GÉOMÉTRIE DU REVÊTEMENT UNIVERSEL ET GROUPE FONDAMENTAL EN GÉOMÉTRIE KÄHLÉRIENNE

par

Benoît Claudon

Table des matières

Remerciements

Jean-Pierre Demailly, Thomas Peternell et Claire Voisin m'ont fait l'immense honneur d'être les rapporteurs de ce mémoire et je les en remercie chaleureusement. C'est également l'occasion pour moi de leur dire à quel point leurs travaux m'ont influencé et continuent de le faire.

Bis repetita placent : je souhaite adresser mes sincères remerciements à Frédéric Campana. De directeur de thèse, il a continué à suivre de près mon parcours mathématique et est devenu collègue, coauteur et ami : merci pour tout cela.

J'ai la chance et la grande joie de compter Philippe Eyssidieux, Andreas Höring, Stefan Kebekus, Bruno Klingler et Erwan Rousseau parmi les membres de mon jury. Que ce soient comme coauteurs ou tout simplement à travers les nombreuses discussions mathématiques (ou autres) que j'ai pu avoir avec eux, ils ont contribué à entretenir et renouveler mon goût pour la géométrie complexe, ainsi qu'à en élargir les perspectives. Qu'ils en soient remerciés.

Ma trajectoire mathématique a rencontré de nombreuses personnes, parmi lesquelles Vincent Koziarz, Frank Loray, Jorge Vitório Pereira, Frédéric Touzet et les membres des (ex) groupes ANR CLASS et MACK. Merci à tous de votre présence sur mon chemin.

La vie au laboratoire est rendue particulièrement agréable par la présence de certains membres de l'équipe de Géométrie ; je pense en particulier à Arvid, Bruno, Damien, Daniel, Julien, Lucas, Oussama, Pierre-Emmanuel, Matei... Les autres équipes ne sont pas en reste : en plus des personnes ci-dessus, un grand merci à Anne, Alex, Bruno, David, Karim, Kohele et Régine. Je partage, et ce depuis un certain temps, mon enthousiasme, mes interrogations, mon humour (pathétique parfois) avec la personne qui occupe le bureau 223 : pourvu que cela dure encore longtemps. Merci Aurélien.

Ma famille et belle-famille me font le grand plaisir d'être présentes dans les grandes occasions mathématiques. Merci à eux pour leur soutien.

Marie, Emmie, Elsa et Albin depuis peu me rendent la vie plus belle, plus colorée. Puissent leurs rires, leurs marques de tendresse et leurs embrassades résonner encore longtemps. Je leur dédie ce mémoire.

Liste des travaux

Les articles référencés ci-dessous le sont par ordre chronologique de leur réalisation (qui diffère parfois des dates de publication).

Travaux présentés. —

– « Algebraic varieties with quasi-projective universal cover », avec Andreas Höring et János Kollár, *J. Reine Angew. Math.* **679** (2013), 207-221.
– « Abelianity conjecture for special compact Kähler 3-folds », avec Frédéric Campana, *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* **57** (2014), no. 1, 55-78.
– « Compact Kähler manifolds with compactifiable universal cover », avec Andreas Höring (et un appendice par Frédéric Campana), *Bull. Soc. Math. France* **141** (2013), no. 2, 355-375.
– « Représentations linéaires des groupes kählériens : factorisations et conjecture de Shafarevich linéaire », avec Frédéric Campana et Philippe Eyssidieux, *Compos. Math.* **151** (2015), no. 2, 351-376.
– « Représentations linéaires des groups kählériens et de leurs analogues projectifs » avec Frédéric Campana et Philippe Eyssidieux, *J. Éc. polytech. Math.* **1** (2014), 331-342.
– « Quelques propriétés de stabilité des variétés spéciales », avec Frédéric Campana, prépublication arXiv (2014).
– « Compact leaves of codimension one holomorphic foliations on projective manifolds », avec Frank Loray, Jorge Vitório Pereira et Frédéric Touzet, prépublication arXiv (2015).

Travaux non présentés. —

– « Invariance for multiples of the twisted canonical bundle », *Ann. Inst. Fourier* **57** (2007), no. 1, 289-300.
– « Γ-reduction for smooth orbifolds », *Manuscripta Math.* **127** (2008), no. 4, 521-532.
– « Invariance de la Gamma-dimension pour certaines familles kählériennes de dimension 3 », *Math. Zeischrift* **266** (2010), 265-284.

1. Introduction

Ce mémoire porte en grande partie sur des questions d'uniformisation en géométrie complexe et, plus particulièrement, dans le cadre de la géométrie des variétés kählériennes compactes. La ligne directrice qui sous-tend cette problématique est l'étude des relations entre la géométrie d'une variété kählérienne compacte, celle de son revêtement universel (ou de ses revêtements galoisiens intermédiaires) et les propriétés algébriques (ou géométriques) de son groupe fondamental. Nous entendons montrer que, dans le cadre kählérien, les liens unissant le groupe fondamental d'une variété compacte à son revêtement universel relèvent plus que de la simple quasi-isométrie. De plus, nous verrons que les influences ne se font pas à sens unique.

Détaillons rapidement le contenu de ce mémoire. Dans la partie 2, nous constaterons que la géométrie particulière de certaines variétés kählériennes compactes (variétés dites *spéciales*) imposent des restrictions sur leurs groupes fondamentaux et aussi sur la structure de leurs revêtements universels (au moins de façon conjecturale). Il est en effet attendu que le groupe fondamental d'une variété spéciale soit virtuellement abélien, fait que nous établissons en dimension 3. Nous étudions ensuite la structure fine du morphisme d'Albanese d'une telle variété et combinons ces différents résultats pour obtenir une description précise de son revêtement universel.

La partie 3 est, quant à elle, dédiée à l'étude des représentations linéaires des groupes kählériens (groupes se réalisant comme le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte). À nouveau, une hypothèse sur la nature du groupe fondamental a des conséquences importantes sur la géométrie de la variété : nous établissons ainsi un résultat de structure très précis du morphisme de Shafarevich associé à une représentation linéaire. Le revêtement galoisien correspondant au noyau de cette représentation hérite lui aussi de propriétés spécifiques et nous obtenons, dans cette situation, une réponse positive à la question de Shafarevich : ce revêtement est holomorphiquement convexe.

Nous terminons cette étude dans la section 4 et abordons le problème le point de vue du revêtement universel. Nous nous intéressons à la questions suivante : que pouvons-nous dire d'une variété kählérienne compacte admettant un revêtement galoisien (infini) *compactifiable* (c'est-à-dire pouvant se réaliser comme un ouvert de Zariski d'une variété compacte) ? Nous étudierons en particulier les conséquences d'une telle hypothèse sur le groupe de Galois du revêtement ainsi que sur la géométrie de la variété initiale.

Nous espérons que ce mémoire lèvera une partie du voile de mystère qui recouvre les questions d'uniformisation (nous nous référons ici à une citation de P.A. Griffiths, citation ouvrant la partie 4).

Le mémoire contient également un appendice portant sur les feuilletages de codimension 1 et leurs hypersurfaces compactes invariantes. Bien qu'un peu éloigné des autres parties, il nous a semblé important d'inclure ce contenu dans le présent manuscrit.

Conventions et aménagements terminologiques.

Sauf mention explicite du contraire, les variétés considérées seront lisses et connexes. Nous utiliserons les termes *rationnel* et *birationnel*, même lorsque nous travaillerons dans la catégorie kählérienne compacte (et ceci en lieu et place des adjectifs *méromorphe* et *biméromorphe*). Enfin, le sens du mot *démonstration* pourra varier tout au long du texte.

2. Variétés spéciales

La classe des variétés spéciales est introduite dans [**Cam04**] dans le but de donner une description aussi simple que possible de la géométrie birationnelle des variétés projectives complexes lisses (ou plus généralement kählériennes compactes). Par définition, cette classe va être antithétique à celle des variétés de type général (classe incontournable de la théorie de la classification) et, en première approximation, il peut être utile de penser aux variétés spéciales comme étant celles qui ne dominent aucune variété de type général. Cette approche naturelle doit cependant être quelque peu raffinée pour obtenir les résultats de structure recherchés. *In fine*, toute variété projective lisse pourra être reconstruite de manière birationnelle à partir de la classe des variétés spéciales et de celle des variétés (munies d'une structure additionnelle) de type général.

2.1. Rappel sur les variétés spéciales. — Nous commençons pas introduire un faisceau différentiel associé à toute application rationnelle entre variétés complexes, ainsi que sa dimension canonique (ou de Kodaira).

Définition 2.1. — Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle entre variétés lisses. Si $\varphi : \hat{X} \to X$ est un modèle birationnel de X rendant $\hat{f} := f \circ \varphi$ holomorphe, le fibré en droites

$$\mathsf{L}_f := \varphi_*(\hat{f}^* K_Y)^{sat} \subset \Omega_X^p$$

est un sous-faisceau saturé [(1)] de rang 1 de Ω_X^p avec $p := \dim(Y)$, ce faisceau étant un invariant birationnel de f. Si X est compacte, nous posons alors :

$$\kappa(f) := \kappa(X, \mathsf{L}_f).$$

Cette dimension canonique vérifie :

$$\kappa(Y) \leq \kappa(f) \leq \dim(Y) = p.$$

L'application f sera dite de *type général* si $\kappa(f) = p$.

Les fibrations de type général sont en quelque sorte caractérisées par la valeur de leur dimension canonique comme le montre un résultat classique de Bogomolov [**Bog78**] (voir également [**Cam04**, th. 2.25, p. 535]).

***Théorème 2.2* (Bogomolov)**. — *Soit X une variété kählérienne compacte et $L \hookrightarrow \Omega_X^p$ un sous-faisceau de rang 1. La dimension canonique de L vérifie alors l'inégalité suivante :*

$$\kappa(L) \leq p.$$

Dans le cas d'égalité, il existe $f : X \dashrightarrow Y$ une fibration rationnelle telle que $L^{sat} = \mathsf{L}_f$ (et la fibration f est en particulier de type général).

1. Un sous-faisceau $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est dit *saturé* dans $\mathcal{E}$ si le quotient $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ est sans torsion.

Il est évident qu'une fibration $f : X \longrightarrow Y$ sera de type général dès que Y l'est mais il va sans dire que ce n'est pas une condition nécessaire. C'est cette nouvelle classe d'application qui va nous permettre de définir le caractère *spécial* d'une variété.

Définition 2.3. — Une variété kählérienne compacte X sera dite *spéciale* si aucune fibration rationnelle $f : X \dashrightarrow Y$ n'est de type général[2]. De manière équivalente, X est spéciale si

$$\kappa(L) < p$$

pour tout sous-faisceau de rang 1 de Ω_X^p (pour tout $1 \leq p \leq \dim(X)$).

Cette notion est bien entendu invariante par équivalence birationnelle. Nous pouvons maintenant donner les premiers exemples de variétés spéciales.

Exemple 2.4. — (1) Une courbe de genre g est spéciale si et seulement si $g \leq 1$.

(2) Une surface est spéciale si et seulement si $\kappa(S) < 2$ et si son groupe fondamental $\pi_1(S)$ est virtuellement abélien (voir la proposition 2.21).

(3) Si X est spéciale et $f : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle dominante, alors Y est spéciale.

(4) Si $f : X \longrightarrow Y$ est un revêtement étale fini, alors X est spéciale si et seulement si Y l'est.

(5) Si X est rationnellement connexe, alors X est spéciale.

(6) Si $\kappa(X) = 0$, alors X est spéciale.

(7) Pour tout entier $n \geq 1$ et $\kappa \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, n-1\}$, il existe une variété spéciale de dimension $\dim(X) = n$ et vérifiant $\kappa(X) = \kappa$. La seule restriction imposée par le caractère spéciale sur les valeurs de la dimension canonique est donc de ne pas être maximale.

S'il est relativement aisé de vérifier que les exemples (1), (2) et (3) sont bien des exemples de variétés spéciales, le fait que les variétés rationnellement connexes soient spéciales est une conséquence de l'annulation des tenseurs holomorphes sur une telle variété. Quant aux points (4) et (6), leur vérification nécessité l'emploi de la sur-additivité des dimensions de Kodaira (dans le cadre adéquat, *cf.* le théorème 2.9 ci-dessous). L'exemple (7) s'obtient de la façon suivante : si $\kappa = -\infty$, il suffit de prendre $X = \mathbb{P}^n$. Dans le cas contraire, un membre général X du système linéaire $\mathcal{O}(n-k+2, m)$ (pour m assez grand) sur $\mathbb{P}^{n-k+1} \times \mathbb{P}^k$ sera spécial (et de dimension canonique $\kappa(X) = k$) dès que l'application $X \to \mathbb{P}^k$ possède une section.

2. Un point n'étant pas de type général...

Revenons un instant sur le faisceau différentiel $\mathsf{L}_f = f^*(K_Y)^{sat}$ associé à une fibration $f : X \to Y$. L'action de saturation peut modifier profondément le fibré f^*K_Y mais, en un certain sens, L_f est encore l'image réciproque d'un $\mathbb{Q}$-diviseur sur Y. Introduisons pour cela la définition suivante.

