

LE THÉORÈME DE L'INDICE L^2
D'ATIYAH

Benoît Claudon

Mémoire de Master 2

Réalisé au sein du laboratoire d'Analyse et
Géométrie Complexe
De l'Institut Elie Cartan Nancy

Sous la direction de M^F Frédéric Campana

soutenu le 10 septembre 2004

Table des matières

Introduction	3
Notations	3
1 Schéma de la preuve	4
2 Notion de Γ-dimension	7
2.1 Cas de $l^2(\Gamma)$	7
2.2 Opérateurs à Γ -trace sur $L^2(\tilde{X})$	9
3 Equation de la chaleur	12
3.1 Caractère auto-adjoint de Δ'' et $\widetilde{\Delta}''$	12
3.2 Noyaux des opérateurs $e^{-t\Delta''}$ et $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$	14
3.3 Développements asymptotiques	16
4 Formules de McKean-Singer et conclusion	19
4.1 Préliminaires	19
4.2 Formules de trace	20
4.3 Fin de la démonstration	22
5 Annexe	23
5.1 Théorème spectral	23
5.2 Injections de Sobolev et estimées elliptiques non-compactes	24
Bibliographie	26

Introduction

Ce mémoire porte sur le théorème de l'indice L^2 , démontré, dans un contexte riemannien, par M.F. Atiyah dans l'article [At76]. L'énoncé établi ici est restreint au cadre analytique complexe et porte sur la caractéristique d'Euler de fibrés holomorphes. Nous en donnons une démonstration reposant sur les méthodes dites (de l'équation) de la chaleur.

Dans un premier temps, nous donnons un descriptif de la situation ainsi qu'un schéma de la démonstration ; celle-ci (malgré l'élégance de la méthode) requiert en effet divers éléments et définitions. Dans un souci de clarté, il nous a donc semblé préférable de dégager l'idée générale de la preuve ainsi que son fil directeur. Les différentes affirmations présentes dans ce descriptif sont démontrées dans les sections ultérieures.

Notations

Si $F \rightarrow X$ est un fibré vectoriel holomorphe sur X variété complexe (de dimension n) et si on munit X et F de métriques hermitiennes (ω et h), on notera :

$$L^2_{p,q}(X, F) = L^2(X, \Lambda^{p,q}T_X^* \otimes F)$$

$$L^2_{0,\bullet}(X, F) = \bigoplus_{q=0}^n L^2_{0,q}(X, F)$$

les espaces de sections L^2 correspondants et de même pour les section C^∞ et C^∞ à support compact (notées \mathcal{D}). De plus, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignera toujours le produit scalaire dans les espaces de formes L^2 .

Si $\bar{\partial}$ désigne la connexion (canonique) de type $(0, 1)$ sur F , on note $\bar{\partial}^*$ l'adjoint formel de $\bar{\partial}$ et :

$$\Delta'' = [\bar{\partial}, \bar{\partial}^*] = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

le laplacien anti-holomorphe (agissant sur les formes à valeurs dans F). Comme on ne considérera parfois que l'action sur les $(0, q)$ formes, on notera Δ''_q l'opérateur ainsi obtenu.

1 Schéma de la preuve

Soit $F \rightarrow X$ un fibré vectoriel holomorphe sur X variété complexe compacte de dimension complexe n . On considère de plus $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement galoisien de groupe Γ et on complète le diagramme en relevant F en \tilde{F} (relevé de F à \tilde{X}).

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{F}, \tilde{h}) & \longrightarrow & (F, h) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\tilde{X}, \tilde{\omega}) & \longrightarrow_{\pi} & (X, \omega) \end{array}$$

On munit X et F de métriques (que l'on notera ω et h) et on considère alors les métriques $\tilde{\omega}$ et \tilde{h} obtenues en relevant ω et h .

D'après la théorie de Hodge (cf [Dem97]), on sait que les formes harmoniques permettent de calculer la cohomologie (sur X à valeurs dans F); on s'intéresse donc aux espaces suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{p,q}^2(\tilde{X}, \tilde{F}) &= \{(p,q)\text{-formes harmoniques } L^2\} \\ &= \{u \in L^2(\tilde{X}, \Lambda^{p,q} T_{\tilde{X}}^* \otimes \tilde{F}) / \tilde{\Delta}'' u = 0\} \end{aligned}$$

L'action de Γ sur \tilde{X} (et donc sur \tilde{F}) permet de définir une dimension renormalisée prenant en compte la structure additionnelle de Γ -module pour des sous-espaces de formes L^2 ; cette Γ -dimension (§ 2.2) ayant la particularité d'être à valeurs réelles positives. La compacité de X entraîne que les espaces $\mathcal{H}_{p,q}^2(\tilde{X}, \tilde{F})$ sont de Γ -dimension finie (§ 2.2 et 4.1); on peut donc considérer une Γ -caractéristique d'Euler :

$$\chi_{\Gamma}^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{F}) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim_{\Gamma} \mathcal{H}_{0,q}^2(\tilde{X}, \tilde{F})$$

L'énoncé du théorème de l'indice L^2 [At76] consiste alors en l'égalité :

Théorème 1

$$\chi_{\Gamma}^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{F}) = \chi(X, F)$$

Remarque 1.1 *Comme il en a été fait mention ci-dessus, les nombres $\dim_{\Gamma} \mathcal{H}_{p,q}^2(\tilde{X}, \tilde{F})$ sont (a priori) des réels; il est donc remarquable de constater que leur somme alternée $\chi_{\Gamma}^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{F})$ est un entier.*

Remarque 1.2 *Le théorème ci-dessus peut devenir un résultat d'existence; en effet, si $\chi(X, F) \neq 0$, on en déduit immédiatement l'existence de formes L^2 (à valeurs dans \tilde{F}) sur le revêtement \tilde{X} .*

La démonstration que nous allons en donner repose sur la méthode de la chaleur : elle consiste à examiner les équations d'évolution associées aux opérateurs auto-adjoints positifs Δ'' sur X et $\tilde{\Delta}''$ sur \tilde{X} (§ 3.1) et plus particulièrement les noyaux des semi-groupes $e^{-t\Delta''}$ et $e^{-t\tilde{\Delta}''}$ (§ 3.2). En effet, ces opérateurs vérifient les propriétés suivantes (§ 4.2) :

$$\text{STr}(e^{-t\Delta''}) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{Tr}(e^{-t\Delta_q''}) = \text{cste (indépendante de } t)$$

$$\text{STr}_\Gamma(e^{-t\widetilde{\Delta}''}) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \text{Tr}_\Gamma(e^{-t\widetilde{\Delta}_q''}) = \text{cste}$$

(où Tr_Γ désigne la trace renormalisée). Or, lorsque $t \rightarrow \infty$, on montre que (§ 4.2):

$$\begin{aligned} e^{-t\Delta''} &\longrightarrow P_{\mathcal{H}} \\ (\text{resp. } e^{-t\widetilde{\Delta}''}) &\longrightarrow \widetilde{P}_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

où $P_{\mathcal{H}}$ désigne la projection sur l'espace des formes harmoniques (resp. $\widetilde{P}_{\mathcal{H}}$). L'idée sous-jacente est, bien sûr, que si u est un vecteur propre de Δ'' pour la valeur propre $\lambda \geq 0$, alors $e^{-t\Delta''}u = e^{-t\lambda}u$ et donc que $e^{-t\Delta''}u \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ si $\lambda > 0$ tandis que $e^{-t\Delta''}u = u$ si $\lambda = 0$.

On en déduit donc la (très importante) formule de McKean-Singer :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{STr}(e^{-t\Delta''}) = \text{STr}(P_{\mathcal{H}}) = \chi(X, F) \quad (1)$$

(la dernière égalité étant une conséquence de la théorie de Hodge) et son homologue sur \widetilde{X} :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{STr}_\Gamma(e^{-t\widetilde{\Delta}''}) = \text{STr}_\Gamma(\widetilde{P}_{\mathcal{H}}) = \chi_\Gamma^{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}) \quad (2)$$

Comme il a été mentionné ci-dessus, les opérateurs $e^{-t\Delta''}$ et $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$ sont des opérateurs à noyaux C^∞ (notés $k_t(x, y)$ et $\widetilde{k}_t(\widetilde{x}, \widetilde{y})$); les égalités (1) et (2) se réécrivent alors en :

$$\begin{aligned} \chi(X, F) &= \int_X \text{str}(k_t(x, x)) dx \\ \chi_\Gamma^{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}) &= \int_U \text{str}(\widetilde{k}_t(\widetilde{x}, \widetilde{x})) dx \end{aligned}$$

où U désigne un domaine fondamental (ouvert) pour l'action de Γ et où str désigne la trace alternée dans la fibre au dessus de x .

