .
- (2) J_1, \dots, J_m est une suite de parties ordonnées à q éléments de l'ensemble des indices $\{1, \dots, n\}$.
- (3) pour tout $j = 1 \dots n$, on note k_j le nombre d'occurrences de l'indice j dans la suite J_1, \dots, J_m .

Remarque A.7. Lorsque $q = n = \dim(X)$, nous avons bien entendu

$$\mathbf{S}_n^m(X, \Delta_X) = [m(K_X + \Delta_X)],$$

et dans le cas logarithmique (où tous les $c_j = 1$, ou encore : $m_j = +\infty$), nous retrouvons les différentielles logarithmiques usuelles et leurs puissances symétriques.

Les différentielles ci-dessus définies sont fonctorielles pour les morphismes orbifoldes :

Proposition A.8 ([C11], prop. 2.11, p. 823).

Soit $f : (X, \Delta_X) \rightarrow (Y, \Delta_Y)$ un morphisme orbifold (entre orbifoldes lisses). L'image réciproque par f des différentielles orbifoldes est bien définie :

$$f^* : \mathbf{S}_q^m(Y, \Delta_Y) \rightarrow \mathbf{S}_q^m(X, \Delta_X).$$

Bien que la base orbifold d'un morphisme ne suffise pas à rendre ce morphisme un morphisme orbifold (cf. remarque A.5), il est cependant possible de prolonger les images réciproques des tenseurs holomorphes dont les pôles sont contrôlés par la base orbifold, une fois choisi un bon modèle de la fibration initiale.

Définition A.9.

Une fibration $f : (X, \Delta_X) \rightarrow Y$ (avec (X, Δ_X) lisse) est dite nette si il existe (Z, Δ_Z) une orbifold lisse et $u : (X, \Delta_X) \rightarrow (Z, \Delta_Z)$ un morphisme biméromorphe orbifold tels que tout diviseur f -exceptionnel soit également u -exceptionnel.

Proposition A.10 ([C11], prop. 4.10, p. 843).

Soit $g : (Z, \Delta_Z) \rightarrow W$ une fibration avec (Z, Δ_Z) lisse. Il existe alors un diagramme

$$\begin{array}{ccc} (X, \Delta_X) & \xrightarrow{u} & (Z, \Delta_Z) \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{v} & W \end{array}$$

dans lequel u et v sont biméromorphes (au sens orbifold pour u) et f est nette.

Les formes différentielles orbifoldes sont fonctorielles pour les fibrations nettes. Il s'agit essentiellement d'une conséquence du théorème de Hartogs et le lecteur pourra se référer à [C11, §5.2] pour une discussion plus détaillée.

Proposition A.11.

Soit $f : (X, \Delta_X) \rightarrow Y$ une fibration nette et considérons $\Delta_Y := \Delta(f, \Delta_X)$ la base orbifold de la fibration f . Il existe un morphisme de faisceaux bien défini pour $m \geq 1$ suffisamment divisible (avec $q = \dim(Y)$) :

$$f^* : \mathcal{O}_Y(m(K_Y + \Delta_Y)) \rightarrow \mathbf{S}_q^m(X, \Delta_X).$$

En particulier, au niveau des sections globales, nous en déduisons l'injection :

$$f^* : H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y + \Delta_Y))) \hookrightarrow H^0(X, \mathbf{S}_q^m(X, \Delta_X)).$$

Si de plus $g : Z \rightarrow X$ est une fibration nette telle que $\Delta(g) \geq \Delta_X$, alors on a même :

$$(f \circ g)^* : H^0(Y, \mathcal{O}_Y(m(K_Y + \Delta_Y))) \hookrightarrow H^0(Z, \mathbf{S}^m \Omega_Z^q).$$

A.3. Orbifolles spéciales. Les orbifolles spéciales sont celles qui n'admettent pas de fibrations nettes sur une base de type général. Plus précisément :

Définition A.12.