Définition 2.5. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application holomorphe entre variétés complexes compactes lisses. Si $D \subset Y$ est un diviseur premier de Y, l'image réciproque de D s'écrit :

$$f^*(D) = \sum_{E \subset X | f(E) = D} m(f, E)E + R$$

où la somme porte sur les diviseurs premiers E de X qui s'envoient surjectivement sur D et R est un diviseur effectif f-exceptionnel. Les entiers $m(f, E)$ sont appelées *multiplicités de f le long de E*. On pose alors :

$$m_f(D) = \inf_{f(E)=D}(m(f, E))$$

et le diviseur

$$\Delta(f) := \sum_{D \subset Y} \left(1 - \frac{1}{m_f(D)}\right) D$$

est appelé diviseur des fibres multiples de f ou diviseur orbifolde.

Remarque 2.6. — La considération des multiplicités définies par un *infimum* peut sembler peu naturelle mais il s'avère qu'elle est parfaitement compatible avec la notion de différentielles symétriques adaptées au diviseur $\Delta(f)$ (sur un bon modèle de la fibration f, voir [**Cam11a**]). Nous aurons parfois besoin de considérer le cas des multiplicités classique, c'est-à-dire :

$$m_f^*(D) = \mathrm{pgcd}_{f(E)=D}(m(f, E)).$$

Ces multiplicités sont, elles, adaptées aux questions concernant le groupe fondamental. Lorsque nous en aurons besoin, nous serons donc amenés à considérer le diviseur $\Delta^*(f)$ défini *via* les multiplicités ci-dessus.

L'introduction du diviseur des multiplicités permet d'envisager la base de la fibration comme une orbifolde, c'est-à-dire une paire $(Y, \Delta(f))$, et non pas seulement comme une variété. En particulier, il est naturel de considérer le $\mathbb{Q}$-diviseur $K_Y + \Delta(f)$ comme le diviseur canonique de la paire et il faut penser au faisceau L_f comme à l'image réciproque de $K_Y + \Delta(f)$. Cette interprétation prend un sens précis sur de bons modèles de f (l'exemple [**Cam04**, ex. 1.11, p. 512] montre que la quantité $\kappa(Y, K_Y + \Delta(f)$ n'est pas un invariant birationnel de f).

Proposition 2.7. — *Si $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration entre variétés complexes compactes, sa dimension canonique vérifie :*

$$\kappa(f) = \inf(\kappa(V, K_V + \Delta(g)))$$

où $g : U \longrightarrow V$ parcourt l'ensemble des fibrations (entre variétés compactes) qui sont birationnellement équivalentes à f :

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dashed] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, dashed] & Y \end{tikzcd} .$$

En particulier, si $f : X \to Y$ est une fibration de type général (et si f vérifie la conclusion de la proposition ci-dessus), sa base orbifolde composée de la paire $(Y, \Delta(f))$ est de type général, au sens où le $\mathbb{Q}$-diviseur est *big*.

Le fait d'isoler la classe des variétés spéciales permet d'obtenir une description extrêmement simple de la structure birationnelle des variétés projectives lisses (ou même kählériennes compactes) : toute variété se décompose en une partie spéciale et une partie (qui est en fait une paire) de type général.

***Théorème 2.8* (Campana).** — *Étant donné X une variété kählérienne compacte, il existe une unique fibration rationnelle* (3)

$$c_X : X \dashrightarrow C(X)$$

ayant simultanément les deux propriétés suivantes :

(i) c_X est de type général (si X n'est pas spéciale),

(ii) les fibres générales de c_X sont spéciales.

La fibration c_X est appelé le cœur *de X ; elle est de plus fonctorielle (pour les applications rationnelles dominantes).*

Le cœur d'une variété X scinde donc canoniquement celle-ci en ses deux parties antithétiques : spéciale (les fibres) et type général (la base orbifolde).

Concluons ce paragraphe de rappel en citant deux résultats qui vont nous être utiles par la suite (et dont nous verrons apparaître différents avatars). Le premier est un cas particulier de la conjecture $C_{n,m}$ (dont la démonstration repose sur les travaux de Viehweg [**Vie83**]).

3. La fibration c_X est en réalité presque holomorphe.

***Théorème 2.9* (Campana).** — *Soit X une variété kählérienne compacte et $f : X \longrightarrow Y$ une fibration de fibre générale F. Si f est de type général, nous avons alors :*

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \dim(Y).$$

Un corollaire immédiat est le caractère spécial des variétés vérifiant $\kappa(X) = 0$ (fait déjà mentionné dans l'exemple 2.4, alinéa (6)).

Le théorème de Kobayashi-Ochiai [**KO75**, th. 2] contrôle les applications non-dégénérées vers les variétés de type général. En voici une version légèrement améliorée.

***Théorème 2.10* (Kobayashi-Ochiai, Campana).** — *Soit $U \subset V$ un ouvert de Zariski de la variété V et $\pi : U \longrightarrow X$ une application rationnelle non-dégénérée vers X une variété kählérienne compacte et soit $f : X \longrightarrow Y$ une fibration de type général. L'application $f \circ \pi$ s'étend alors rationnellement à V et, de plus, pour tout $m \geq 1$ (suffisamment divisible), les images réciproques des tenseurs holomorphes orbifoldes sur Y se prolongent à V (avec des pôles le long de $D = V \setminus U$) :*

$$(f \circ \pi)^* : \mathrm{H}^0\left(Y, m(K_Y + \Delta(f))\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(V, (\Omega_V^p)^{\otimes m}((m-1)D\right)$$

(avec $p = \dim(Y)$).

Ce résultat montre en particulier que les variétés revêtues par $\mathbb{C}^n$ sont spéciales [**Cam04**, cor. 8.11, p. 600]. Nous verrons également une conséquence de type topologique de ce résultat dans la partie 4.

2.2. Structure de la fibration d'Albanese. — Il est bon d'avoir en mémoire l'image simpliste [4] d'une variété spéciale comme étant obtenue par « extensions » successives de variétés rationnellement connexes et de variétés à fibré canonique trivial. Voyons alors ce que nous sommes en droit d'attendre sur la structure de l'application d'Albanese. Une variété rationnellement connexe ne possède pas de 1-formes holomorphes et son application d'Albanese est donc trivial. D'autre part, un résultat classique de Kawamata [**Kaw81**] affirme que l'application d'Albanese d'une variété X avec $\kappa(X) = 0$ est surjective et à fibres connexes. La description générale de l'application d'Albanese d'une variété spéciale est conforme à ces deux cas particuliers [**Cam04**, prop. 5.3, p. 576].

4. Il est possible de donner une version plus convaincante de ce principe de dévissage. En admettant la version orbifolde de la conjecture $C_{n,m}$, il est possible de montrer que le cœur d'une variété s'obtient en itérant une fibration dont les fibres sont *numériquement rationnellement connexes* et la fibration d'Iitaka-Moishezon (voir [**Cam11a**, §11]).

***Théorème 2.11* (Campana).** — *Soit X une variété kählérienne compacte spéciale. Son application d'Albanese*

$$\alpha_X : X \longrightarrow \mathrm{Alb}(X)$$

*est alors une fibration (*i.e. *surjective et à fibres connexes) qui est de plus sans fibres multiples en codimension 1 : $\Delta(\alpha_X) = 0$.*

Afin de préciser la structure des fibres de α_X, reprenons les deux prototypes de variétés spéciales et leurs applications d'Albanese respectives. Concernant le cas rationnellement connexe, la fibre de cette application est la variété ambiante elle-même et il s'agit donc encore (et toujours) d'une variété spéciale. Le cas $\kappa(X) = 0$ est plus mystérieux et la description conjecturale est donnée par l'énoncé suivant [**Uen75**, conj. K_n, p.130].

***Conjecture 2.12* (Ueno).** — *Soit X une variété projective vérifiant $\kappa(X) = 0$. Son application d'Albanese possède alors les propriétés suivantes :*

(i) *α_X est une fibration,*

(ii) *la fibre générale F vérifie $\kappa(F) = 0$,*

(iii) *la variation est nulle : les fibres lisses sont toutes isomorphes (et α_X est birationnellement un produit après revêtement étale).*

Le premier point est donc établi par le résultat susmentionné de Kawamata alors que le calcul de la dimension de Kodaira des fibres générales est un résultat récent de Chen et Hacon [**CH11**]. Notons en particulier que la fibre de l'application d'Albanese est donc également une variété spéciale. Il avait déjà été observé par Ueno que la conjecture $C_{n,m}$ impliquait le deuxième point ci-dessus. En effet, la sur-additivité des dimensions de Kodaira donne :

$$0 = \kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(\mathrm{Alb}(X)) = \kappa(F) \geq 0.$$

C'est d'ailleurs ce type d'énoncé que Chen et Hacon établissent.

***Théorème 2.13* (Chen-Hacon).** — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fibration entre variétés projectives lisses de fibre générale F. Si Y est de dimension d'Albanese maximale* (5)*, on a alors :*

$$\kappa(X) \geq \kappa(F) + \kappa(Y).$$

***Remarque 2.14*.** — A notre connaissance, l'énoncé de la conjecture 2.12 portant sur la variation reste ouvert à ce jour.

5. Cela signifie que α_Y est génériquement immersive ou encore $\dim(\alpha_Y(Y)) = \dim(Y)$.

Concernant la structure des fibres de α_X, le cas général des variétés spéciales reflète en grande partie la situation modèle des variétés de dimension de Kodaira nulle. Nous avons ainsi établi dans [**CC14b**] le résultat suivant, répondant à une question soulevée dans [**Cam04**, Question 5.4].

***Théorème 2.15* (Campana-Claudon).** — *Soit X une variété projective lisse et spéciale. Les fibres de l'application d'Albanese sont alors également spéciales.*

Là encore, l'ingrédient principal de la démonstration est un résultat de type $C_{n,m}$ démontré par Birkar et Chen [**BC15**].

***Théorème 2.16* (Birkar-Chen).** — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fibration entre variétés projectives lisses et Δ un $\mathbb{Q}$-diviseur sur X tel que la paire (X, Δ) soit lisse. Si la fibre général (X_y, Δ_y) est de log-type général et si Y est de dimension d'Albanese maximale, l'inégalité*

$$\kappa(X, \Delta) \geq \kappa(X_y, \Delta_y) + \kappa(Y) = \dim(f) + \kappa(Y)$$

est alors satisfaite.

Notons que dans le cas $\Delta = 0$, ce théorème est dû à Kollár [**Kol87**] et l'hypothèse sur la dimension d'Albanese de la base Y est alors superflue.

Une des contributions de l'article [**CC14b**] est un renforcement de l'énoncé précédent, au sens où nous sommes capables de préciser la nature de la base de la fibration d'Iitaka de la paire (X, Δ).

***Théorème 2.17* (Campana-Claudon).** — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une fibration entre variétés projectives et supposons X munie d'une structure orbifolde lisse (X, Δ) dont les fibres générales (X_y, Δ_y) sont de log-type général. Si Y est de dimension d'Albanese maximale, alors :* après modification birationnelle *de (X, Δ), la base orbifolde (Z, Δ_Z) de la fibration d'Iitaka-Moishezon $g : (X, \Delta) \longrightarrow Z$ de (X, Δ) est de type général et*

$$\dim(Z) = \kappa(X, \Delta) \geq \dim(f) + \kappa(Y).$$

***Remarque 2.18*.** — L'énoncé ci-dessus apparaissait déjà sous la forme classique (c'est-à-dire avec $\Delta = 0$) dans l'article [**CCE15**] (théorème 3.1). Dans l'étude des factorisations associées aux représentations linéaires des groupes fondamentaux, il est naturel que l'aspect orbifolde puisse être évité et nous aurons donc l'occasion d'utiliser le théorème 2.17 dans la partie 3.

Esquisse de la démonstration. — Nous donnons une idée de la démonstration dans le cas $\Delta = 0$ et $Y = \mathrm{Alb}(Y)$; les complications orbifoldes sont d'ordre technique mais nécessitent d'être traitées avec un soin particulier.

Nous avons donc à notre disposition une fibration $f : X \longrightarrow A$ sur un tore dont les fibres sont de type général. La sur-additivité des dimensions de Kodaira (ici [**Kol87**]) montre que $\kappa(X) > 0$ et nous noterons $g : X \longrightarrow Z$ la fibration d'Iitaka de X. Remarquons que les fibres X_z de g vérifiant $\kappa(X_z) = 0$ sont spéciales et leurs images dans A sont donc les translatés d'un sous-tore $B \subset A$ fixé [**Uen75**, th. 10.9]. En particulier, la composition $p \circ f : X \longrightarrow A \longrightarrow C := A/B$ se factorise par Z (avec p la projection naturelle). Notons $h : Z \longrightarrow C$ l'application ainsi obtenue et η l'application naturelle (surjective)

$$\eta : X \longrightarrow X_0 := Z \times_C A.$$

En appliquant de nouveau la sur-additivité à la restriction de f aux fibres de g, nous obtenons :

$$0 = \kappa(X_z) \geq \dim(f_{X_z}) + \kappa(C) \geq 0,$$

ce qui signifie exactement que η est génériquement finie. Si η est birationnelle [(6)], nous pouvons conclure car

$$\kappa(Z) = \kappa(X_0) = \kappa(X) = \dim(Z).$$

Dans le cas général, η devient birationnelle après un changement de base étale fini (provenant de A) et nous pouvons argumenter comme ci-avant. □

Exemple 2.19. — L'exemple suivant montre la nécessité d'introduire la base orbifolde de $g : (X, D) \to Z$, même lorsque $D = 0$. Considérons en effet

$$X := (C \times E) / \langle s \times t \rangle$$

où C est une courbe hyperelliptique (de genre au moins 2) d'involution s et E une courbe elliptique munie de t une translation par un point d'ordre 2. La deuxième projection

$$p_2 : X \longrightarrow E/\langle t \rangle$$

est une fibration sur une courbe elliptique dont les fibres sont de type général et la fibration d'Iitaka est donnée par la première projection

$$p_1 : X \longrightarrow C/\langle s \rangle \simeq \mathbb{P}^1.$$

La base de cette fibration ne devient de type général qu'une fois ajouté le diviseur orbifolde (ici le diviseur de branchement de $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$).