Dans l'équation de la chaleur, l'opérateur $e^{-t\Delta''}$ envoie, à la limite, une forme L^2 sur sa partie harmonique : quand $t \rightarrow \infty$, cet opérateur (en quelque sorte) détecte la cohomologie. On achève la démonstration en montrant que, quand $t \rightarrow 0$

$$\int_X \text{str}(k_t(x, x)) dx \sim \int_U \text{str}(\widetilde{k}_t(x, x)) dx$$

Or, il s'avère que ces noyaux admettent (au moins sur la diagonale de $X \times X$ et celle de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$) des développements asymptotiques de la forme :

$$k_t(x, x) \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi t)^n} (\theta_0(x) + \theta_1(x)t + \cdots + \theta_n(x)t^n + \cdots)$$

$$\tilde{k}_t(x, x) \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi t)^n} (\tilde{\theta}_0(x) + \tilde{\theta}_1(x)t + \cdots + \tilde{\theta}_n(x)t^n + \cdots)$$

En intégrant, on obtient :

$$\chi(X, F) \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi t)^n} (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots)$$

où $a_j = \int_X \text{str}(\theta_j(x)) dx$ et :

$$\chi_\Gamma^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{F}) \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(1\pi t)^n} (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 t + \cdots + \tilde{a}_n t^n + \cdots)$$

où $\tilde{a}_j = \int_U \text{str}(\tilde{\theta}_j(x)) dx$; et comme le membre de gauche est constant dans les deux cas, on obtient par identification :

$$\chi(X, F) = \frac{1}{(2\pi)^n} a_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_X \text{str}(\theta_n(x)) dx$$

et

$$\chi_\Gamma^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{F}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \tilde{a}_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_U \text{str}(\tilde{\theta}_n(x)) dx$$

Pour conclure il ne nous reste plus qu'à remarquer que les termes du développement ($\theta_j(x)$ et $\tilde{\theta}_j(x)$) sont des expressions algébriques locales en les coefficients des métriques ω et h et de leurs dérivées; comme les métriques considérées sur \tilde{X} et \tilde{F} vérifient: $\tilde{\omega} = \pi^* \omega$ et $\tilde{h} = \pi^* h$, on a nécessairement $\tilde{\theta}_n = \pi^* \theta_n$. U étant un domaine fondamental, on en déduit l'égalité (1).

2 Notion de Γ -dimension

Pour commencer, il nous faut donner un sens un peu plus précis à la notion de Γ -dimension. La discussion qui va suivre tient en particulier de [At76] et [Kol95]; on pourra également consulter [Pan91].

2.1 Cas de $l^2(\Gamma)$

Dans un premier temps, on va étudier la situation de l'espace modèle $l^2(\Gamma)$ (où Γ est un groupe dénombrable) et construire une dimension renormalisée prenant en compte la structure additionnelle de Γ -module. Pour cela, on considère la base hilbertienne canonique $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de $l^2(\Gamma)$ définie par :

$$e_\gamma(\gamma') = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = \gamma' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme Γ agit naturellement sur $l^2(\Gamma)$ par translation à gauche, on va considérer l'algèbre \mathcal{A} des opérateurs bornés sur $l^2(\Gamma)$ qui commutent avec l'action de Γ ; de tels opérateurs sont dits Γ -équivalents. Si $P \in \mathcal{A}$ et si P est représenté par les coefficients $(p_{g,h})_{(g,h) \in \Gamma}$, on a alors :

$$P(\gamma \cdot e_g) = P(e_{\gamma g}) = \sum_h p_{\gamma g, h} e_h$$

et d'autre part :

$$P(\gamma \cdot e_g) = \gamma \cdot P(e_g) = \gamma \cdot \left(\sum_h p_{g,h} e_h \right) = \sum_h p_{g,h} \gamma \cdot e_h = \sum_h p_{g,h} e_{\gamma h} = \sum_h p_{g, \gamma^{-1} h} e_h$$

On en déduit donc que les coefficients $p_{g,h}$ vérifient :

$$\forall g, h \in \Gamma, p_{g,h} = p_{1, g^{-1}h} = p(g^{-1}h)$$

avec $p : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Formellement, on aurait alors :

$$\text{Tr}(P) = \sum_\gamma p_{\gamma, \gamma} = \sum_\gamma p(1) = |\Gamma| p(1)$$

L'idée est donc de renormaliser la trace et de poser :

$$\text{Tr}_\Gamma(P) = p(1) = \langle P(e_1), e_1 \rangle$$

Si V est un sous-espace de $l^2(\Gamma)$ invariant par l'action de Γ et si P_V désigne le projecteur orthogonal sur \bar{V} , alors $P_V \in \mathcal{A}$ et on pose :

$$\dim_\Gamma(V) = \text{Tr}_\Gamma(P_V)$$

Dans la construction ci-dessus, il est artificiel de se référer à la base $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$; on peut donc adopter l'approche plus intrinsèque suivante. Une base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$ est dite Γ -invariante si Γ agit librement sur I et si $(e_i)_{i \in I}$ vérifie $\gamma \cdot e_i = e_{\gamma \cdot i}$. Pour $P \in \mathcal{A}$, on peut considérer :

$$\text{Tr}_\Gamma(P) = \sum_{i \in \Gamma \backslash I} \langle P(e_i), e_i \rangle$$

la sommation portant sur des représentants des orbites de l'action de Γ sur I . Pour un opérateur auto-adjoint positif, cette quantité ne dépend pas du choix de la base Γ -invariante et ceci s'applique entre autres aux opérateurs P_V .

On a donc défini, pour les sous-espaces invariants de $l^2(\Gamma)$, une dimension vérifiant :

- (i) $0 \leq \dim_\Gamma(V) \leq 1$
- (ii) Si $V = V_1 \oplus V_2$ (somme orthogonale) alors $\dim_\Gamma(V) = \dim_\Gamma(V_1) + \dim_\Gamma(V_2)$
- (iii) Si Γ' est un sous-groupe d'indice d de Γ , $\dim_{\Gamma'}(V) = d \dim_\Gamma(V)$
- (iv) $\dim_\Gamma(l^2(\Gamma)) = 1$

La propriété (iii) montre bien que la Γ -dimension est une renormalisation de la dimension usuelle. Si de plus $|\Gamma| < +\infty$, on a alors : $\dim_\Gamma(V) = \frac{\dim(V)}{|\Gamma|}$.

Pour mieux comprendre, étudions le cas de \mathbb{Z} ; les séries de Fourier fournissent l'isomorphisme : $l^2(\mathbb{Z}) \simeq L^2(\mathbb{S}^1)$ et l'action de \mathbb{Z} devient la multiplication par z^n . Si $U \subset \mathbb{S}^1$ est un borélien, on note V_U l'ensemble des fonctions de $l^2(\mathbb{S}^1)$ s'annulant sur U ; V_U est alors clairement invariant. La projection sur V_U étant la multiplication par χ_U (fonction caractéristique de U), on en déduit :

$$\dim_{\mathbb{Z}}(V_U) = \langle P_U(1), 1 \rangle = \langle \chi_U 1, 1 \rangle = m(U)$$

c'est à dire la mesure de Lebesgues de U . Elle prend donc bien des valeurs réelles arbitraires entre 0 et 1