Une orbifolde (X, Δ_X) est dite spéciale si, pour tout $u : (X', \Delta') \rightarrow (X, \Delta_X)$ biméromorphe (au sens de la définition A.4) et tout fibration nette $f : (X', \Delta') \rightarrow Y$ avec $\dim(Y) > 0$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\kappa(Y, K_Y + \Delta(f, \Delta')) < \dim(Y).$$

Il est également possible de caractériser les orbifolles spéciales par leurs faisceaux de formes différentielles. Nous renvoyons à [C11] pour le cas $\Delta \neq 0$ de la caractérisation ci-dessous et nous nous contentons d'énoncer le cas des variétés.

Proposition A.13 ([C04], th. 2.27, p. 536).

Une variété X est spéciale si et seulement si pour tout sous faisceau cohérent de rang un $\mathcal{L} \subset \Omega_X^p$ (pour $1 \leq p \leq \dim(X)$), l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\kappa(X, \mathcal{L}) < p.$$

RÉFÉRENCES

- [BCHM10] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher D. Hacon and James McKernan, *Existence of minimal models for varieties of log general type* J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 2, 405–468.
- [BC15] Caucher Birkar and Jungkai Alfred Chen, *Varieties fibred over abelian varieties with fibres of log general type*, Adv. Math. **270** (2015), 206–222.
- [C98] Frédéric Campana, *Connexité abélienne des variétés kählériennes compactes*, Bull. Soc. Math. France **126** (1998), no. 4, 483–506.
- [C04] ———, *Orbifolds, special varieties and classification theory*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 499–630.
- [C04a] ———, *Orbifolds, special varieties and classification theory : an appendix*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 631–665.
- [C11] ———, *Orbifolles géométriques spéciales et classification biméromorphe des variétés kählériennes compactes*, J. Inst. Math. Jussieu **10** (2011), no. 4, 809–934.
- [CC14] Frédéric Campana and Benoît Claudon, *Abelianity conjecture for special compact Kähler 3-folds*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **57** (2014), no. 1, 55–78.
- [CCE15] Frédéric Campana, Benoît Claudon, and Philippe Eyssidieux, *Représentations linéaires des groupes kählériens : Factorisations et conjecture de shafarevich linéaire*, Compos. Math. **151** (2015), no. 2, 351–376.
- [CH11] Jungkai Alfred Chen and Christopher D. Hacon, *Kodaira dimension of irregular varieties*, Invent. Math. **186** (2011), no. 3, 481–500.
- [Kaw81] Yujiro Kawamata, *Characterization of abelian varieties*, Compositio Math. **43** (1981), no. 2, 253–276.
- [KO75] Shoshichi Kobayashi and Takushiro Ochiai, *Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type*, Invent. Math. **31** (1975), no. 1, 7–16.
- [Kob98] Shoshichi Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 318, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [LW12] Steven Lu and Jörg Winkelmann, *Quasiprojective varieties admitting Zariski dense entire holomorphic curves*, Forum Math. **24** (2012), no. 2, 399–418.

- [NWX07] Juniro Noguchi, Jörg Winkelmann and Katsutochi Yamanoi, *Degeneracy of holomorphic curves into algebraic varieties*, J. Math. Pures Appl. (9) **88** (2007), no. 3, 293–306.
- [Sak74] Fumio Sakai, *Degeneracy of holomorphic maps with ramification*, Invent. Math. **26** (1974), 213–229.
- [Siu98] Yum-Tong Siu, *Invariance of plurigenera*, Invent. Math. **134** (1998), no. 3, 661–673.
- [Siu02] ———, *Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type*, Complex geometry (Göttingen, 2000), Springer, Berlin, 2002, pp. 223–277.
- [Tsu96] Hajime Tsuji, *On the universal covering of projective manifolds of general type*, Kodai Math. J. **19** (1996), no. 1, 137–143.
- [Uen75] Kenji Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439, Springer-Verlag, 1975, Notes written in collaboration with P. Cherenack.

FRÉDÉRIC CAMPANA, BENOÎT CLAUDON, UNIVERSITÉ DE LORRAINE, INSTITUT ÉLIE CARTAN
NANCY, UMR 7502, B.P. 70239, 54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY CEDEX, FRANCE
E-mail address: Frederic.Campana@univ-lorraine.fr
E-mail address: Benoit.Claudon@univ-lorraine.fr