6. Notons que X_0 est lisse car Z l'est et que p est une submersion.

2.3. Conjecture d'abélianité. — Dans cette section, nous nous intéressons au groupe fondamental des variétés spéciales : nous allons voir comment la géométrie particulière de ces variétés influe sur leur topologie. A nouveau, nous pouvons essayer de fusionner le comportement (au moins celui attendu) du groupe fondamental des deux classes modèles en un seul énoncé [**Cam04**, Conjecture d'abélianité, p. 595].

Conjecture 2.20 **(Campana)**. — *Le groupe fondamental d'une variété spéciale (kählérienne compacte) est virtuellement abélien.*

Recensons ici quelques cas connus en faveur de la conjecture 2.20. Les premiers ne sont que de maigres étais mais citons les tout de même : les variétés rationnellement connexes ainsi que les variétés avec $c_1 = 0$ ont également un groupe fondamental virtuellement abélien. Concernant la basse dimension (et au delà du cas des courbes), le cas des surfaces s'obtient en analysant la classification et plus particulièrement le cas des surfaces elliptiques. Profitons-en pour mentionner le résultat suivant qui montre entre autre que le caractère spécial est un invariant de déformations pour les surfaces kählériennes (question complètement ouverte en dimension supérieure).

Proposition 2.21. — *Une surface kählérienne compacte X est spéciale si et seulement si $\kappa(X) \leq 1$ et si $\pi_1(X)$ est virtuellement abélien.*

Notons bien que ce type de résultat n'admet aucun analogue en dimension supérieure.

Nous pouvons remarquer ici que le résultat de structure qu'est le théorème 2.15 permet de réduire la conjecture 2.20 à un cas particulier de celle-ci.

Conjecture 2.22. — *Soit X une variété kählérienne compacte et spéciale. Si $\tilde{q}(X) = 0$, $\pi_1(X)$ est fini*[7].

Proposition 2.23. — *La validité de la conjecture 2.22 implique celle de la conjecture 2.20.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur la dimension de X. Si X vérifie $\tilde{q}(X) > 0$, on choisit un revêtement étale (toujours noté X) pour lequel $q(X) = \tilde{q}(X)$. C'est possible, puisque les revêtements étales de X restent spéciaux et ont une irrégularité majorée par $\dim(X)$. Comme l'application

7. Rappelons que l'irrégularité maximale est définie par

$$\tilde{q}(X) = \sup\left\{q(\tilde{X}) \mid \tilde{X} \longrightarrow X \text{ étale, fini}\right\}.$$

d'Albanese α_X de X est sans fibres multiples en codimension 1, la suite de groupes :

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Alb}(X)) \longrightarrow 1$$

est exacte, F étant une fibre lisse de α_X. D'après le théorème 2.15, F est une variété spéciale. Par récurrence sur la dimension, son groupe fondamental $\pi_1(F)$ est presque abélien et $\pi_1(F)_X$ (son image dans celui de X) l'est également. Comme il en est de même pour $\pi_1(\mathrm{Alb}(X))$, les résultats de [**Cam98b**] montrent que $\pi_1(X)$ est bien presque abélien. □

Dans l'article [**CC14a**], nous nous sommes intéressés au cas de la dimension 3 et avons montré la validité de la conjecture d'abélianité.

***Théorème 2.24* (Campana-Claudon).** — *Si X est une variété kählérienne compacte de dimension 3 et si X est spéciale, son groupe fondamental est alors virtuellement abélien.*

Remarquons que la réduction du problème obtenue dans la proposition 2.23 ne suffit pas à conclure. En effet, il n'est pas évident *a priori* qu'une variété spéciale de dimension 3 avec $\tilde{q} = 0$ ait un groupe fondamental fini. La démonstration de la conjecture d'abélianité en dimension 3 s'obtient en réduisant la question au cas des surfaces munies d'une structure de paire.

Proposition 2.25. — *Dans la démonstration du théorème 2.24, nous pouvons supposer que $\kappa(X) = 2$ et donc que X est l'espace total d'une fibration elliptique sur une surface algébrique.*

Au vu des récents résultats sur le programme des modèles minimaux dans le cadre kählérien [**HP13a, HP13b, CHP14**], nous proposons ici une démonstration qui étudie le cas kählérien et projectif en parallèle selon la dimension de Kodaira de X. Remarquons que le cas kählérien est traité à part (au moins pour $\kappa = -\infty$ et $\kappa = 0$) dans [**CC14a**] car les résultats récents sur le Programme des Modèles Minimaux n'étaient pas disponibles. Les arguments utilisés en lieu et place remontent en fait à [**Cam95a**] et trouvent leur source dans les travaux de Gromov [**Gro91**].

Démonstration. — Nous raisonnons suivant la valeur de $\kappa(X)$.

$\kappa(X) = -\infty$ **:** la variété X est alors uniréglée et nous pouvons considérer $r_X : X \dashrightarrow R(X)$ le quotient rationnel de X qui vérifie $\dim(R(X)) \leq 2$ et $\pi_1(X) \simeq \pi_1(R(X))$. Comme $R(X)$ est également spéciale, son groupe fondamental est bien virtuellement abélien (proposition 2.21).

$\kappa(X) = 0$ **:** X a un modèle minimal X_{min} avec un fibré canonique numériquement trivial et à singularités terminales (leurs groupes fondamentaux sont isomorphes d'après [**Tak03**]). Nous pouvons alors considérer un revêtement fini $X' \to X_{min}$ avec cette fois $K_{X'} = 0$. Les arguments de

[**NS95**] montrent que X' peut être *lissé* : il existe une déformation à un paramètre dont X' est la fibre spéciale et dont les fibres générales sont lisses avec $c_1 = 0$. Le groupe fondamental de X', ainsi que celui de X_{min} et de X sont donc virtuellement abéliens.

$\kappa(X) = 1$ **:** quitte à passer à un revêtement étale fini de X, on peut supposer que la fibration d'Iitaka $f : X \longrightarrow C$ est exacte au niveau des groupes fondamentaux [**Cam98a**, th. A.C.5]. Nous disposons donc de la suite :

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(C) \longrightarrow 1$$

où F est la fibre générale de f. Comme $\pi_1(F)$ ainsi que $\pi_1(C)$ sont virtuellement abéliens, $\pi_1(X)$ hérite donc de cette propriété d'après [**Cam98b**].

$\square$

Nous sommes donc amener à étudier en détail le cas où X est munie d'une fibration elliptique $f : X \longrightarrow S$, fibration dont nous pouvons supposer qu'elle est holomorphe, nette et que le support de son diviseur des multiplicités $\Delta^*(f)$ est à croisements normaux (nous utilisons ici les multiplicités classiques, voir remarque 2.6). La suite des groupes fondamentaux [(8)] prend alors la forme suivante (F est bien entendu la fibre de f) :

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(S/\Delta^*(f)) \longrightarrow 1.$$

Comme nous savons que $\pi_1(F)$ est abélien, il nous suffit de montrer que $\pi_1(S/\Delta^*(f))$ est virtuellement abélien (et d'appliquer les résultats de [**Cam11b**]).

Proposition 2.26. — *Si (S, Δ^*) est une surface algébrique orbifolde spéciale, alors $\pi_1(S/\Delta^*)$ est virtuellement abélien.*

Démonstration. — Si $\kappa(S, \Delta^*) = 1$ ou si (S, Δ^*) est uniréglée, nous disposons d'un morphisme sur une courbe et la conclusion s'obtient facilement. Dans les cas restants (et comme S est algébrique), nous pouvons considérer un modèle minimal de la paire (S, Δ^*) que nous noterons

$$\mu : (S, \Delta^*) \longrightarrow (\Sigma, D).$$

Le diviseur canonique $K_\Sigma + \Delta^*$ est donc soit négatif (cas Fano) ou trivial. Dans les deux cas, l'orbifolde (Σ, D) peut être munie d'une métrique kählérienne à courbure de Ricci semi-positive (au sens orbifolde) et les théorèmes

8. Le groupe fondamental d'une orbifolde (Z, D) avec $D = \sum_{j\in J}(1 - \dfrac{1}{m_j})D_j$ est par définition

$$\pi_1(Z, D) := \pi_1(Z_{reg} \setminus D)/\langle\langle \gamma_j^{m_j} \rangle\rangle,$$

les γ_j étant des petites lacets centrés autour d'un point général de D_j.

de Myers et Cheeger-Gromoll (leurs versions orbifoldes, voir [**BZ94**]) montrent que $\pi_1(\Sigma, D)$ est virtuellement abélien. Le lemme 2.27 permet de conclure. □

Lemme 2.27. — *Soit (S, Δ^*) une surface orbifolde lisse et $\mu : (S, \Delta^*) \longrightarrow (\Sigma, D)$ son modèle minimal. Il existe alors un morphisme surjectif*

$$\mu^\sharp : \pi_1(\Sigma, D) \twoheadrightarrow \pi_1(S, \Delta^*)$$

naturellement induit par l'application μ.

Remarque 2.28. — Plusieurs remarques s'imposent ici. Tout d'abord, il est bon de noter qu'une paire *klt* en dimension 2 est bien une orbifolde au sens le plus classique du terme (consulter [**CC14a**, appendice]) : une telle paire est localement un quotient d'un ouvert de $\mathbb{C}^2$ par un groupe fini (le diviseur étant alors le diviseur de branchement du revêtement considéré).

Cependant, le morphisme reliant (S, Δ^*) à son modèle minimal n'est en aucun cas un morphisme orbifolde. Enfin, le morphisme de groupes dans le lemme 2.27 n'a pas la covariance attendue mais ceci est relié à l'observation qui vient d'être faite. En effet, il faut augmenter les multiplicités sur certains diviseurs contractés pour que le morphisme $(S, \Delta^*) \longrightarrow (S, \Delta^*)_{min}$ devienne un morphisme orbifolde (voir [**CC14a**, rem. 5.1]).

Nous illustrons ces dernières remarques de la façon suivante.

Exemple 2.29. — Soit $S = C \times C$ avec C une courbe elliptique et $\mu : X \to S$ l'éclatement de S en un point. On munit S du diviseur $D := (1 - 1/m)F$ où F est une fibre de la deuxième projection et qui passe par le point éclaté. De même, nous considérons sur X le diviseur Δ qui est le transformé strict de D. Il est aisé de vérifier que la contraction $(X, \Delta) \longrightarrow (S, D)$ n'est autre que le morphisme vers le modèle minimal. Cependant, si nous examinons $f : (S, D) \to C$ la deuxième projection et $f \circ \mu : (X, \Delta) \to C$, nous constatons que les diviseurs des multiplicités de ces deux applications sont radicalement différents. En effet, le diviseur induit par (S, D) est de la forme $(1 - 1/m)\{c\}$ (avec $c = f(F)$) et celui induit par (X, Δ) est trivial : ceci est assuré par la présence du diviseur exceptionnel de μ avec multiplicité 1. En particulier, (X, Δ) est spécial alors que (S, D) ne l'est pas ; de même le groupe fondamental de (X, Δ) est abélien alors que celui de (S, D) fibre (virtuellement) sur un groupe libre à deux générateurs. Enfin, remarquons que le morphisme

$$(X, \Delta + (1 - \frac{1}{n})E) \longrightarrow (S, D)$$

est un morphisme orbifolde (divisible) dès que $n \geq m$ (resp. m divise n).

2.4. Revêtement universel des variétés spéciales. — Dans cette dernière section, nous nous proposons de discuter certaines questions liées à la géométrie du revêtement universel des variétés spéciales. Remarquons que la conjecture 2.20 (couplée au théorème 2.11) dicte une grande partie de la structure de ce dernier. En effet, si X est une variété spéciale et si son groupe fondamental est virtuellement abélien, il existe alors un entier [9] $q \geq 0$ et une fibration *propre*

$$\tilde{\alpha} : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}^q.$$

Il est alors naturel de se poser la question suivante [10].

Question 1. — *Soient X et Y deux variétés projectives lisses de même revêtement universel : $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$. Si X est spéciale, Y l'est-elle également ?*

Dans l'article [**CC14b**], nous avons apporté une réponse positive en supposant de plus que le groupe fondamental de X est abélien.

***Théorème 2.30* (Campana-Claudon).** — *Soient X et Y deux variétés projectives lisses de même revêtement universel : $\tilde{X} \simeq \tilde{Y}$. Si X est spéciale et si $\pi_1(X)$ est virtuellement abélien, Y est alors elle-même spéciale.*

Idée de démonstration. — Le théorème 2.15 montre en effet que les fibres générales de la fibration (2.4) sont alors spéciales et, comme $\tilde{\alpha}$ est équivariante sous le groupe d'automorphismes de $\tilde{X}$ (qui contient $\pi_1(Y)$), nous obtenons une fibration $Y \longrightarrow \mathbb{C}^q/\pi_1(Y)$. La variété Y apparaît donc comme l'espace total d'une fibration dont les fibres générales et la base orbifolde sont spéciales (d'après le théorème 2.10) : elle est alors elle-même spéciale. □

Mettons maintenant en perspective la question 1. Tout d'abord, signalons que l'analogue de cette question pour les variétés de type général (aux antipodes donc des variétés spéciales) admet une réponse positive conformément à un résultat de Tsuji [**Tsu96**] : si deux variétés projectives ont des revêtement universels isomorphes et si l'une d'elles est de type général, l'autre l'est également.