2.2 Opérateurs à Γ -trace sur $L^2(\tilde{X})$

On va maintenant étendre cette étude au cas qui nous intéresse, à savoir celui des sous-espaces de L^2 sur \tilde{X} ; pour simplifier on va tout d'abord examiner le cas des fonctions, c'est à dire de $L^2(\tilde{X})$. Comme précédemment, on va noter \mathcal{A} l'algèbre des opérateurs Γ -équivariants. Dans toute la suite, U désignera un domaine fondamental pour l'action de Γ , c'est-à-dire un ouvert de \tilde{X} disjoint de tous ses translatés par Γ et vérifiant : $\tilde{X} \setminus (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U))$ est de mesure nulle. On dispose alors de l'isomorphisme :

$$L^2(\tilde{X}) \simeq l^2(\Gamma) \otimes L^2(U)$$

On considère donc la base $(e_\gamma \otimes f_j)_{\gamma \in \Gamma, j \in \mathbb{N}}$ où $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est la base canonique de $l^2(\Gamma)$ et $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$; c'est une base Γ -invariante pour : $\gamma \cdot e_{\gamma'} \otimes f_j = e_{\gamma\gamma'} \otimes f_j$ dont un système de représentants de chaque orbite est donné par $(e_1 \otimes f_j)_{j \in \mathbb{N}}$. En reproduisant la démarche faite pour $l^2(\Gamma)$, on définit la classe Γ -Hilbert-Schmidt comme suit : on dit que $T \in \mathcal{A}$ est Γ -Hilbert-Schmidt (Γ -HS) si il vérifie

$$\|T\|_{\Gamma\text{-HS}}^2 = \sum_{j \geq 0} \|T(e_1 \otimes f_j)\|^2 < +\infty$$

Comme pour les opérateurs de Hilbert-Schmidt, Γ -HS est un idéal bilatère auto-adjoint de $L^2(\tilde{X})$ et on a de plus :

$$\|T^*\|_{\Gamma\text{-HS}} = \|T\|_{\Gamma\text{-HS}}$$

Par polarité, on définit un produit scalaire sur Γ -HS. Comme dans le cas usuel, on définit les opérateurs de classe Γ -trace comme étant les produits de 2 opérateurs Γ -HS. Si $T = AB$ est de classe Γ -trace (avec $A, B \in \Gamma$ -HS), on pose :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\Gamma(T) &= \langle B, A^* \rangle_{\Gamma\text{-HS}} \\ &= \sum_{j \geq 0} \langle B(e_1 \otimes f_j), A^*(e_1 \otimes f_j) \rangle \\ &= \sum_{j \geq 0} \langle T(e_1 \otimes f_j), e_1 \otimes f_j \rangle \end{aligned}$$

Cette quantité est donc bien indépendante de l'écriture $T = AB$. Pour les opérateurs auto-adjoints positifs (ce que seront $e^{-t\tilde{\Delta}'}$ et $\tilde{P}_\mathcal{H}$), on dispose de la caractérisation :

Proposition 2.1 *Si $T \in \mathcal{A}$ est auto-adjoint positif, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. T est de classe Γ -trace
2. $\left(\sum_{j \geq 0} \langle T(e_1 \otimes f_j), e_1 \otimes f_j \rangle \right) < +\infty$
3. $T^{1/2}$ est Γ -HS

Ceci nous amène alors à la définition suivante :

Définition 2.1 *Soit V est un sous-espace Γ -invariant de $L^2(\tilde{X})$; si P_V , le projecteur orthogonal sur \bar{V} , est de classe Γ -trace, on dit que V est de Γ -dimension finie et on pose :*

$$\dim_\Gamma(V) = \text{Tr}_\Gamma(P_V)$$

Finissons avec quelques propriétés vérifiées par la Γ -trace :

Propriété 2.2

Si $T \in \mathcal{A}$ et si S est de Γ -classe trace, on a :

$$\mathrm{Tr}_\Gamma(ST) = \mathrm{Tr}_\Gamma(TS)$$

Démonstration :

Suivant [At76], il suffit de le vérifier pour S auto-adjoint positif et pour T unitaire. En remarquant que, dans ce cas, $S^{1/2}$ est Γ -HS (proposition 2.1), il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_\Gamma(TST^{-1}) &= \mathrm{Tr}_\Gamma(TST^*) \\ &= \mathrm{Tr}_\Gamma((TS^{1/2})(TS^{1/2})^*) \\ &= \left\| (TS^{1/2})^* \right\|_{\Gamma\text{-HS}}^2 \\ &= \left\| TS^{1/2} \right\|_{\Gamma\text{-HS}}^2 \\ &= \mathrm{Tr}_\Gamma((TS^{1/2})^*(TS^{1/2})) \\ &= \mathrm{Tr}_\Gamma(S) \end{aligned}$$

□

Propriété 2.3

Si S est de classe Γ -trace et si $(T_\nu)_{\nu \geq 0} \in \mathcal{A}$ converge faiblement vers $T \in \mathcal{A}$ (c'est-à-dire $\forall f \in L^2(\tilde{X})$, $T_\nu(f) \rightarrow_{\nu \rightarrow +\infty} T(f)$), alors :

$$\mathrm{Tr}_\Gamma(ST_\nu) \rightarrow_{\nu \rightarrow +\infty} \mathrm{Tr}_\Gamma(ST)$$

Démonstration :

En écrivant $S = AB$ avec A et B Γ -HS, on a :

$$\mathrm{Tr}_\Gamma(ST_\nu) = \sum_{j \geq 0} \langle BT_\nu(e_1 \otimes f_j), A^*(e_1 \otimes f_j) \rangle$$

Or, comme $(T_\nu)_{\nu \geq 0}$ converge faiblement vers T , chaque terme de la somme converge vers $\langle BT(e_1 \otimes f_j), A^*(e_1 \otimes f_j) \rangle$. De plus, l'hypothèse de convergence faible nous permet d'obtenir une borne uniforme $\|T_\nu\| \leq C$ et donc :

$$\|BT_\nu\|_{\Gamma\text{-HS}} = \|T_\nu^* B^*\|_{\Gamma\text{-HS}} \leq C \|B\|_{\Gamma\text{-HS}}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq N} |\langle BT_\nu(e_1 \otimes f_j), A^*(e_1 \otimes f_j) \rangle| &\leq \sum_{j \geq N} \|BT_\nu(e_1 \otimes f_j)\| \|A^*(e_1 \otimes f_j)\| \\ &\leq \left(\sum_{j \geq N} \|BT_\nu(e_1 \otimes f_j)\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j \geq N} \|A^*(e_1 \otimes f_j)\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \|B\|_{\Gamma\text{-HS}} \left(\sum_{j \geq N} \|A^*(e_1 \otimes f_j)\|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et A^* étant Γ -HS, la dernière somme tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$; la majoration étant uniforme en ν , on a bien le résultat attendu.

□

Signalons enfin le cas des opérateurs à noyaux. Un opérateur T sur $L^2(\tilde{X})$ est dit à noyau si il existe $k : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall f \in L^2(\tilde{X}), \forall x \in \tilde{X}, (Tf)(x) = \int_{\tilde{X}} k(x, y) f(y) dx$$

Proposition 2.4 *Soit $T \in \mathcal{A}$ un opérateur auto-adjoint positif représenté par un noyau $C^\infty k(x, y)$. Alors T est de classe Γ -trace et on dispose de la formule :*

$$\mathrm{Tr}_\Gamma(T) = \int_U k(x, x) dx$$

Démonstration :

Remarquons tout d'abord que, T étant Γ -équivariant, son noyau vérifie nécessairement :

$$k(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = k(x, y)$$

et l'intégrale ci-dessus ne dépend donc pas du choix de U . Si χ_U désigne la fonction caractéristique de U , l'opérateur $\chi_U T \chi_U : L^2(U) \rightarrow L^2(U)$ est alors donné par le noyau $C^\infty k|_{U \times U}$. Comme \bar{U} est compact, on en déduit qu'il est à trace. L'opérateur T étant auto-adjoint positif, il suffit de vérifier que la somme définissant la Γ -trace converge pour montrer qu'il est de classe Γ -trace ; or :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_\Gamma(T) &= \sum_{j \geq 0} \langle T(e_1 \otimes f_j), e_1 \otimes f_j \rangle \\ &= \sum_{j \geq 0} \langle T(\chi_U f_j), \chi_U f_j \rangle \\ &= \sum_{j \geq 0} \langle (\chi_U T \chi_U)(f_j), f_j \rangle \\ &= \mathrm{Tr}(\chi_U T \chi_U) \\ &= \int_U k(x, x) dx \end{aligned}$$

□

Nous n'avons considéré, dans un souci de clarté, que le cas d'opérateurs sur $L^2(\tilde{X})$; or, dans la situation qui nous intéresse, il s'agit d'opérateurs sur des formes L^2 à valeurs dans \tilde{F} . La discussion menée ci-dessus s'applique bien entendu à ce cadre (le fibré (\tilde{F}, \tilde{h}) étant équivariant). La seule modification à apporter concerne la proposition (2.4) : le noyau étant à valeur dans les homomorphismes, il faut remplacer $k(x, x)$ par $\mathrm{tr}(k(x, x))$ dans la formule donnant la Γ -trace.