D'autre part, il semble intéressant de relier cette problématique (caractériser les variétés spéciales par leur revêtement universel) à l'étude des liens entre le caractère spécial et l'annulation de la pseudo-distance de Kobayashi [**Kob98**]. Nous listons donc ici quelques propriétés dont l'équivalence est attendue [**Cam04**, §9.1] et essayons de voir lesquelles sont « invariantes par revêtement universel ».

9. Cet entier n'est autre que $q = \tilde{q}(X)$.
10. Cette question peut être vue comme une généralisation de la conjecture de Iitaka (conjecture 4.16) qui affirme qu'une variété projective revêtue par $\mathbb{C}^n$ est une variété abélienne (après revêtement étale fini).

1. X est spéciale.
2. La pseudo-métrique de Kobayashi d_X est identiquement nulle.
3. X est $\mathbb{C}$-connexe (deux quelconques de ses points peuvent être joints par une chaine de courbes entières tracées dans X).
4. Il existe une courbe entière dense dans X.
5. Il existe une courbe entière Zariski-dense dans X.
6. La pseudo-métrique infinitésimale F_X de Kobayashi est identiquement nulle.

Les propriétés (3) et (6) sont invariantes par revêtement universel : si X et Y sont deux variété projectives ayant le même revêtement universel et si X vérifie (3) (respectivement (6)), il en est de même pour Y. De plus, le théorème 2.30 montre l'invariance du point (1) sous l'hypothèse additionnelle d'abélianité de $\pi_1(X)$.

En revanche, la situation est bien moins claire pour les points (2), (4) et (5). L'exemple de deux variétés abéliennes de même dimension montrent que le relevé (puis projection) d'une courbe entière Zariski dense dans X ne l'est pas forcément dans Y. La discussion du point (2) soulève d'ailleurs les questions suivantes.

Question 2. — *Soit X une variété kählérienne*[11] *compacte vérifiant $d_X = 0$. Est-il vrai que $d_{\tilde{X}}$ est également identiquement nulle ?*

Dans [**Kob98**, th. 3.2.8, p. 61], il est établi la relation suivante :

$$d_X(x, y) = \inf(d_{\tilde{X}}(z, t) \mid \pi(z) = x \text{ et } \pi(t) = y)$$

si π désigne la projection du revêtement. Or, les exemples de [**Zwo98**] montrent que cette borne n'est pas nécessairement atteinte si X n'est pas compacte.

La question 2 peut aussi se formuler de la sorte (car F_X est invariante par revêtement étale [**Kob98**, prop. 3.5.26, p. 91]).

Question 3. — *Soit X une variété kählérienne compacte telle que $d_X \equiv 0$. A-t-on également $F_X \equiv 0$?*

Remarquons que l'annulation de F_X implique celle de d_X puisque la distance de Kobayashi est la version intégrée de F_X d'après [**Kob98**, th. 3.5.31, p. 94].

11. Les exemples de certaines surfaces de Inoue montrent qu'il est plus raisonnable de se limiter au cas kählérien.

3. Représentations linéaires des groupes kählériens et projectifs

Nous nous intéressons maintenant à la façon dont la nature du groupe fondamental influe sur la géométrie d'une variété kählérienne compacte et de son revêtement universel. Nous allons en effet établir un résultat de factorisation pour les représentations linéaires du groupe fondamental. De celui-ci, nous déduirons une réponse à la question de Shafarevich pour les revêtements linéaires. Rappelons en quelques mots l'origine de cette question.

L'uniformisation des courbes donne une idée un peu faussée de la complexité des variétés complexes simplement connexes en dimension supérieure : une courbe compacte X a pour revêtement universel $\tilde{X}^u$ qui est $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{D}$ le disque unité.

En dimension supérieure, une description aussi simple que celle apparaissant dans le cas des courbes est vaine et seule la question de Shafarevich (12) donne une vision unifiée de ce que pourrait être l'uniformisation des variétés algébriques (13) en général [**Sha13**, chap. 9, §4.3].

Question 4 **(Shafarevich)**. — *Si X est une variété complexe projective lisse, son revêtement universel $\tilde{X}^u$ est-il holomorphiquement convexe ? En d'autres termes, $\tilde{X}^u$ admet-il une application propre :*

$$\gamma : \tilde{X}^u \longrightarrow \Gamma(\tilde{X}^u)$$

sur un espace complexe normal de Stein $\Gamma(\tilde{X}^u)$?

Même dans le cas des surfaces projectives, cette question est complètement ouverte dans le cas des surfaces de type général (l'article [**GS85**] traite le cas des surfaces qui ne sont pas de type général ; voir également [**GPP11**] pour d'autres résultats récents dans le cas des surfaces). Les seules réponses connues à ce jour concernent les variétés dont le groupe fondamental admet suffisamment de quotients linéaires, comme nous allons le voir dans les paragraphes qui suivent.

3.1. Factorisation des représentations linéaires. — Dans l'article [**CCE15**], nous avons établi un résultat général de factorisation pour les représentations linéaires du groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte. Pour énoncer ce résultat, il est plus agréable d'introduire la notion de réduction associée au groupe fondamental [**Cam94**], notion qui fournit une réponse birationnelle (et partielle) à la question 4.

12. *In the light of this result it is an interesting question to know whether the universal cover of a complete algebraic variety is holomorphically convex. (We could be more cautious and restrict ourselves to projective varieties.)*

13. We could be less cautious and generalize it to compact Kähler manifolds !

***Théorème 3.1* (Campana).** — *Soit X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma$ un quotient du groupe fondamental. Si $\tilde{X}_\Gamma$ désigne le revêtement galoisien associé, il existe alors une unique fibration rationnelle (presque holomorphe), propre et connexe*

$$\tilde{\gamma}_\rho : \tilde{X}_\Gamma \dashrightarrow \Gamma_\rho(\tilde{X}_\Gamma)$$

dont la fibre en un point très général $x \in \tilde{X}_\Gamma$ est le sous-ensemble analytique compact (connexe) maximal.

De façon équivalente, il existe alors une unique fibration rationnelle (presque holomorphe), propre et connexe

$$\gamma_\rho : X \dashrightarrow \Gamma_\rho(X)$$

dont la fibre en un point très général $x \in X$ est le sous-ensemble analytique irréductible maximal Z possédant la propriété suivante : l'image du morphisme

$$\pi_1(\hat{Z}) \to \pi_1(X) \xrightarrow{\rho} \Gamma$$

est finie (avec $\hat{Z}$ la normalisation de Z).

Cette fibration sera appelé indifféremment Γ-réduction ou ρ-réduction de X. La $\pi_1(X)$-réduction est donc un substitut birationnel au quotient de Remmert potentiel envisagé dans la question 4. Nous noterons $\gamma d(X) := \dim(\Gamma_{\mathrm{id}}(X))$ et appellerons cet invariant birationnel la Γ-dimension.

Remarque 3.2. — La terminologie utilisée ici est celle de [**Cam94**]. Dans l'article [**Kol93**], cette fibration (dans le cas où X est projective) est introduite sous le nom d'*application de Shafarevich*.

Cet énoncé général est très satisfaisant dans le sens où il donne un résultat d'existence d'une fibration dont les fibres ont un comportement prescrit par rapport au groupe fondamental de X (ou à ses quotients). Cependant, ce résultat ne dit rien sur la structure birationnelle de l'espace quotient $\Gamma_\rho(X)$, qui n'est d'ailleurs bien défini qu'à transformation birationnelle près.

Les résultats de [**CCE15**] permettent de préciser considérablement cette structure dans le cas où Γ est linéaire.

***Théorème 3.3* (Campana-Claudon-Eyssidieux).** — *Soit X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \to \Gamma$ un quotient* linéaire *du groupe fondamental. Quitte à passer à un revêtement étale fini et à modifier X, la Γ-réduction a un modèle holomorphe*

$$\gamma_\rho : X \longrightarrow \Gamma_\rho(X)$$

où la variété $\Gamma_\rho(X)$ est elle même l'espace total de

$$s_\rho : \Gamma_\rho(X) \longrightarrow S_\rho(X)$$

une fibration lisse sur une variété $S_\rho(X)$ de type général, les fibres de s_ρ étant des tores complexes.

Signalons les travaux antérieurs de [**Mok92**] et [**Zuo94, Zuo96**] qui ont établi des versions « préliminaires » du résultat ci-dessus.

Remarque 3.4. — L'énoncé précédent est bien un résultat de factorisation puisque la représentation ρ va factoriser par le groupe fondamental de $\Gamma_\rho(X)$. En effet, comme Γ est linéaire, nous pouvons le supposer sans torsion d'après le lemme de Selberg [**Sel60**, lem. 8, p. 154]. Les fibres de γ_ρ ayant une image fini dans Γ, la représentation ρ factorise donc à travers le groupe fondamental orbifolde de $\Gamma_\rho(X)$ (avec la structure orbifolde venant de γ_ρ). Ce groupe étant une extension de $\pi_1(\Gamma_\rho(X))$ par un groupe engendré par des éléments de torsion, la représentation ρ se factorise finalement *via* $\pi_1(\Gamma_\rho(X))$.

Avant d'expliquer les différentes étapes de la démonstration du théorème 3.3, donnons-en quelques conséquences notables. La première concerne la question 4 et la structure des revêtement linéaires des variétés kählériennes compactes. En effet, les techniques employées dans [**CCE15**] permettent d'adapter au cas kählérien les arguments développés par Eyssidieux et ses collaborateurs, d'abord dans [**Eys04**] (cas des représentations réductives) puis dans [**EKPR12**] (cas général).

***Théorème 3.5* (Campana-Claudon-Eyssidieux)**. — *Si X est une variété kählérienne compacte de groupe fondamental linéaire, son revêtement universel $\tilde{X}^u$ est holomorphiquement convexe.*

Nous renvoyons à [**CCE15**, §5] pour les détails concernant la démonstration du résultat ci-dessus.

Remarque 3.6. — Une courte discussion s'impose quant à l'étendue couverte par le théorème 3.5. Si tous les exemples « connus » de groupes kählériens infinis possèdent des représentations linéaires d'images infinies, il existe cependant des groupes kählériens non linéaires [**Tol93**]. Notons au passage un exemple qui échappe également au cadre d'application du théorème 3.5, celui des surfaces de Kodaira (voir par exemple [**BHPVdV04**, chap. V, §14]). Ces surfaces sont l'espace total d'une fibration lisse en courbes sur une courbe (avec variation non triviale du module des fibres). Le groupe fondamental d'une telle surface X est alors extension de deux groupes de surfaces (de genre g et $h \geq 2$)

$$1 \longrightarrow \pi_1(C_h) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(C_g) \longrightarrow 1$$

mais l'éventuelle linéarité du groupe n'est pour l'instant pas connue. Le caractère Stein de $\tilde{X}^u$ peut cependant s'obtenir par une voie détournée : le lemme 6.2 de [**Gri71**] montre que $\tilde{X}^u$ peut se réaliser comme un domaine borné de

$\mathbb{C}^2$ et est donc Stein car admettant un groupe cocompact d'automorphismes (voir [**Sie08**, chap. X]).

Le théorème 3.3 permet également d'appréhender les aspects linéaires de la conjecture d'abélianité.

Corollaire 3.7. — *Soient X une variété compacte kählérienne spéciale et $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ une représentation linéaire. L'image de ρ est alors virtuellement abélienne.*

En effet, comme X est supposée spéciale, la variété $S_\rho(X)$ est donc réduite à un point et $\Gamma_\rho(X)$ est un tore complexe (quotient du tore d'Abanese).

Une autre conséquence du résultat ci-dessus est connue sous le nom d'Ubiquité des Variations de Structures de Hodge (VSH dans la suite), phénomène établi par C. Simpson dans le cas projectif [**Sim92**, th. 3].

Corollaire 3.8. — *Si X est une variété kählérienne compacte, toute représentation linéaire $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ peut être déformée en une* VSH.

La démonstration du cas projectif passe par l'existence de l'espace de modules M_{Dol} (espace de modules des fibrés de Higgs polystables à classes de Chern nulles) et d'une action algébrique de $\mathbb{C}^*$ sur ce dernier. Partant d'une représentation linéaire (réductive) quelconque, on peut considérer (E, Θ) le fibré de Higgs qui lui est associé ainsi que ses translatés par l'action de $\mathbb{C}^*$: (E_t, Θ_t) $(t \in \mathbb{C}^*)$. Des résultats [14] de propretés [**Sim94b**, th. 6.11] montrent que la limite de (E_t, Θ_t) existe (et est unique) dans M_{Dol} quand t tend vers 0. Par unicité, cette limite est un point fixe de l'action de $\mathbb{C}^*$, c'est à dire une VSH (le lecteur se reportera au paragraphe 3.3 pour les notions utilisées). Cet argumentaire s'écroule dans le cas kählérien, cadre dans lequel nous ne sommes pas capables de construire l'espace M_{Dol}. Cependant, le théorème 3.3 permet aisément de se réduire au cas projectif et donc d'en déduire que le phénomène d'ubiquité des VSH persiste dans le cas kählérien.

Donnons maintenant un aperçu des étapes de la démonstration du théorème 3.3. Nous sommes donc en présence d'une variété kählérienne compacte X et d'une représentation $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ de son groupe fondamental. Si Γ désigne l'image de ρ, nous noterons G son adhérence de Zariski (que nous supposerons connexe, quitte à passer à un revêtement étale fini). La structure des groupes algébriques connexes est bien connues (voir [**Mil12**, chap. XVII, prop. 2.5] : G est une extension

$$1 \longrightarrow R(G) \longrightarrow G \longrightarrow S := G/R(G) \longrightarrow 1$$

14. Le cas où X est une courbe avait déjà été traité dans [**Hit87**].

avec $R(G)$ un groupe algébrique résoluble (le *radical résoluble* de G) et S un groupe semi-simple. Nous pouvons dans un premier temps traiter les cas séparément, c'est-à-dire étudier la réduction associée à un quotient linéaire résoluble, respectivement semi-simple. Le cas résoluble fait déjà apparaître une structure de fibration en tores sur une variété de type général (pour la variété $\Gamma_\rho(X)$). Ensuite, nous faisons une étape intermédiaire et montrons que $\Gamma_\rho(X)$ est une variété projective si ρ est semi-simple. Une fois revenus dans la catégorie des variétés projectives, nous pouvons utiliser des outils provenant de l'étude de la conjecture $C_{n,m}$ (positivité des images directes) pour montrer que $\Gamma_\rho(X)$ est bien de type général [15]. Il est alors aisé de recombiner les deux situations pour parvenir à l'énoncé du théorème 3.3. L'existence d'un modèle lisse pour la fibration d'Iitaka de $\Gamma_\rho(X)$ est une conséquence des résultats de [**Nak99a**], ses travaux généralisant au cas kählérien ceux de Kollár [**Kol93**] dans le cas projectif.

3.2. Cas résoluble. — Nous allons montrer que les représentations linéaires résolubles d'une variété kählérienne compacte sont contrôlées par son application d'Albanese. Le même résultat pour les quotients nilpotents remontent aux travaux de Campana [**Cam95b**]. D'un point de vue plus conceptuel, il s'agit d'une manifestation de l'existence d'une structure de Hodge mixte sur le complété de Malčev du groupe fondamental de X [**Hai87**] et du caractère strict des morphismes de structures de Hodge mixtes [**Del71**].

Rappelons la notation utilisée dans ce paragraphe : si G est un groupe et $n \geq 1$ un entier, nous noterons G_n le $n^{\text{ième}}$ quotient nilpotent de la suite centrale descendante de G et $G_n^* := G_n/\mathrm{Tor}(G_n)$.

Théorème 3.9 **(Campana)**. — *Soit X un variété kählérienne compacte et notons $\alpha : X \longrightarrow Y$ un modèle lisse de la factorisation de l'application d'Albanese de X (on s'autorise donc à modifier X pour obtenir le modèle α). L'application α induit pour tout $n \geq 1$ un isomorphisme :*

$$\alpha_* : \pi_1(X)_n^* \longrightarrow \pi_1(Y)_n^*.$$

Dans *loc. cit.*, Campana propose une démonstration relativement élémentaire de l'énoncé ci-dessus, s'appuyant en particulier sur un résultat de Stallings [**Sta65**, th. 3.4].

Nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 3.10. — *Soit $f : Z \longrightarrow Y$ un morphisme entre variétés kählériennes compactes et supposons que $f_* : \mathrm{H}_1(Z,\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{H}_1(Y,\mathbb{Q})$ soit identiquement nulle. Le morphisme induit entre $\pi_1(Z)_n$ et $\pi_1(Y)_n$ (respectivement $\pi_1(Z)_n^*$ et $\pi_1(Y)_n^*$) est alors d'image finie (respectivement trivial).*

15. c'est ici que notre approche diffère de celle de Zuo....

Démonstration. — L'hypothèse faite signifie que f induit une application constante entre les variétés d'Albanese de Z et Y et le théorème 3.9 fournit la conclusion souhaitée. □

Cette remarque permet de montrer que les réductions associées aux quotients linéaires résolubles sont déterminées par l'application d'Albanese.

***Théorème 3.11* (Campana-Claudon-Eyssidieux).** — *Soit X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$ un quotient linéaire résoluble. Après revêtement étale fini, la variété $\Gamma_\rho(X)$ est alors donnée par (un modèle lisse de) la factorisation de Stein de $X \longrightarrow \mathrm{Alb}_\rho(X)$, où $\mathrm{Alb}_\rho(X)$ désigne le plus grand quotient de $\mathrm{Alb}(X)$ qui factorise ρ^{ab}.*

La variété $\Gamma_\rho(X)$ est en particulier l'espace total d'un fibré en tores sur une variété de type général [**Kaw81**, th. 13].

Démonstration. — Quitte à passer à un revêtement étale fini, on peut supposer que le groupe $N := [\Gamma, \Gamma]$ est nilpotent et $\Gamma_{ab} := \Gamma/N$ sans torsion (c'est ici que nous faisons usage de l'hypothèse de linéarité de Γ). On considère alors les réductions associées à ρ et $\rho_{ab} : \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma_{ab}$:

$$\begin{aligned} g := \gamma_{\rho^{ab}} :& X \longrightarrow \Gamma_{\rho^{ab}}(X) \text{ et} \\ f := \gamma_\rho :& X \longrightarrow \Gamma_\rho(X). \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que $f = g$ (il est par ailleurs évident que les fibres de f sont contenues dans celles de g). Si Z est une fibre de g, nous savons que $\rho^{ab}(\pi_1(Z)) = \{1\}$ (car Γ_{ab} est sans torsion) ou encore $\rho(\pi_1(Z)) \subset N$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 3.10 à Z, f et $Y := \Gamma_\rho(X)$ pour en déduire que $\rho(\pi_1(Z))$ est fini. □

Remarque 3.12. — Dans [**EKPR12**, prop. 3.6], un résultat plus général est établi, impliquant en particulier que le corollaire 3.10 reste valable pour Z un espace kählérien arbitrairement singulier. Cela montre entre autre que le morphisme de Shafarevich existe (au sens de [**CCE15**, déf. 2.13] par exemple) pour ρ linéaire résoluble.

3.3. Rappels de théorie de Hodge non abélienne. — Il est bien entendu impossible de rendre compte des travaux de Simpson [**Sim92, Sim93, Sim94a, Sim94b**] (et des prolongements non archimédiens de [**GS92**]) dans un court paragraphe. Nous nous contenterons donc de relever quelques résultats dont nous ferons usage dans le paragraphe suivant et renvoyons aux articles susmentionnés ainsi qu'à l'excellent texte de synthèse [**Eys11**].

La correspondance de Simpson est un dictionnaire entre la catégorie des représentations réductives du groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte X et une catégorie de fibrés vectoriels holomorphes (munis de structures additionnelles et vérifiant certaines propriétés de stabilité). Les représentations linéaires réductives de X possèdent donc une contre-partie holomorphe (bien qu'étant de nature purement topologique).

Définition 3.13. — Un fibré de Higgs (sur une variété complexe X) est un fibré vectoriel holomorphe E muni d'une section

$$\Theta \in \mathrm{H}^0\left(X, \Omega^1_X \otimes \mathrm{End}(E)\right)$$

vérifiant $[\Theta, \Theta] = 0$.

***Théorème 3.14* (Simpson)**. — *Soit X une variété kählérienne compacte. Il existe une correspondance biunivoque entre les représentations linéaires réductives de $\pi_1(X)$ d'une part, et les fibré de Higgs polystables à classes de Chern (rationnelles) nulles d'autre part.*

Un fibré de Higgs (E, Θ) est stable (par rapport à une polarisation kählérienne ω) si l'inégalité des pentes :

$$\frac{c_1(\mathcal{F}) \wedge \omega^{n-1}}{\mathrm{rg}(\mathcal{F})} =: \mu_\omega(\mathcal{F}) < \mu_\omega(E)$$

est satisfaite pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{F} \subsetneq E$ invariant par Θ. La notion de polystabilité s'en déduit. Remarquons que la notion de stabilité ne dépend pas de la classe kählérienne choisie $[\omega]$ dans la situation où les classes de Chern rationnelles du fibré considéré sont nulles.

La correspondance se faite de la façon suivante :

– partant d'une représentation réductive, son (essentiellement unique) représentant harmonique équivariant donné par [**Cor88**] est une application $f : \tilde{X} \longrightarrow \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})/U(n)$ qui est en fait pluriharmonique [**Sam86**]. Les composantes de la différentielle de f vont essentiellement fournir une structure complexe sur E (le fibré plat associé à ρ) et un endomorphisme holomorphe pour celle-ci.
– Dans l'autre direction, partant d'une fibré de Higgs polystable, Simpson est capable de résoudre l'équation de Yang-Mills et ainsi de produire une métrique h (dite harmonique) sur E rendant la connexion

$$D(h) = D_h^{1,0} + \Theta^{*h} + \bar{\partial} + \Theta$$

plate (avec D_h la connexion de Chern associée à h et Θ^{*h} l'adjoint de Θ respectivement à h).

Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit sur les fibrés de Higgs de la façon suivante :

$$t \cdot (E, \Theta) := (E, t\Theta).$$

Cette action, en apparence inoffensive, est extrêmement intéressante en vue de l'étude de l'espace des modules M_{Dol} des fibrés de Higgs. Ainsi, Simpson montre que si $(E, \Theta) \simeq t \cdot (E, \Theta)$ pour t qui n'est pas une racine de l'unité, le champs de Higgs doit avoir une forme très particulière [**Sim92**, lem. 4.1], conduisant ainsi à la notion de $\mathbb{C}$-VSH.

Définition 3.15. — Une $\mathbb{C}$-VSH sur X est la donnée d'un système local $\mathbb{V}$, d'une forme sesquilinéaire plate S sur $\mathbb{V}$ et d'une filtration holomorphe

$$\cdots \subset \mathcal{F}^{p+1} \subset \mathcal{F}^{p} \subset \cdots \subset \mathcal{V} := \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$$

vérifiant la condition dite de transversalité de Griffiths :

$$\nabla \mathcal{F}^{p} \subset \Omega^1_X \otimes \mathcal{F}^{p+1}$$

(avec ∇ la connexion plate de $\mathbb{V}$). De plus, en tout point $x \in X$, la donnée $(\mathbb{V}_x, \mathcal{F}^{\bullet}_x, S_x)$ forme une structure de Hodge polarisée par S_x.

De plus, une VSH vient naturellement avec une application classifiante, dite application de périodes :

$$\mathrm{Per} : \tilde{X} \longrightarrow \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D}$ est un domaine de Griffiths paramétrant les structures de Hodge polarisées et Per est holomorphe et équivariante pour la représentation sous-jacente à la VSH considérée [**GS75**, §3.(b)]

Nous aurons également besoin de résultats provenant de la théorie non archimédienne initiée dans [**GS92**]. Expliquons en quoi celle-ci intervient naturellement dans notre situation. Nous avons vu ci-dessus que les représentations rigides sont sous-jacentes à des VSH et il nous faut donc étudier le cas d'une représentation (réductive) ρ non rigide. Cela signifie en particulier que le point correspondant $[\rho]$ dans l'espace de module

$$M_B := \mathrm{Hom}\,(\pi_1(X), \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})) \,/\!/\, \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$$

n'est pas un point isolé. Nous pouvons considérer une courbe (affine) passant par $[\rho]$: la représentation correspondant au point générique de la courbe nous amène naturellement à étudier les représentations

$$\rho_{na} : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_N\,(\mathbb{C}((T)))\,.$$

Comme $\mathbb{C}((T))$ est un corps local (pour la valuation donnée par l'ordre du pôle en zéro), le groupe $\mathrm{GL}_N\,(\mathbb{C}((T)))$ agit naturellement sur un immeuble (non localement compact ici) qui est de ce fait un espace métrique à courbure négative doté d'une riche structure simpliciale (voir [**AB08**]).

De même, partant d'une représentation

$$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(L)$$

à valeurs dans un corps de nombres L, il existe un procédé canonique pour rendre l'image discrète et qui consiste à considérer simultanément les complétions de L à ses différentes places. Dans le cas d'une place finie v, nous sommes à nouveau confrontés à l'étude de

$$\rho_v : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(L_v),$$

ce dernier groupe agissant à nouveau sur un immeuble (localement compact ici).

Le fait qu'un immeuble soit naturellement muni d'une distance à courbure négative permet de définir et de montrer l'existence d'application harmoniques à valeurs dans ce type d'espaces (les travaux [**KS93, KS97**] fournissent un cadre très général pour cette étude). Les résultats de régularité de [**GS92**] (dans le cas où l'immeuble est localement compact) assurent également qu'une application harmonique est C^∞ sur un gros ouvert de la variété de départ.

Les travaux de Katzarkov [**Kat97**] et Zuo [**Zuo94**] ont permis d'associer des objets holomorphes aux représentations à valeurs dans un groupe réductif sur un corps local (à l'instar de la correspondance de Simpson ci-dessus, à ceci près que cette correspondance non archimédienne est à sens unique). En les combinant à des arguments de réductions modulo p, Eyssidieux [**Eys11**] obtient les résultats de factorisation suivants.