3 Equation de la chaleur

On va maintenant développer les méthodes de la chaleur à proprement parler. Elles résultent de l'étude approfondie de l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta'')u & = 0 \\ u|_{t=0} & = u_0 \end{cases}$$

où u_0 est la donnée initiale ($u_0 \in L^2$). Comme pour l'équation usuelle sur l'espace euclidien \mathbb{R}^N , on va montrer que la solution s'exprime via la donnée initiale grâce à un noyau ; en effet, sur \mathbb{R}^N , on obtient la solution de l'équation de la chaleur en effectuant la convolution de u_0 avec le noyau $\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/4t}$. On verra également que ce noyau admet, dans le cas général, un développement asymptotique quand $t \rightarrow 0$, dont le premier terme n'est autre que le noyau ci-dessus .

3.1 Caractère auto-adjoint de Δ'' et $\widetilde{\Delta}''$

Sur la variété X , qui est compacte, l'utilisation des espaces de Sobolev et des estimées elliptiques facilitent l'analyse de l'opérateur Δ'' . Malheureusement, si $|\Gamma| = +\infty$, \widetilde{X} n'est plus compacte ; cependant, elle reste complète et c'est la complétude de \widetilde{X} qui va, entre autre, assurer le fait que l'opérateur $\widetilde{\Delta}''$ reste auto-adjoint comme opérateur non-borné sur $L^2_{0,\bullet}(\widetilde{X}, \widetilde{F})$.

En effet, on peut considérer l'extension L^2 de $\widetilde{\Delta}''$ (encore notée $\widetilde{\Delta}''$), c'est à dire l'opérateur non-borné de $L^2_{0,\bullet}(\widetilde{X}, \widetilde{F})$ dont le domaine est défini comme suit : si $u \in L^2$, on calcule $\widetilde{\Delta}''u$ au sens des distributions et on dit que u est dans le domaine de $\widetilde{\Delta}''$ si $\widetilde{\Delta}''u \in L^2$. On notera $\text{Dom}(\widetilde{\Delta}'')$ le domaine de cet opérateur. Il est à noter que $\widetilde{\Delta}''$ est à domaine dense car ce dernier contient $\mathcal{D}_{0,\bullet}(\widetilde{X}, \widetilde{F})$. Il nous reste à montrer que cet opérateur est auto-adjoint au sens de Von Neumann.

Pour ce faire, il suffit de montrer l'égalité suivante, dans laquelle $\bar{\delta}$ désigne l'extension L^2 de $\bar{\delta}^*$:

$$\forall u \in \text{Dom}(\widetilde{\Delta}''), \langle u, \widetilde{\Delta}''u \rangle = \langle \bar{\delta}u, \bar{\delta}u \rangle + \langle \bar{\delta}u, \bar{\delta}u \rangle \quad (3)$$

En effet, une fois (3) démontrée, on aura par polarité :

$$\forall u, v \in \text{Dom}(\widetilde{\Delta}''), \langle u, \widetilde{\Delta}''v \rangle = \langle \bar{\delta}u, \bar{\delta}v \rangle + \langle \bar{\delta}u, \bar{\delta}v \rangle$$

L'opérateur $\widetilde{\Delta}''$ est donc symétrique. Si $v \in \text{Dom}((\widetilde{\Delta}'')^*)$, cela signifie qu'il existe $w \in L^2$ vérifiant :

$$\forall u \in \text{Dom}(\widetilde{\Delta}''), \langle \widetilde{\Delta}''u, v \rangle = \langle u, w \rangle$$

On en déduit alors que $\widetilde{\Delta}''v = w$ au sens des distributions. On a donc $\widetilde{\Delta}''v \in L^2$, c'est-à-dire $\text{Dom}((\widetilde{\Delta}'')^*) = \text{Dom}(\widetilde{\Delta}'')$, ceci signifiant exactement que $\widetilde{\Delta}''$ est auto-adjoint.

On peut remarquer ici que l'appartenance au domaine de $\widetilde{\Delta}''$ n'assure pas, *a priori*, l'appartenance à celui de $\bar{\partial}$ ou de $\bar{\delta}$ et donc, rien ne justifie que (3) ait un sens ; c'est pourtant ce que nous allons constater au cours de la démonstration.

Proposition 3.1 *L'opérateur $\widetilde{\Delta}''$ vérifie l'identité habituelle :*

$$\forall u \in \text{Dom}(\widetilde{\Delta}''), \langle u, \widetilde{\Delta}'' u \rangle = \langle \bar{\partial} u, \bar{\partial} u \rangle + \langle \bar{\delta} u, \bar{\delta} u \rangle$$

Démonstration :

la complétude de \widetilde{X} entraîne l'existence d'une exhaustion de \widetilde{X} par des compacts $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ et de fonctions $(\psi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset C^\infty$ à support compact vérifiant :

(i) $\psi_\nu \equiv 1$ sur un voisinage de K_ν

(ii) $\text{Supp}(\psi_\nu) \subset K_{\nu+1}$

(iii) $0 \leq \psi_\nu \leq 1$ et $|\bar{\partial}\psi_\nu| \leq \frac{1}{2^\nu}$

(ceci constituant une partie du lemme de Hopf-Rinow pour les variétés complètes).

Or, en utilisant ces fonctions et un argument de densité, on a :

$$\forall u \in \text{Dom}(\bar{\partial}), \forall v \in \text{Dom}(\bar{\delta}), \langle \bar{\partial} u, v \rangle = \langle u, \bar{\delta} v \rangle$$

ou encore :

$$(\bar{\partial})^* = \bar{\delta} \quad \text{et} \quad \bar{\delta}^* = \bar{\partial} \quad (\text{au sens de Von Neumann})$$

Soit alors $u \in \text{Dom}(\widetilde{\Delta}'')$; $\widetilde{\Delta}''$ étant elliptique d'ordre 2, on en déduit, d'après les estimées de Sobolev locales, que $u \in W_{loc}^2$ et donc que $\bar{\partial} u \in L_{loc}^2$ et $\bar{\delta} u \in L_{loc}^2$. En se ramenant à des compacts, on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \|\psi_\nu \bar{\partial} u\|^2 + \|\psi_\nu \bar{\delta} u\|^2 &= \langle \psi_\nu^2 \bar{\partial} u, \bar{\partial} u \rangle + \langle \bar{\delta} u, \psi_\nu^2 \bar{\delta} u \rangle \\ &= \langle \bar{\partial}(\psi_\nu^2 u), \bar{\partial} u \rangle - 2 \langle \psi_\nu \bar{\partial} \psi_\nu \wedge u, \bar{\partial} u \rangle + \langle u, \bar{\partial}(\psi_\nu^2 \bar{\delta} u) \rangle \\ &= \langle \psi_\nu^2 u, \bar{\partial} \bar{\partial} u \rangle + \langle u, \psi_\nu^2 \bar{\partial} \bar{\delta} u \rangle - 2 \langle \bar{\partial} \psi_\nu \wedge u, \psi_\nu \bar{\partial} u \rangle + 2 \langle u, \psi_\nu \bar{\partial} \psi_\nu \wedge \bar{\delta} u \rangle \\ &= \langle \psi_\nu^2 u, \widetilde{\Delta}'' u \rangle - 2 \langle \bar{\partial} \psi_\nu \wedge u, \psi_\nu \bar{\partial} u \rangle + 2 \langle u, \bar{\partial} \psi_\nu \wedge (\psi_\nu \bar{\delta} u) \rangle \\ &\leq \langle \psi_\nu^2 u, \widetilde{\Delta}'' u \rangle + 2^{-\nu} (2 \|\psi_\nu \bar{\partial} u\| \|u\| + 2 \|\psi_\nu \bar{\delta} u\| \|u\|) \\ &\leq \langle \psi_\nu^2 u, \widetilde{\Delta}'' u \rangle + 2^{-\nu} (\|\psi_\nu \bar{\partial} u\|^2 + \|\psi_\nu \bar{\delta} u\|^2 + 2 \|u\|^2) \end{aligned}$$

et finalement, on a :

$$\|\psi_\nu \bar{\partial} u\|^2 + \|\psi_\nu \bar{\delta} u\|^2 \leq \frac{1}{1 - 2^{-\nu}} (\langle \psi_\nu^2 u, \widetilde{\Delta}'' u \rangle + 2^{1-\nu} \|u\|^2)$$

Ceci prouve que $\bar{\partial} u \in L^2$ et $\bar{\delta} u \in L^2$ et on retrouve bien : $\text{Dom}(\widetilde{\Delta}'') \subset \text{Dom}(\bar{\partial}) \cap \text{Dom}(\bar{\delta})$; en passant à la limite dans la quatrième égalité, on retrouve (3).