***Proposition 3.16* (Eyssidieux).** — *Soit X une variété kählérienne compacte, L un corps de nombres et $\wp$ un idéal premier de l'anneau des entiers de L. Si $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(L_\wp)$ désigne une représentation réductive, il existe une fibration holomorphe*

$$s_\rho : X \longrightarrow S_\rho(X)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $S_\rho(X)$ est une espace kählérien normal (projectif si X l'est),

(2) si $Z \subset X$ désigne un sous-espace connexe de X, $s_\rho(Z)$ est un point si et seulement si $\rho(\pi_1(Z))$ est contenu dans un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_N(L_\wp)$.

Si T désigne une variété algébrique irréductible définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et si $r : T \dashrightarrow M_B(X, \mathrm{GL}_N)$ est une application rationnelle (définie elle aussi sur $\bar{\mathbb{Q}}$), considérons $\rho_T : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}_N(\bar{\mathbb{Q}}(T))$ une représentation réductive définie sur le corps des fractions de T dont la classe de conjugaison corresponde au point générique de l'image de r. Il existe alors une fibration holomorphe

$$s_T : X \longrightarrow S_T(X)$$

qui satisfait de plus :

(i) $S_T(X)$ est une espace kählérien normal (projectif si X l'est),

(ii) si $Z \subset X$ désigne un sous-espace connexe de X, $s_T(Z)$ est un point si et seulement si l'application $T \dashrightarrow M_B(Z, \mathrm{GL}_N)$ est constante.

Remarque 3.17. — Les constructions effectuées montrent que les fibrations s_T et s_ρ sont obtenues comme factorisation de Stein d'applications vers des variétés de Kummer (quotient d'un tore par un groupe fini d'automorphismes).

3.4. Cas semi-simple. — Dans cette section, il nous reste à établir le théorème 3.3 dans le cas d'une représentation semi-simple. L'énoncé prend alors la forme suivante.

***Théorème 3.18* (Campana-Claudon-Eyssidieux).** — *Soit X une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(X) \longrightarrow S$ une représentation Zariski-dense dans un groupe semi-simple S. Après revêtement étale fini de X, la base de γ_ρ est une variété algébrique de type général.*

La démonstration procède en plusieurs étapes :

(I) Démontrer le théorème 3.18 lorsque ρ est sous-jacente à une VSH à monodromie discrète.

(II) Dans un deuxième temps, montrer l'algébricité de la base de la fibration γ_ρ.

(III) Appliquer un résultat de type $C_{n,m}$ pour montrer que $\kappa(\Gamma_\rho(X))$ est positif.

(IV) Conclure quant au fait que $\Gamma_\rho(X)$ est de type général.

Notons que l'étape (III) peut s'interpréter comme une forme « homotopique » de la conjecture d'abondance (voir la conjecture 4.10). En effet, il est attendu qu'une variété projective Y avec $\kappa(Y) = -\infty$ soit recouverte par des courbes rationnelles. Comme la base du morphisme γ_ρ ne peut pas être recouvert pas une famille de sous-variétés simplement connexes, elle devrait vérifier $\kappa(\Gamma_\rho(X)) \geq 0$. C'est ce que nous montrons sans utiliser cette conjecture.

Nous formulons et donnons quelques éléments de démonstration des énoncés correspondants aux étapes décrites ci-dessus.

Proposition 3.19. — *Soit X une variété kählérienne compacte et ρ une représentation rigide et discrète de son groupe fondamental. Quitte à remplacer X par un revêtement étale fini, $\Gamma_\rho(X)$ est de type général.*

Démonstration. — La représentation ρ étant rigide, elle est sous-jacente à une VSH d'après [**Sim92**]. En particulier (cf section précédente), le revêtement universel de X est muni d'une application ρ-équivariante

$$\mathrm{Per}_\rho : \tilde{X} \longrightarrow \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D}$ est un domaine de périodes. Si Γ l'image de ρ est sans torsion, il est aisé de vérifier que γ_ρ n'est autre que la factorisation de Stein de l'application obtenue en quotientant Per_ρ :

$$\mathrm{Per}_\rho/\Gamma : X \xrightarrow{\gamma_\rho} \Gamma_\rho(X) \longrightarrow \mathcal{D}/\Gamma.$$

La métrique de Griffiths [**GS75**, prop. 3.14] sur le domaine $\mathcal{D}$ permet de construire une métrique (singulière) à courbure positive sur le fibré canonique de $\Gamma_\rho(X)$ qui est donc bien une variété de type général. □

Proposition 3.20. — *Si X est une variété kählérienne compacte et ρ une représentation linéaire de son groupe fondamental dont l'adhérence de Zariski S est semi-simple, la base $\Gamma_\rho(X)$ de γ_ρ est une variété projective.*

Démonstration. — Commençons par remplacer X par la base de γ_ρ (c'est possible puisque nous savons que ρ se factorise à travers γ_ρ d'après la remarque 3.4) : il nous faut donc montrer que X elle-même est algébrique. Les résultats de la section précédente (une variante de la proposition 3.16) montrent qu'il est possible de factoriser la rigidité et le caractère discret de ρ. En d'autres termes, il existe une fibration $f : X \longrightarrow Y$ vérifiant la propriété suivante : si F désigne la fibre générale de f, la restriction de ρ à $\pi_1(F)$ est rigide et discrète. Par la proposition précédente, $\Gamma_\rho(F)$ est de type général (car l'image de ρ est supposée sans torsion). Comme $X = \Gamma_\rho(X)$, on en déduit que $F = \Gamma_\rho(F)$ et f est une fibration dont les fibres sont de type général. D'après la remarque 3.17, nous pouvons alors appliquer le théorème 2.17 dans sa version absolue (c'est-à-dire $\Delta = 0$) : il existe une variété X' génériquement finie sur X dont la fibration d'Iitaka est une fibration en tores avec une base de type général. Mais si G désigne une fibre lisse de la fibration d'Iitaka de X', l'image de $\pi_1(G)$ par ρ est un sous-groupe abélien normal de S : c'est donc un groupe fini (semi-simplicité de S) et comme $X' = \Gamma_\rho(X')$, nous en déduisons que G est un point et que X' est de type général. La variété kählérienne X admet un revêtement génériquement fini qui est algébrique : elle est donc également projective. □

Le point (III) est à nouveau une conséquence du phénomène de sur-additivité des dimensions canoniques. Nous serons volontairement laconiques dans l'esquisse de démonstration qui suit et renvoyons le lecteur aux articles [**CCE15**] et [**Eys04**] pour les détails des constructions.

Lemme 3.21. — *Soit X une variété projective munie d'une représentation linéaire semi-simple ρ est supposons $X = \Gamma_\rho(X)$. La dimension de Kodaira de X est alors positive : $\kappa(X) \geq 0$.*

Esquisse de démonstration. — Reprenons les notations de la démonstration ci-dessus : X est l'espace total d'une fibration $f : X \longrightarrow Y$ dont les fibres sont de type général. La construction même de f montrent de plus que $\kappa(Y, \Delta(f)) \geq 0$ et on en déduit [16] que :

$$\kappa(X) \geq \dim(f) + \kappa(Y, \Delta(f)) \geq 0. \tag{1}$$

16. Il s'agit d'une variation autour du résultat principal de [**Kol87**] ; voir [**CCE15**, lem. 6.2].

□

Nous pouvons maintenant conclure cette étude du cas semi-simple.

Démonstration du théorème 3.18. — Comme ci-dessus, nous supposons que $X = \Gamma_\rho(X)$ et nous savons donc que $\kappa(X) \geq 0$. En considérant la restriction de ρ aux fibres de la fibration d'Iitaka de X, il suffit de montrer que le cas $\kappa(X) = 0$ ne peut pas arriver. Or, le cas d'égalité dans (1) se traduit par $X = Y$ et (à nouveau en revenant à la construction de f) cela implique qu'un revêtement fini $X' \longrightarrow X$ vérifie $\kappa(X') = 0$. Comme de plus X' est génériquement fini sur une variété abélienne (toujours par construction), elle est birationnelle à une variété abélienne [**Kaw81**]. Nous en déduisons que l'image de ρ doit être virtuellement abélienne et d'adhérence de Zariski semi-simple. Ceci constitue la contradiction cherchée. □

3.5. Une application : le problème de Kodaira pour le π_1. — La forme particulièrement agréable du théorème 3.3 nous a incité dans [**CCE14**] à étudier le cas linéaire de ce que nous pouvons appeler le problème de Kodaira pour le π_1. En effet, depuis les travaux de Voisin [**Voi04, Voi06**], nous savons qu'il existe des variétés kählériennes compactes qui n'ont pas le type d'homotopie d'une variété projective (en particulier, ces variétés ne sont pas déformation de variétés projectives). Ces exemples ne disent cependant rien sur la question du groupe fondamental et c'est cette question qui constitue le problème de Kodaira pour le π_1 : *un groupe kählérien peut-il se réaliser comme le groupe fondamental d'une variété projective ?*

Dans [**CCE14**], nous obtenons une réponse virtuellement positive à cette question dans le cas linéaire.

Théorème 3.22 **(Campana-Claudon-Eyssidieux)**. — *Tout groupe kählérien linéaire est virtuellement un groupe projectif.*

Nous obtenons cet énoncé en combinant le théorème 3.3 et le résultat suivant.

Théorème 3.23 **(Campana-Claudon-Eyssidieux)**. — *Soit X une variété kählérienne compacte qui est également l'espace total d'une fibration lisse $f : X \longrightarrow B$ dont les fibres sont des tores complexes. Il est possible de déformer X au dessus de B en une variété Y fibrée sur B de telle sorte que le morphisme Y/B soit projectif et possède une multisection.*

Si B est projective, la variété Y l'est donc également.

Donnons quelques indications sur la

Démonstration. — Le premier point est une sorte de version relative du fait qu'un tore complexe admet des petites déformations qui sont algébriques (et aussi du fait que son espace de Kuranishi est lisse). En effet, il est possible [17] d'établir une version relative du critère de Buchdahl [**Buc08**, prop. 1], critère qui s'applique parfaitement pour les familles de tores et fournit le premier point de l'énoncé ci-dessus : il existe donc une déformation de X au-dessus de B dont les fibres sont algébriques.

Notons toujours X/B cette déformation et considérons H la VSH (entière) de poids 1 sur B définie par X. À la donnée de H est associée une fibration munie d'une section :

$$J(H) \overset{\curvearrowleft}{\longrightarrow} B.$$

Si on note $\mathcal{E} := \mathcal{H}^{1,0}$, la variété $J(H)$ n'est autre que le quotient de l'espace total de $\mathcal{E}$ par le réseau relatif H (et la section est donnée par la section nulle du fibré). Si $\mathcal{J}(H)$ désigne le faisceau des sections de $J(H)$, celui-ci s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{J}(H) \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Il est facile de voir que X/B est un torseur sous l'action de $J(H)/B$ et la fibration lisse X/B définit donc un élément $\eta(X/B) \in \mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(B))$. Si

$$c : \mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(B)) \longrightarrow \mathrm{H}^2(B, H)$$

est l'application induite par la suite courte (2), l'analyse de la situation montre que $c(\eta(X/B))$ n'est autre que la classe d'extension de la suite exacte d'homotopie

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow 1$$

(le caractère kählérien de X force le morphisme $H \longrightarrow \pi_1(X)$ à être injectif, observation faite dans [**Cla10**]). Enfin, les résultats de dégénérescence [18] de [**Del68**] (consulter également [**Voi02**, th. 16.15 et rem. 16.16, p. 379-380]) montrent que la classe $c(\eta(X/B))$ est de torsion. Si m désigne l'ordre de $c(\eta(X/B)) = 0$, nous en déduisons qu'il existe $\alpha \in \mathrm{H}^1(B, \mathcal{E})$ tel que $\eta(X/B) - \delta(\frac{\alpha}{m})$ est un élément de torsion (comme $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{E})$ est un espace vectoriel, nous pouvons légitimement diviser par m). Or, il n'est pas difficile de constater que l'élément α détermine une déformation paramétrée par $\mathbb{C}$: lorsque le paramètre de déformation prend la valeur $t = -1/m$, la déformation correspondante est une fibration Y/B avec $\eta(Y/B)$ de torsion : ceci signifie exactement que Y/B possède une multisection (voir lemme ci-dessous).

La dernière assertion de l'énoncé est une reformulation du fait qu'une variété kahlérienne compacte algébriquement connexe est elle-même algébrique [**Cam81**]. □

17. La possibilité de montrer une version relative du critère de Buchdahl nous a été suggérée par C. Voisin.

18. Nous renvoyons également à [**Ara11**] pour une formulation plus générale.

Lemme 3.24. — *Soit X/B une fibration en tores et η la classe de cohomologie correspondante dans $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(H/B))$. La classe η est de torsion si et seulement si X/B possède une multisection (qui peut être choisie étale sur B).*

Démonstration. — Démontrons le sens qui nous intéresse ici. Par construction, si η est une classe dans $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(H/B))$ et $m \geq 1$ un entier, il existe toujours une application :

$$J(H)^{\eta} \longrightarrow J(H)^{m\eta}$$

où $J(H)^{\eta}/B$ est la fibration en tores associée à la classe η. Cette application est de plus étale (de degré m^{2d} avec d la dimension relative). Si η est un point de m-torsion, on obtient alors un revêtement étale :

$$J(H)^{\theta} \longrightarrow J(H).$$

L'image réciproque de la section de $J(H)/B$ par ce revêtement fournit la multisection recherchée. Pour plus de détails, on pourra se rapporter par exemple à [**Nak02**, prop. 1.3.3]. $\square$

Remarquons que cette démonstration est très largement inspirée des travaux de Kodaira sur les surfaces elliptiques [**Kod63**] : en utilisant le même type d'arguments (rendus plus délicats par la présence de fibres singulières en général), il montre qu'une surface kählérienne elliptique se déforme toujours en une surface projective [**Kod63**, th. 16.1, p. 32].

4. Structure algébrique sur le revêtement universel

Dans un article [19] portant sur les questions d'uniformisation [**Gri71**], P. Griffiths qualifie le procédé de passer d'une variété complexe à son revêtement universel comme étant « *[o]ne of the deepest and more mysterious procedures in complex analysis* ». Cette section, nous l'espérons, illustre une fois de plus ce principe. Nous allons constater qu'une question de type uniformisation peut avoir des liens très étroits avec des questions se rapportant à la géométrie birationnelle. Nous nous intéressons ici à une variante de la question 4 de Shafarevich.

Question 5. — *Peut-on classifier les variétés projectives lisses (ou kählériennes compactes) X dont le revêtement universel $\tilde{X}^u$ possède une structure* simple *?*

Formuler de la sorte, cette question est bien entendu très vague et admet des variations suivant le sens que nous donnons à l'adjectif *simple*. Voici une courte liste des situations envisageables.

(1) $\tilde{X}^u$ est contractile (simplicité topologique).

(2) $\tilde{X}^u$ est de Stein (simplicité du point de vue de la théorie des fonctions).

(3) $\tilde{X}^u$ est un ouvert de Zariski d'une variété compacte.

C'est à cette dernière forme que nous allons intéresser.

Question 6. — *Peut-on classifier les variétés kählériennes compactes X dont le revêtement universel $\tilde{X}^u$ peut se réaliser comme un ouvert de Zariski d'une variété kählérienne compacte ?*

Bien que la terminologie soit peu avenante, nous nous référerons à cette propriété de la façon suivante : nous dirons que l'on peut *compactifier* $\tilde{X}$ ou bien que $\tilde{X}$ est *compactifiable* et nous préciserons si la compactification est supposée kählérienne ou non.

4.1. Cas des courbes et des surfaces. — Le cas des courbes est immédiat : seuls $\mathbb{P}^1$ et les courbes elliptiques ont un revêtement universel que l'on peut compactifier de manière analytique. Nous allons voir en guise d'échauffement que le cas des surfaces donne une bonne idée de ce qu'il peut advenir dans le cas général.

Proposition 4.1. — *Soit X une surface kählérienne compacte dont le revêtement universel est également un ouvert de Zariski d'une surface compacte. Alors :*

19. Notons que cet article est antérieur à la deuxième édition du livre de Shafarevich [**Sha13**].

(i) *si X (ou un revêtement étale fini de X) admet un morphisme $f : X \longrightarrow C$ sur une courbe, alors $g(C) \leq 1$.*

(ii) *Si $\pi_1(X)$ est infini, X est minimal (ne contient aucune (-1)-courbe) et n'est pas de type général.*

(iii) *Le morphisme d'Albanese α_X est (après revêtement étale fini) une submersion sur* $\mathrm{Alb}(X)$ *qui est de plus localement analytiquement trivial.*

Démonstration. — Notons $\bar{X}$ une compactification lisse de $\tilde{X}^u$. Le point (i) est une reformulation du fait que les fonctions holomorphes bornées sur $\tilde{X}^u$ sont constantes (puisque devant s'étendre à $\bar{X}$).

Pour le point (ii), remarquons que le relevé d'une (-1)-courbe de X fournirait une infinité de (-1)-courbes disjointes dans $\bar{X}$ et que ceci n'est pas possible. Nous verrons plus loin que le théorème de Kobayashi-Ochiai (proposition 4.3) exclut la possibilité pour X d'être de type général. On peut également argumenter comme suit en utilisant un peu de cohomologie L^2. Si $\tilde{X}^u$ est de volume infini, les fonctions holomorphes L^2 sont constantes. De même, un résultat de Gromov [**Gro89**] combiné avec le point (i) montre que $\tilde{X}^u$ ne porte pas non plus de formes L^2 de degré 1. Enfin, les formes canoniques L^2 sur $\tilde{X}^u$ doivent se prolonger à $\bar{X}$ d'après la formule de Cauchy et l'espace

$$\mathrm{H}^0_{(2)}(\tilde{X}^u, K_{\tilde{X}^u}) \simeq \mathrm{H}^0(\bar{X}, K_{\bar{X}})$$

est de dimension finie. Des considérations élémentaires sur les dimensions de Von Neuman montrent qu'il est donc réduit à zéro. Le théorème de l'indice L^2 d'Atiyah [**Ati76**] implique alors :

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \chi_{(2)}(\tilde{X}^u, \mathcal{O}_{\tilde{X}^u}) = 0.$$

Il est cependant bien connu [**BHPVdV04**, th. 2.2 et prop. 2.4, p. 271-272] qu'une surface de type général vérifie

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) > 0.$$

Le point (iii) s'établit en analysant la classification des surfaces. Les surfaces réglées minimales ayant un revêtement universel compactifiables sont des fibrés en $\mathbb{P}^1$ sur une courbe elliptique. Une surface minimale avec $\kappa(X) = 0$ est à revêtement fini près un tore ou une surface K3. Enfin, une surface avec $\kappa(X) = 1$ est elliptique (et ici minimale) ; si son revêtement universel est compactifiable, l'argument esquissé ci-dessus montre que $\chi_{top}(X) = \chi(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Il est bien connu que la fibration d'Iitaka $f : X \longrightarrow C$ a alors au plus des fibres multiples dont la réduction est lisse. Après revêtement étale fini, X est donc une fibration elliptique lisse sur une courbe rationnelle ou elliptique. Il est facile de voir que cela entraîne $\kappa(X) \leq 0$ et le cas $\kappa(X) = 1$ ne se produit donc pas [20]. □

Nous allons voir que, en dimension supérieure, l'étude des variétés algébriques ou kählériennes compactes ayant un revêtement universel compactifiable suit peu ou prou le même chemin (quitte à réorganiser les arguments ci-dessus). Celle-ci est constituée principalement de deux étapes :

(I) « identifier » le groupe fondamental de X.

(II) étudier la structure de l'application d'Albanese de X.

Nous allons décliner ce programme dans les sections 4.2 et 4.3. Nous serons toutefois obligés de faire une distinction entre les cas projectifs et kählériens dans la section 4.2, ceci étant dû au fait que nous utiliserons des arguments provenant du Programme des Modèles Minimaux dans le cas algébrique (malgré les efforts récents de [**HP13a, HP13b, CHP14**], ces arguments ne sont pas disponibles en toute généralité dans le cas kählérien).

Sans plus attendre, voici une des réponses que nous sommes parvenus à donner à la question 6 dans l'article [**CHK13**].

***Théorème 4.2* (Claudon-Höring-Kollár).** — *Soit X une variété projective lisse de dimension n et supposons que la conjecture 4.10 est vraie pour les variétés de dimension inférieure ou égale à n. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

1. *le revêtement universel de X est quasi-projectif.*
2. *il existe un revêtement étale fini $X' \to X$ qui admet une fibration localement analytiquement triviale sur une variété abélienne de fibre F une variété simplement connexe.*
3. *le revêtement universel est biholomorphe à $F \times \mathbb{C}^q$ où $q \geq 0$ et F une variété projective simplement connexe.*

4.2. Étude du groupe fondamental. — Avant toute chose, signalons une conséquence topologique du théorème de Kobayashi-Ochiai 2.10 qui nous sera fort utile par la suite.

***Proposition 4.3*.** — *Soit X une variété kahlérienne compacte et $f : X \longrightarrow Y$ une fibration de type général de fibre générale F. Si X possède un revêtement galoisien $\tilde{X}_\Gamma$ compactifiable, l'image de la composée*

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$$

20. Au passage, nous avons montré qu'une surface ayant un revêtement universel infini mais compactifiable est spéciale. Ce phénomène est un accident de la dimension deux mais nous en verrons une manifestation dans la proposition 4.4.

est alors d'indice fini dans Γ. *En particulier, si* Γ *est infini,* X *n'est pas de type général.*

Au vu des exemples de basses dimensions, il semble raisonnable de penser que le caractère compactifiable d'un revêtement galoisien $\tilde{X} \longrightarrow X$ de groupe de Galois Γ est relié au caractère virtuellement abélien de Γ. Nous allons donc nous intéresser aux propriétés d'une éventuelle variété X admettant un revêtement galoisien $\tilde{X} \xrightarrow{\Gamma} X$ dont le groupe de Galois n'est pas virtuellement abélien.

4.2.1. Cas kählérien général. — La première observation va nous conforter dans cette direction.

Proposition 4.4. — *Soit* X *un espace normal kählérien compact admettant un revêtement galoisien* $\tilde{X} \longrightarrow X$ *compactifiable de groupe de Galois* Γ *non virtuellement abélien et supposons de plus* X *de dimension minimale parmi les espaces kählériens normaux possédant cette propriété.*
L'espace X *est alors lisse et c'est également une variété spéciale.*

Remarque 4.5. — La conjecture d'abélianité 2.20 assure qu'un tel exemple ne devrait donc pas exister. De plus, le théorème 2.24 montre qu'un tel exemple est nécessairement de dimension au moins 4.

Démonstration. — Remarquons que le fait de supposer X de dimension minimale a pour conséquence le fait suivant : $\tilde{X}$ ne possède aucun sous-espace compactifiable invariant par Γ. En effet, la normalisation W d'une composante irréductible d'un tel sous-espace serait munie de l'action de Γ' un sous-groupe d'indice fini de Γ et le quotient W/Γ' serait de dimension strictement inférieure à celle de X.

Le caractère lisse de X est donc immédiat : le lieu singulier $\tilde{X}_{\text{sing}}$ est un sous-espace compactifiable et il est donc vide par la remarque qui précède. Le caractère spécial de X s'obtient lui en appliquant le théorème de Kobayashi-Ochiai 2.10. En effet, si X n'est pas spéciale, le cœur fournit un application rationnelle presque holomorphe $c_X : X \dashrightarrow C(X)$ de type générale et nous pouvons donc appliquer le théorème susnommé à la composition :

$$\bar{X} \supset \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \overset{c_X}{\dashrightarrow} C(X)$$

qui s'étend donc en une fibration rationnelle $f : \bar{X} \dashrightarrow C(X)$. Ceci montre que, si $F = c_X^{-1}(y)$ $(y \in C(X))$ désigne une fibre générale de c_X, sa pré-image dans $\tilde{X}$ est bien entendue Γ-invariante et est compactifiable (puisque c'est un ouvert de Zariski de $f^{-1}(y)$). L'observation initiale montre que ceci ne peut arriver et X est donc spéciale. $\square$

Si nous renforçons un tant soit peu les hypothèses sur la compactification, nous obtenons des informations plus précises sur l'exemple de dimension minimale.

Théorème 4.6 **(Claudon-Höring)**. — *Soit X un espace normal kählérien compact admettant un revêtement galoisien $\tilde{X} \longrightarrow X$ compactifiable par un espace kählérien ($\tilde{X} \subset \bar{X}$ avec $\bar{X}$ kählérien et compact), de groupe de Galois Γ non virtuellement abélien et supposons de plus X de dimension minimale parmi les espaces kählériens normaux possédant cette propriété.*
L'espace X est alors lisse (et spéciale) et n'admet aucune contraction[21] *de Mori. De plus, $\tilde{X}$ n'admet aucune famille couvrante de sous-variétés compactes ; c'est en particulier également le cas pour $\tilde{X}^u$.*

Remarque 4.7. — L'exemple de dimension minimale vérifie donc $\gamma d(X) = \dim(X)$ suivant la terminologie introduite dans le théorème 3.1. D'autre part, les résultats de la section 3 montrent que le groupe de Galois n'est pas linéaire.

Esquisse de la démonstration du théorème 4.6. — Nous avons vu ci-dessus que X est lisse et nous allons considérer le cas des contractions de Mori. Nous supposons donc que X admet un morphisme $\mu : X \longrightarrow Y$ qui peut être birationnel ou fibrant. Nous illustrons le cas général par les exemples suivants : l'éclatement le long d'une sous-variété Z de codimension 2 dans Y (Z et Y étant supposées lisses) et le cas d'un fibré projectif.

Cas d'un éclatement : nous allons montrer que $\pi^{-1}(E)$ est compactifiable dans $\tilde{X}$. Remarquons pour cela que chaque composante irréductible E_i de $\pi^{-1}(E)$ apparaît comme l'image d'une composante de la famille universelle de $\mathrm{Hom}(F, \tilde{X})$ (avec F une fibre de E/Z). Les composantes E_i sont des ouverts de Zariski de composantes irréductibles de $\mathrm{Hom}(F, \bar{X})$ et sont donc compactifiables. Pour conclure, il suffit de montrer qu'elles sont en nombre fini. Si on choisit F_i un relèvement de F dans chaque E_i, il est immédiat de vérifier que $E_i \cdot F_j = -1$ si $i = j$ et 0 sinon. Les classes de cohomologies $([E_i])$ sont donc linéairement indépendantes dans $\mathrm{H}^2(\bar{X}, \mathbb{Q})$ et sont donc en nombre fini.