□

Remarque 3.1 *il va sans dire que Δ'' est lui aussi auto-adjoint sur $L_{0,\bullet}^2(X, F)$*

3.2 Noyaux des opérateurs $e^{-t\Delta''}$ et $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$

On va maintenant utiliser le fait que Δ'' et $\widetilde{\Delta}''$ sont auto-adjoints pour montrer qu'on peut les représenter par un noyau C^∞ (on le fait pour $\widetilde{\Delta}''$). Mais avant, il nous faut faire les remarques suivantes :

- (i) Tout d'abord, $\widetilde{\Delta}''$ est monotone : $\forall u \in \text{Dom}(\widetilde{\Delta}'')$, $\langle u, \widetilde{\Delta}''u \rangle \geq 0$
- (ii) De plus, $\widetilde{\Delta}''$ est maximal, c'est-à-dire $\text{Id} + \widetilde{\Delta}'' : \text{Dom}(\widetilde{\Delta}'') \rightarrow L^2$ est surjectif. En effet, comme $\text{Dom}(\widetilde{\Delta}'') \subset \text{Dom}(\bar{\partial}) \cap \text{Dom}(\bar{\delta})$, on peut considérer sur $\text{Dom}(\widetilde{\Delta}'')$ le produit scalaire

$$(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle + \langle \bar{\partial}u, \bar{\partial}v \rangle + \langle \bar{\delta}u, \bar{\delta}v \rangle$$

Soit $f \in L^2$. On applique alors le théorème de Riesz à la forme linéaire

$$v \rightarrow \langle v, f \rangle$$

définie sur H le complété de $\text{Dom}(\widetilde{\Delta}'')$ pour la nouvelle norme hilbertienne ($H \subset L^2$); elle se représente donc par $u \in H$:

$$\forall v \in \text{Dom}(\widetilde{\Delta}''), \langle v, f \rangle = \langle v, u \rangle + \langle \bar{\partial}v, \bar{\partial}u \rangle + \langle \bar{\delta}v, \bar{\delta}u \rangle$$

D'où : $u + \widetilde{\Delta}''u = f$ au sens des distributions et donc $u \in \text{Dom}(\widetilde{\Delta}'')$.

$\widetilde{\Delta}''$ est donc un opérateur maximal, monotone et auto-adjoint sur $L^2_{0,\bullet}(\tilde{X}, \tilde{F})$. Le théorème de Hille-Yosida (voir [Bre]) nous permet d'affirmer que, pour $u_0 \in L^2$, l'équation :

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \Delta'')u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

a une unique solution $u_t = e^{-t\Delta''}u_0$ vérifiant (pour tout $k \in \mathbb{N}$) :

$$u_t \in C(\mathbb{R}_+, L^2) \cap C^\infty(\mathbb{R}_+^*, \text{Dom}(\widetilde{\Delta}''^k))$$

Proposition 3.2 *Pour tout $t > 0$, l'opérateur $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$ a un noyau C^∞ $\tilde{k}_t(x, y)$:*

$$\forall u \in L^2, \forall x \in \tilde{X}, (e^{-t\widetilde{\Delta}''}u)(x) = \int_{\tilde{X}} \tilde{k}_t(x, y)u(y)dy$$

Démonstration :

Pour simplifier la démonstration, supposons que le fibré \tilde{F} soit trivial et que l'on ne considère que le degré 0 (on ne regarde l'action de $\widetilde{\Delta}''$ que sur les fonctions). D'après les estimées elliptiques non-compactes (voir l'annexe § 5.2), u_t est donc C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \tilde{X}$ et à $t > 0$ fixé, $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$ envoie L^2 dans CB^m (pour tout m). Si on fixe $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \tilde{X}$, l'application $u \rightarrow (e^{-t\widetilde{\Delta}''}u)(x)$ est une forme linéaire sur L^2 ; il existe donc $v(t, x) \in L^2$ tel que :

$$\forall u \in L^2, (e^{-t\widetilde{\Delta}''} u)(x) = \langle u, v(t, x) \rangle$$

En posant $\widetilde{k}_t(x, y) = \langle v(t/2, x), v(t/2, y) \rangle$, on vérifie alors que :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \widetilde{X}, \forall u \in L^2, (e^{-t\widetilde{\Delta}''} u)(x) = \int_{\widetilde{X}} \widetilde{k}_t(x, y) u(y) dy$$

Pour finir, il nous reste à montrer que $\widetilde{k}_t(x, y)$ est C^∞ en (t, x, y) . Or, $v(t, x)$ vérifie : $\forall u \in L^2, \langle u, v(t, x) \rangle$ est C^∞ en (t, x) . Une utilisation habile du théorème de Banach-Steinhaus (voir [Dav80] p.26) nous permet d'affirmer que $v(t, x)$ est C^∞ et donc que $\widetilde{k}_t(x, y)$ l'est.

Dans le cas d'un fibré non-trivial, on peut effectuer la construction du noyau en utilisant un recouvrement trivialisant du fibré et un argument de partition de l'unité ; on a alors :

$$\widetilde{k}_t(x, y) \in \text{Hom}(\Lambda^{0, \bullet} T_{\widetilde{X}, y}^* \otimes \widetilde{F}_y, \Lambda^{0, \bullet} T_{\widetilde{X}, x}^* \otimes \widetilde{F}_x)$$

c'est à dire :

$$\widetilde{k}_t \in C^\infty(\widetilde{X} \times \widetilde{X}, \text{Hom}(\text{pr}_2^*(\Lambda^{0, \bullet} T_{\widetilde{X}}^* \otimes \widetilde{F}), \text{pr}_1^*(\Lambda^{0, \bullet} T_{\widetilde{X}}^* \otimes \widetilde{F})))$$

□

Il est à noter ici que, dans le cas compact, on dispose d'une formule explicite pour construire le noyau k_t ; en effet, le théorème de Rellich nous permet alors de construire $G : L^2 \rightarrow L^2$ un pseudo-inverse (borné) auto-adjoint compact du Δ'' . On sait que l'on peut diagonaliser G dans une base de vecteurs propres $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pour les valeurs propres $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$. En posant $\lambda_k = 1/\mu_k$, on a ainsi diagonalisé l'opérateur Δ'' en base orthonormée encore notée $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec de plus $\phi_k \in C^\infty$ par ellipticité de Δ'' . On pose alors :

$$k_t(x, y) = \sum_{k \geq 0} e^{-t\lambda_k} \phi_k(x) \otimes \phi_k^*(y)$$

Une estimation de la croissance des λ_k nous assure que la série converge en topologie C^∞ et comme $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormée de L^2 , il est alors quasiment immédiat de vérifier que k_t convient. On pourra consulter [Gil84] pour un développement plus précis de cette méthode.

3.3 Développements asymptotiques

On se propose ici de montrer l'existence de développements asymptotiques pour les noyaux k_t et \tilde{k}_t en supposant que la métrique ω (et donc aussi $\tilde{\omega}$) soit kählerienne. Dans la cas kählerien, on a en effet l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano (voir [Dem97]) :

$$\Delta'' = \frac{1}{2}\Delta - \frac{i}{2}[\Theta_h(F), \Lambda]$$

Dans cette égalité, Δ désigne le laplacien riemannien, $\Theta_h(F)$ la courbure de Chern du fibré (F, h) et Λ l'adjoint formel de la multiplication par ω . On réécrit cette identité en :

$$\Delta'' = \frac{1}{2}\Delta + T_{\omega, h}$$

($T_{\omega, h}$ est donc un opérateur d'ordre 0, c'est-à-dire un endomorphisme). Pour les fonctions, on a en particulier :

$$\Delta'' = \frac{1}{2}\Delta$$

L'idée est de comparer le noyau k_t au noyau de l'espace euclidien $(x, y) \rightarrow \frac{1}{(2\pi t)^n} e^{-|x-y|^2/2t}$; on cherche donc un développement sous la forme :

$$k_t(x, y) \sim f(x, y) \sum_{j \geq 0} u_j(x, y) t^j$$

où on a posé $f(x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^n} e^{-d(x, y)^2/2t}$ (d désigne la distance riemannienne). Pour déterminer les coefficients u_j , on reporte ce développement dans l'équation de la chaleur en vue d'obtenir un système différentiel les reliant. On renvoie à [Roe98] pour le détail des calculs.

Comme on cherche un développement asymptotique quand $t \rightarrow 0$, la présence de la fonction f en facteur de la somme nous permet de nous limiter au cas où x est proche de y . On fixe donc $y \in X$ et on se donne des coordonnées normales au voisinage de y ; la fonction $f(x, y)$ devient : $f(x) = \frac{1}{(2\pi t)^n} e^{-r^2/2t}$.

Proposition 3.3 *La fonction f vérifie :*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta''\right)f = \frac{rf}{4gt} \frac{\partial g}{\partial r}$$

où g est le déterminant de la métrique riemannienne déduite de ω .

Démonstration :

Comme $f = \frac{1}{(2\pi t)^n} e^{-r^2/2t}$, on a donc : $df = -\frac{r}{t(2\pi t)^n} e^{-r^2/2t} dr$ et comme on a choisi des coordonnées géodésiques, il en résulte : $\nabla f = -\frac{f}{t} r \frac{\partial}{\partial r}$. Comme $\Delta'' f = \frac{1}{2}\Delta f = \frac{1}{2}\nabla^* \nabla f$, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta'' f &= -\frac{f}{2t} \nabla^* \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{r}{2t} \frac{\partial f}{\partial r} \\ &= -\frac{f}{2t} \left(-2n - \frac{r}{2g} \frac{\partial g}{\partial r}\right) - \frac{r^2}{2t^2} f \\ &= \left(\frac{n}{t} + \frac{r}{4gt} - \frac{r^2}{2t^2}\right) f \end{aligned}$$

et comme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(-\frac{n}{t} + \frac{r^2}{2t^2}\right)f$$

on a bien :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta''\right)f = \frac{rf}{4gt} \frac{\partial g}{\partial r}$$

□

On reporte ensuite le développement $k_t \sim f(x) \sum_{j \geq 0} u_j(x) t^j$ dans l'équation de la chaleur ; pour cela on utilise l'identité :

$$\Delta''(fu) = (\Delta''f)u - \nabla_{\nabla f} u + f(\Delta''u)$$

valable pour f une fonction et u une forme à valeurs F . Formellement, on a alors :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta''\right)\left(f \sum_{j \geq 0} u_j t^j\right) = 0$$

En développant les différents termes à l'aide de l'identité ci-dessus et en identifiant les coefficients des puissances de t , on obtient le système :

$$\nabla_{r \frac{\partial}{\partial r}} u_j + \left(j + \frac{r}{4g} \frac{\partial g}{\partial r}\right) u_j = -\Delta'' u_{j-1} \quad (j = 0, 1, \dots)$$

En introduisant le facteur $g^{1/4}$, on peut réécrire ce système en :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} (r^j g^{1/4} u_j) = \begin{cases} 0 & (j = 0) \\ -r^{j-1} g^{1/4} \Delta'' u_{j-1} & (j \geq 1) \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on fait la remarque suivante : quand $t \rightarrow 0$ la somme $f(x, y) \sum_{j \geq 0} u_j(x, y) t^j$ doit se comporter comme le noyau k_t ; en particulier, au voisinage de la diagonale ($x = y$), cette somme doit donc tendre vers la masse de Dirac en x . Ceci nous force à choisir $u_0(0) = 1$ (l'identité sur la fibre au dessus de x). De plus, pour $j \geq 1$, le système précédent permet de déterminer $r^j g^{1/4} u_j$ en fonction de u_{j-1} à une constante additive près ; comme on veut que u_j soit C^∞ en 0, cette constante doit forcément être nulle. On peut également montrer que le développement ainsi calculé est effectivement asymptotique au noyau k_t quand $t \rightarrow 0$; ceci repose sur des estimations précises des normes des solutions de l'équation de la chaleur avec second membre. On pourra consulter [Roe98] pour les détails.

Si on note $\theta_j(x) = u_j(x, x)$, on donc un développement du type :

$$k_t(x, x) \sim \frac{1}{(2\pi t)^n} \sum_{j \geq 0} \theta_j(x) t^j$$

or, avec les notations ci-dessus, on a : $\theta_j(x) = u_j(0)$ (en coordonnées normales au voisinage de tout point x). En remarquant alors que les coefficients du système ci-dessus sont des expressions algébriques en les coefficients des métriques ω et h ainsi que de leurs dérivées et en procédant par récurrence sur j , on constate

que les $\theta_j(x)$ sont des expressions algébriques locales en les coefficients de ω et h (et de leurs dérivées). On a donc montré :

Proposition 3.4 *Sur la diagonale, le noyau k_t admet un développement asymptotique uniforme en x :*

$$k_t(x, x) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi t)^n} \sum_{j \geq 0} \theta_j(x) t^j$$

avec $\theta_j \in C^\infty(X, \text{End}(\Lambda^{0, \bullet} T_X^* \otimes F))$ que l'on peut calculer localement comme des expressions algébriques en les coefficients de ω , h et de leurs dérivées.

Pour finir, remarquons que la construction ci-dessus est purement locale ; seul le fait que le développement soit effectivement asymptotique nécessite des estimations en norme. Or, on dispose également d'estimées elliptiques non-compactes sur \tilde{X} remplaçant les estimées classiques sur la variété compacte X . Finalement, la situation sur \tilde{X} est similaire à celle sur X :

Proposition 3.5 *Sur la diagonale de $\tilde{X} \times \tilde{X}$, le noyau \tilde{k}_t admet un développement asymptotique uniforme en x :*

$$\tilde{k}_t(x, x) \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi t)^n} \sum_{j \geq 0} \tilde{\theta}_j(x) t^j$$

avec $\tilde{\theta}_j \in C^\infty(\tilde{X}, \text{End}(\Lambda^{0, \bullet} T_{\tilde{X}}^* \otimes \tilde{F}))$ que l'on peut calculer localement comme des expressions algébriques en les coefficients de $\tilde{\omega}$, \tilde{h} et de leurs dérivées.

Nota :

L'hypothèse Kähler est bien entendu inutile : d'après [At76], le théorème de l'indice L^2 reste vrai si la variété X n'est pas kählérienne. Cependant, dans le cas général, l'identité de Bochner-Kodaira-Nakano n'est plus valable et la différence entre Δ'' et $\frac{1}{2}\Delta$ est alors un opérateur différentiel d'ordre 1 qui est une expression compliquée dépendant de $\partial\omega$ et $\bar{\partial}\omega$ (voir [Dem97]). Le calcul direct qui consiste à injecter le développement $k_t(x, y) \sim f(x, y) \sum_{j \geq 0} u_j(x, y) t^j$ dans l'équation de la chaleur semble donc impossible. Néanmoins, il est probable qu'une autre méthode s'adapte au cas non-compact ; en effet, le calcul pseudo-différentiel holomorphe permet d'établir la validité du développement en utilisant seulement l'ellipticité de l'opérateur Δ'' . Les coefficients du développement s'obtiennent alors à partir du symbole de Δ'' qui ne dépend que de des métriques ω et h .

En ce qui concerne le calcul pseudo-différentiel holomorphe sur les variétés compactes, on se référera à [Gil84]

4 Formules de McKean-Singer et conclusion

Avant de conclure, il ne nous reste plus qu'à démontrer les formules (1) et (2). On sera amené à utiliser le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints non bornés ; pour plus de précisions se reporter à l'annexe (§ 5.1) ou à [Dav95].

4.1 Préliminaires

Rappelons tout d'abord rapidement pourquoi les opérateurs $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$ et $\widetilde{P}_{\mathcal{H}}$ sont à Γ -trace.

Les résultats de la section précédente nous montrent que $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$ est un opérateur auto-adjoint positif donné par un noyau C^∞ ; d'après la proposition (2.4), on en déduit qu'il est à Γ -trace et cette dernière est donnée par la formule :

$$\text{STr}_\Gamma(e^{-t\widetilde{\Delta}''}) = \int_U \text{str}(\widetilde{k}_t(x, x)) dx$$

En ce qui concerne $\widetilde{P}_{\mathcal{H}}$, l'argument est assez similaire. Les estimées elliptiques non-compactes nous montrent en effet que les formes harmoniques L^2 sont C^∞ (en fait CB^m pour tout m) et on peut reprendre la discussion menée sur $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$. L'opérateur $\widetilde{P}_{\mathcal{H}}$ est donc donné par un noyau C^∞ que l'on notera $\widetilde{p}(x, y)$; la proposition (2.4) s'applique à nouveau pour affirmer que $\widetilde{P}_{\mathcal{H}}$ est à Γ -trace et que l'on a :

$$\text{STr}_\Gamma(\widetilde{P}_{\mathcal{H}}) = \int_U \text{str}(\widetilde{p}(x, x)) dx$$

Bien que nous ne l'utilisions pas, signalons le fait suivant qui exprime le lien entre les noyaux $\widetilde{p}(x, y)$ et $\widetilde{k}_t(x, y)$; comme on peut s'y attendre, on a :

$$\widetilde{k}_t(x, y) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \widetilde{p}(x, y)$$

avec convergence en topologie C^∞ , c'est à dire convergence uniforme sur tout compact de $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ de $\widetilde{k}_t(x, y)$ ainsi que de toutes ses dérivées. Ceci est bien entendu valable sur X ; on s'en convainc en fait très facilement au vue de la formule explicite pour le noyau $\widetilde{k}_t(x, y)$. On pourra consulter [Roe98] pour une démonstration de ce fait.

4.2 Formules de trace

On vient de voir que l'opérateur Δ'' est un opérateur régularisant (à noyau C^∞) donc il est à trace. Si on ne considère que son action sur les $(0, q)$ formes, on a :

$$\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta''}) = \int_X \mathrm{tr}(k_t^q(x, x)) dx$$

Dans cette égalité, k_t^q désigne le noyau associé à Δ'' et comme $k_t^q(x, x) \in \mathrm{End}(\Lambda^{0,q}T_{X,x}^* \otimes F_x)$, on peut bien en prendre la trace dans la fibre au-dessus de x . Comme le fibré $\Lambda^{0,\bullet}T_X^* \otimes F$ porte une graduation naturelle, on considère donc la trace graduée (ou alternée) :

$$\begin{aligned} \mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta''}) \\ &= \sum_{q=0}^n (-1)^q \int_X \mathrm{tr}(k_t^q(x, x)) dx \\ &= \int_X \mathrm{str}(k_t(x, x)) dx \end{aligned}$$

Ceci nous montre que $\mathrm{STr}(e^{-t\Delta''})$ est C^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Or, l'opérateur $\Delta'' e^{-t\Delta''}$ est bien défini et la discussion de la section précédente nous montre qu'on peut encore le représenter par un noyau C^∞ ; il est donc encore de classe trace. D'après le théorème spectral, on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dt} \mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) = -\mathrm{STr}(\Delta'' e^{-t\Delta''})$$

et on va montrer que cette dernière quantité est nulle. Pour cela, on développe :

$$\mathrm{STr}(\Delta'' e^{-t\Delta''}) = \sum_{q=0}^n (-1)^q (\mathrm{Tr}(\bar{\partial}\bar{\partial}^* e^{-t\Delta''}) + \mathrm{Tr}(\bar{\partial}^*\bar{\partial} e^{-t\Delta''}))$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\bar{\partial}^*\bar{\partial} e^{-t\Delta''}) &= \mathrm{Tr}(\bar{\partial}^*\bar{\partial} e^{-t/2\Delta''} e^{-t/2\Delta''}) \\ &= \mathrm{Tr}(\bar{\partial}^* e^{-t/2\Delta''} \bar{\partial} e^{-t/2\Delta''}) \quad (\text{car } \bar{\partial} \text{ commute avec } \Delta'') \\ &= \mathrm{Tr}(\bar{\partial} e^{-t/2\Delta''} \bar{\partial}^* e^{-t/2\Delta''}) \quad (\text{propriété de la trace}) \\ &= \mathrm{Tr}(\bar{\partial}\bar{\partial}^* e^{-t/2\Delta''} e^{-t/2\Delta''}) \quad (\text{propriété de commutation}) \\ &= \mathrm{Tr}(\bar{\partial}\bar{\partial}^* e^{-t\Delta''}) \end{aligned}$$

Dans la somme, les termes se télescopent donc deux à deux et finalement, on a bien :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dt} \mathrm{STr}(e^{-t\Delta''}) = -\mathrm{STr}(\Delta'' e^{-t\Delta''}) = 0$$

d'où :

$$\text{STr}(e^{-t\Delta''}) = cste$$

Or, on sait que :

$$e^{-t\Delta''} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} P_{\mathcal{H}}$$

et on en déduit donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{STr}(e^{-t\Delta''}) = \text{STr}(P_{\mathcal{H}}) = \chi(X, F)$$

En ce qui concerne $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$, la propriété (2.2) remplace la propriété usuelle de la trace et on a encore :

$$\text{STr}_{\Gamma}(e^{-t\widetilde{\Delta}''}) = cste$$

Le théorème spectral s'applique au cas de $\widetilde{\Delta}''$ pour donner :

$$e^{-t\widetilde{\Delta}''} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \widetilde{P}_{\mathcal{H}} \quad (\text{convergence faible})$$

et la propriété (2.3) permet de conclure que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \text{STr}_{\Gamma}(e^{-t\widetilde{\Delta}''}) = \text{STr}_{\Gamma}(\widetilde{P}_{\mathcal{H}}) = \chi_{\Gamma}^{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F})$$

Finalement, on vient d'établir (1) et (2) :

$$\begin{aligned} \chi(X, F) &= \int_X \text{str}(k_t(x, x)) dx \\ \chi_{\Gamma}^{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{F}) &= \int_U \text{str}(\widetilde{k}_t(x, x)) dx \end{aligned}$$

4.3 Fin de la démonstration

Les résultats de la section 3.3 nous montrent que les noyaux k_t et \tilde{k}_t admettent des développements asymptotiques :

$$k_t(x, x) \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi t)^n} (\theta_0(x) + \theta_1(x)t + \cdots + \theta_n(x)t^n + \cdots) \quad (4)$$

$$\tilde{k}_t(x, x) \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi t)^n} (\tilde{\theta}_0(x) + \tilde{\theta}_1(x)t + \cdots + \tilde{\theta}_n(x)t^n + \cdots) \quad (5)$$

Comme ces développements sont uniformes sur X et sur \bar{U} (qui est compact), on peut intégrer (4) et (5) pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_X \text{str} k_t(x, x) dx &\sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi t)^n} (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n + \cdots) \\ \int_U \text{str} \tilde{k}_t(x, x) dx &\sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi t)^n} (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 t + \cdots + \tilde{a}_n t^n + \cdots) \end{aligned}$$

en utilisant les formules (1) et (2) et identifiant les termes des différents développements, on obtient une formule locale pour les caractéristiques d'Euler :

$$\begin{aligned} \chi(X, F) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_X \text{str}(\theta_n(x)) dx \\ \chi_\Gamma^{(2)}(\tilde{X}, \tilde{F}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_U \text{str}(\tilde{\theta}_n(x)) dx \end{aligned}$$

Les termes $\theta_n(x)$ et $\tilde{\theta}_n(x)$ étant des expressions algébriques locales en les coefficients de ω , h (resp. $\tilde{\omega}$, \tilde{h}) et de leurs dérivées, on a nécessairement :

$$\tilde{\theta}_n = \pi^* \theta_n$$

ce qui achève la démonstration de (1).

5 Annexe

5.1 Théorème spectral

Nous donnons ici deux aspects du théorème spectral (bien entendu équivalents) : une version définissant un calcul fonctionnel et l'autre donnant une représentation spectrale de l'opérateur auto-adjoint T .

Dans la suite, \mathcal{B} désignera l'algèbre des fonctions boréliennes bornées sur \mathbb{R} et H un espace de Hilbert ; soit T un opérateur auto-adjoint sur H .

Théorème 2 *il existe un unique homomorphisme d'algèbre $f \rightarrow f(T)$ de \mathcal{B} dans $\mathcal{L}(H)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\forall f \in \mathcal{B}, \overline{f}(T) = f(T)^*$ (on dit que c'est un $*$ -homomorphisme)
2. $\forall f \in \mathcal{B}, \|f(T)\| \leq \|f\|_\infty$
3. Si $f \in \mathcal{B}$ a un support disjoint du spectre de T alors $f(T) = 0$
4. Si $(f_j)_{j \geq 0} \in \mathcal{B}$ converge de façon monotone vers $f \in \mathcal{B}$, $(f_j(T))_{j \geq 0}$ converge alors faiblement vers $f(T)$.

Pour décrire la décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint, on introduit la notion de résolution de l'identité. Pour cela, on considère la tribu \mathcal{M} des boréliens sur \mathbb{R} .

Définition 5.1 *On appelle résolution de l'identité une application $E : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ vérifiant :*

1. $\forall m \in \mathcal{M}, E(m)$ est une projection orthogonale avec de plus $E(\emptyset) = 0$ et $E(\mathbb{R}) = \text{Id}$
2. $\forall m, m' \in \mathcal{M}, E(m \cap m') = E(m)E(m')$
3. Si $m \cap m' = \emptyset$ alors $E(m \cup m') = E(m) + E(m')$
4. Pour tout x et $y \in H$ l'application $E_{x,y} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $E_{x,y}(m) = \langle E(m)(x), y \rangle$ est une mesure complexe régulière.

Si T est un opérateur auto-adjoint sur H , on dispose de la représentation suivante :

Théorème 3 *Il existe une résolution de l'identité E uniquement déterminée par T et vérifiant :*

$$\forall (x, y) \in \text{Dom}(T) \times H, \langle T(x), y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{x,y}(\lambda)$$

En outre, E est supportée par $\sigma(T)$ le spectre de T , au sens où $E(\sigma(T)) = \text{Id}$.

On consultera [Dav95] et [Rud95].

5.2 Injections de Sobolev et estimées elliptiques non-compactes

Pour un traitement complet du sujet (les différents aspects liés aux espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes), on se référera à [Heb99].

Soit (M, g) une variété riemannienne (orientée) complète de dimension n et $k \in \mathbb{N}$. On munit $\mathcal{D}(M)$ de la norme :

$$\|u\|_k = \left(\sum_{j=0}^k \int_M |\nabla^j u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

(où ∇ désigne la connection de Levi-Civita de (M, g)) et on note $W^k(M)$ la complétion de $\mathcal{D}(M)$ pour cette norme ; on obtient ainsi un espace de Hilbert. On notera également $CB^m(M)$ l'ensemble des fonctions C^m sur M dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m sont bornées sur M (muni de sa norme naturelle, $CB^m(M)$ est un Banach).

On souhaite établir des injections du type :

$$W^k(M) \hookrightarrow CB^m(M)$$

sur M . On rappelle le cas de l'espace euclidien :

Théorème 4 *Si $k > m + n/2$, on a :*

$$W^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow CB^m(\mathbb{R}^n)$$

c'est à dire :

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \|u\|_{CB^m} \leq C \|u\|_k$$

L'idée pour généraliser ces injections est la suivante : localement, on dispose de telles inégalités et pour obtenir une inégalité globale, il faut pouvoir les recoller. Pour ce faire, il faut disposer de partitions de l'unité permettant un tel recollement et, intuitivement, l'existence de ces partitions doit reposer sur des conditions géométriques :

Définition 5.2 *On dira que M est à géométrie bornée si :*

1. *le rayon d'injectivité de M est minoré*
2. *le tenseur de courbure de la métrique g est borné sur M ainsi que toutes ses dérivées*

Dans ces conditions, on obtient :

Théorème 5 *Si M est à géométrie bornée, les injections ci dessus restent valable ; si $k > m + n/2$, on a :*

$$W^k(M) \hookrightarrow CB^m(M)$$

Dans la situation étudiée dans ce mémoire, la variété \tilde{X} (de dimension réelle $2n$) revêt une variété X qui est compacte ; elle est donc complète et son rayon d'injectivité est clairement minoré. De plus, comme on a choisi la métrique $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$, on constate ainsi facilement que $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$ est à géométrie bornée et on dispose donc des injections :

$$W^k(\tilde{X}) \hookrightarrow CB^m(\tilde{X}) \quad (\text{pour } k > m + n)$$

Si maintenant on souhaite considérer les espaces de Sobolev $W_{\bullet,\bullet}^k(\tilde{X}, \tilde{F})$ (définis comme complétions de $\mathcal{D}_{\bullet,\bullet}(\tilde{X}, \tilde{F})$ pour les normes naturelles), on constate que les arguments ci-dessus s'adaptent. En effet, $\tilde{F} \rightarrow \tilde{X}$ étant le relèvement de $F \rightarrow X$ (et \tilde{h} la métrique relevée à partir de h), on peut encore recoller les inégalités locales pour obtenir :

Corollaire 6 *Si $k > m + n$,*

$$W_{\bullet,\bullet}^k(\tilde{X}, \tilde{F}) \hookrightarrow CB_{\bullet,\bullet}^m(\tilde{X}, \tilde{F})$$

Pour finir, rappelons les inégalités de Garding pour l'opérateur elliptique $\widetilde{\Delta}''$:

Théorème 7 *Si $u \in L_{\bullet,\bullet}^2(\tilde{X}, \tilde{F})$ et si $\widetilde{\Delta}'' u \in W_{\bullet,\bullet}^k(\tilde{X}, \tilde{F})$, alors $u \in W_{\bullet,\bullet}^{k+2}(\tilde{X}, \tilde{F})$ et il existe une constante C_k (dépendant seulement de k) telle que :*

$$\|u\|_{k+2} \leq C_k (\|\widetilde{\Delta}'' u\|_k + \|u\|)$$

Combinées avec les injections de Sobolev, les inégalités ci-dessus fournissent des résultats de régularité pour les solutions d'équations elliptiques. En effet, prenons l'exemple de l'opérateur $e^{-t\widetilde{\Delta}''}$. On sait qu'il envoie L^2 dans $\text{Dom}((\widetilde{\Delta}'')^k)$ pour tout k . D'après les inégalités de Garding, cela signifie exactement que :

$$\forall u \in L_{0,\bullet}^2(\tilde{X}, \tilde{F}), e^{-t\widetilde{\Delta}''} u \in W_{0,\bullet}^{2k}(\tilde{X}, \tilde{F})$$

et ceci pour tout k . En choisissant k assez grand ($k > (m + n)/2$), on a donc :

$$\forall m \in \mathbb{N}, e^{-t\widetilde{\Delta}''} : L_{0,\bullet}^2(\tilde{X}, \tilde{F}) \longrightarrow CB_{0,\bullet}^m(\tilde{X}, \tilde{F})$$

Références

- [At76] M.F. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann Algebras*, Astérisque **32 – 33** (1976)
- [Bre] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson (1993)
- [Dav80] E.B. Davies, *One-parameter semigroups*, Academic Press (1980)
- [Dav95] E.B. Davies, *Spectral theory and differential operators*, Cambridge University Press (1995)
- [Dem97] J.P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html> (1997)
- [Gil84] P.B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer theorem*, Mathematics Lecture Series (1984)
- [Heb99] E. Hebey, *Nonlinear Analysis on Manifolds: Sobolev Spaces and Inequalities*, Courant Institute of Mathematical Sciences, Lecture Notes **5** (1999)
- [Kol95] J. Kollàr, *Shafarevitch maps and automorphic forms*, Princeton University Press (1995)
- [Pan91] P. Pansu, *Introduction to L^2 Betti numbers*, in *Riemannian Geometry*, G. Besson et al., Fields Institute Monographs **4** (1991)
- [Roe98] J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotics methods* 2nd Edition, Pitman Research Notes in Mathematics **395** (1998)
- [Rud95] W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, Ediscience international (1995)