Cas d'un fibré projectif : la fibration $\mu : X \to Y$ se relève en une fibration Γ-équivariante $\tilde{X} \to \tilde{Y}$. Comme les fibres sont des espaces projectifs, elles n'admettent aucune action sans point fixe d'une groupe fini. L'action de Γ est donc sans point fixe sur $\tilde{Y}$ et comme d'autre part il est aisée de vérifier que $\tilde{Y}$ est compactifiable (*via* l'identification de $\tilde{Y}$ avec son image dans l'espace des

21. Une contraction de Mori est un morphisme à fibres connexes $\mu : X \to X'$ avec X' normal et tel que $-K_X$ est μ-ample.

cycles de $\bar{X}$), nous obtenons une variété Y de dimension $\dim(Y) < \dim(X)$ répondant aux mêmes exigences que X. Ceci est impossible. $\square$

Pour établir en toute généralité la démonstration du théorème 4.6 et traiter le cas de la Γ-réduction, nous avons eu recours à des techniques d'espaces de cycles dans [**CHK13, CH13**]. Donnons un bref aperçu de ces techniques et de leurs utilisations.

Si U/V est un morphisme kählérien propre et plat, nous noterons [22]

$$\mathrm{MorFin}_\ell(U/V, X)$$

l'ensemble des morphismes $\varphi : U \to X$ qui sont finis en restriction aux fibres ($\varphi : U_v \to X$ est fini pour tout $v \in V$) et qui se relèvent à $\tilde{X}$. De même, $\mathrm{MorFin}(U/V, \tilde{X})$ désigne l'espace des morphismes de $U \to \tilde{X}$ qui sont finis en restriction aux fibres. Le groupe Γ agit librement sur $\mathrm{MorFin}(U/V, \tilde{X})$ et nous disposons d'une projection :

$$\pi_{Mor} : \mathrm{MorFin}(U/V, \tilde{X}) \longrightarrow \mathrm{MorFin}(U/V, \tilde{X})/\Gamma = \mathrm{MorFin}_\ell(U/V, X).$$

Si W est une composante irréductible de $\mathrm{MorFin}_\ell(U/V, X)$, toute composante irréductible de $\tilde{W} = \pi_{Mor}^{-1}(W)$ est alors compactifiable (en considérant la composante correspondante de $\mathrm{MorFin}(U/V, \bar{X})$) mais il y a en général une infinité de telles composantes. Nous sommes cependant capables de montrer le caractère compactifiable de $\tilde{W}$ dans deux situations notoires :

(a) la famille universelle $\mathcal{U}_W \to X$ est dominante.

(b) le morphisme U/V est donné par la restriction d'une contraction birationnelle à un diviseur exceptionnel de celle-ci.

La combinaison de ces deux situations permet de traiter (en toute généralité) le cas des contractions de Mori dans le théorème 4.6.

De même, ces mêmes arguments reposants sur l'existence des espaces $\mathrm{MorFin}_\ell(U/V, X)$ s'appliquent à l'étude de la Γ-réduction et montre que $\tilde{\gamma} : \tilde{X} \longrightarrow \Gamma(\tilde{X})$ est une fibration localement triviale lorsque X répond aux exigences du théorème 4.6. L'étape décisive pour montrer que cette fibration est triviale consiste en la remarque suivante [**CH13**, th. 2.13].

Lemme 4.8. — *Soit X un exemple de dimension minimale comme ci-dessus. Considérons une factorisation de la Γ-réduction :*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "\tilde{\gamma}"] \arrow[dr, "g"'] & & \Gamma(\tilde{X}) \\ & Y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

22. Nous espérons que la notation française aura un effet antalgique sur le lecteur.

avec $\dim(g)$ *strictement positive et minimale. Si G désigne la fibre générale de g, alors soit G est projective soit G ne contient aucun sous-ensemble analytique propre de dimension strictement positive.*

Remarque 4.9. — Notons ici une différence majeure entre les cas projectif et kählérien. Les contractions birationnelles qui sont envisagées dans la théorie de Mori sont régulières (de même que la fibration d'Iitaka si l'on admet la conjecture d'abondance 4.10). Il n'est pas de même pour la réduction algébrique ou pour d'autres réductions naturelles présentes dans le cas kählérien : ces applications sont en général seulement presque holomorphes. Cependant, une analyse détaillée de la situation (et l'utilisation des techniques d'espaces de morphismes) permettent de montrer que la réduction algébrique de F (fibre générale de $\tilde{\gamma}$) et de G sont bien holomorphes.

Une fois le lemme 4.8 établi, il n'est pas difficile de conclure que les fibres de $\tilde{\gamma}$ sont des points, comme annoncé dans le théorème 4.6.

4.2.2. Spécificité du cas projectif. — Le cas projectif (comme énoncé dans le théorème 4.2) fait le lien avec la conjecture d'Abondance (introduite dans [**Rei87**]).

Conjecture 4.10. — *Soit X une variété projective lisse ; si K_X est* nef*, K_X est alors semi-ample.*

Nous pouvons en effet reformuler (et améliorer) le théorème 4.6 dans le cas algébrique.

***Théorème 4.11* (Claudon-Höring-Kollár)**. — *Soit X une variété projective normale admettant un revêtement galoisien $\tilde{X} \longrightarrow X$ quasi-projectif, de groupe de Galois Γ non virtuellement abélien et supposons de plus X de dimension minimale parmi les variétés projectives normales possédant cette propriété. La variété X est donc lisse et K_X est* nef *mais pas semi-ample.*

À nouveau, la conjecture d'abondance prédit qu'un tel exemple ne devrait pas exister.

Démonstration. — Nous savons déjà que X lisse et sans contraction de Mori d'après le théorème 4.6 ; le théorème du cône montre que K_X est donc *nef*. Supposons maintenant que K_X soit semi-ample : la fibration d'Iitaka fournit alors une fibration $f : X \longrightarrow Y$ dont les fibres générales vérifient $c_1(F) = 0$. Le théorème de décomposition de Bogomolov-Beauville donne la description de ces variétés : il s'agit (à revêtement fini près) du produit d'un tore par des variétés simplement connexes (facteurs de type Calabi-Yau ou hyperkähler). Comme nous savons déjà que $\tilde{X}^u$ n'est pas couvert par des sous-variétés compactes, nous en déduisons que les fibres de f sont des (quotients finis de) variétés abéliennes. Nous pouvons appliquer [**Kol93**, prop. 5.9 et th. 6.3] : quitte à passer à un revêtement étale fini, la base de f est de type général. D'après le théorème de Kobayashi-Ochiai (proposition 4.3), l'image de la composée :

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(X) \twoheadrightarrow \Gamma$$

est d'indice fini dans Γ et le groupe Γ est virtuellement abélien. C'est la contradiction cherchée. $\square$

Remarque 4.12. — La conjecture d'abondance étant établie pour les variétés projectives de dimension au plus 3 [**Kan92**], l'exemple de dimension minimale doit donc vérifier $\dim(X) \geq 4$.

4.3. Structure de l'application d'Albanese. — En conclusion de la section précédente, nous sommes donc naturellement amenés à étudier le cas d'une variété kählérienne compacte X dont le revêtement universel est compactifiable et dont le groupe fondamental est virtuellement abélien. Si la compactification de $\tilde{X}^u$ est kählérienne, nous obtenons un résultat optimal.

***Théorème 4.13* (Claudon-Höring).** — *Soit X une variété kählérienne compacte de groupe fondamental virtuellement abélien et supposons de plus que le revêtement universel $\tilde{X}^u$ admette une compactification $\tilde{X}^u \subset \bar{X}$ kählérienne. Le morphisme d'Albanese de X est alors (à revêtement étale fini près) une fibration localement analytiquement triviale de fibre F une variété simplement connexe.*

L'ingrédient essentiel de la démonstration est un résultat de saveur topologique extrait de [**KP12**, Th.14].

***Théorème 4.14* (Kollár-Pardon).** — *Soit $f : Z \longrightarrow A$ un morphisme entre espaces analytiques compacts, le revêtement universel $\tilde{A}^u$ de A étant contractile. Notons $\tilde{Z}$ le revêtement de Z induit par f et $\tilde{A}^u$. Si $\tilde{Z}$ a le type d'homotopie d'un espace métrique compact, alors f est surjective.*

Esquisse de la démonstration du théorème 4.13.. — Des arguments standard montrent que l'application d'Albanese de X est une fibration et nous pouvons supposer qu'elle induit un isomorphisme au niveau des groupes fondamentaux d'après l'hypothèse faite. Considérons une fibre lisse F de α_X (de classe d'homologie f) et examinons l'espace

$$\mathcal{Z}_F(X) \subset \mathcal{C}(F \times X)$$

se trouvant être la composante contenant les plongements $j : F \hookrightarrow X$ de classe d'homologie fixée : $j_*([F]) = f$. L'espace $\mathcal{Z}_F(X)$ fibre au-dessus de $A := \mathrm{Alb}(X)$:

$$\alpha_* : \mathcal{Z}_F(X) \longrightarrow A.$$

De plus, en opérant la même construction pour $\tilde{\alpha} : \tilde{X}^u \to \tilde{A}^u$, nous constatons que $\widetilde{\mathcal{Z}_F(X)}$, le revêtement induit par α_*, est un ouvert de Zariski dans $\mathcal{Z}_F(\bar{X})$ et a donc le type d'homotopie d'un CW-complexe de type fini. L'application du théorème 4.18 montre que α_* est surjective et cela signifie que les fibres sont toutes isomorphes à F. □

Remarque 4.15. — Interrogeons-nous sur la nécessité de supposer la compactification $\bar{X}$ kählérienne. En effet, la proposition 4.4 montre que l'existence d'un revêtement galoisien compactifiable ne devrait se produire que si le groupe de Galois est virtuellement abélien. Cependant, l'hypothèse kählérienne intervient naturellement dès lors que nous utilisons les espaces de cycles (à travers la compacité des composantes irréductibles de l'espace des cycles d'une variété kählérienne compacte [**Lie78**]). Par exemple, il ne nous semble pas immédiat de faire fonctionner la démonstration du théorème 4.13 en ôtant l'hypothèse sur le caractère kahlérien de $\bar{X}$.

Il nous semble intéressant de nous arrêter un instant sur la réciproque du théorème 4.13. Il n'est pas difficile en effet de montrer que si X admet une fibration lisse sur un tore (de fibre simplement connexe), son revêtement universel $\tilde{X}^u$ est alors le produit d'une variété compacte et d'un espace affine ; en particulier, $\tilde{X}^u$ est compactifiable (de manière kählérienne qui plus est). En revanche, la question se pose pour les revêtements intermédiaires. Donnons un exemple précis du problème.

Question 7. — *Supposons que X soit un fibré en $\mathbb{P}^1$ sur une variété abélienne A et considérons un revêtement arbitraire $\tilde{A}$ de A, ainsi que le revêtement induit $\tilde{X}$. Un résultat remarquable*[23] *de Capocasa et Catanese* [**CC91**] *affirme que $\tilde{A}$ possède une structure de variété quasi-projective. La variété $\tilde{X}$ (qui est donc fibrée en $\mathbb{P}^1$ sur une variété quasi-projective) possède-t-elle également une telle structure ?*

4.4. Autres résultats. — Pour finir, nous mettons en relation les résultats des sections précédentes avec d'autres travaux. Un cas particulier de la situation étudiée ci-dessus est le cas affine, c'est-à-dire lorsque le revêtement universel d'une variété projective (ou kählérienne compacte) est supposée affine. Nakayama dans [**Nak99b**] avait déjà observé que la conjecture d'abondance impliquait l'énoncé suivant : une variété projective dont le revêtement universel est affine est un quotient étale fini d'une variété abélienne. En particulier, la conjecture d'abondance implique la célèbre conjecture d'Iitaka extraite de [**Iit72**].

23. Ce résultat est d'autant plus remarquable que certaines variétés ainsi obtenues ne possèdent aucune fonction holomorphe non constante (exemples dits de Cousin).

***Conjecture 4.16* (Iitaka, 1972).** — *Une variété projective revêtue par $\mathbb{C}^n$ est un quotient étale fini d'un tore.*

Cette conjecture est donc établi jusqu'à la dimension 3. Plus généralement, cette conjecture est vraie pour les variétés projectives vérifiant $\kappa(X) \geq \dim(X) - 3$ ou encore vérifiant $q(X) \geq \dim(X) - 3$ [**Nak99b**].

La situation en dimension supérieure est largement ouverte. Il nous faut cependant citer les travaux de Höring, Peternell et Radloff [**HPR13**] sur la conjecture d'Iitaka en dimension 4. Ils établissent en particulier la validité de cette conjecture sous la condition supplémentaire $\kappa(X) \geq 0$. Nous renvoyons à *loc. cit.* pour les autres résultats, notamment pour le cas kählérien.

Toujours en lien avec la conjecture 4.16, l'approche développée par Campana dans l'appendice de [**CH13**] adopte un point de vue plus birationnel et fait également lien avec la notion de variété spéciale. Une variante de la conjecture d'Iitaka est ainsi proposée :

***Conjecture 4.17* (Conjecture $\boldsymbol{S_n}$).** — *Soit X une variété (kählérienne compacte) spéciale vérifiant $\gamma d(X) = \dim(X) = n$. Il existe alors un revêtement étale fini de X qui est birationnel à un tore.*

Il est aisé de vérifier que la conjecture d'abélianité 2.20 implique celle qui précède et, dans l'appendice de [**CH13**], Campana réduit la conjecture $\boldsymbol{S}$ au même énoncé pour les variétés primitivement spéciales. Une variété est dite *primitivement spéciale* si elle n'est pas couverte par une famille de sous-variétés spéciales strictes et les variétés primitivement spéciales sont de trois types (voir [**CH13**, lem. A.6]) :

1. $\mathbb{P}^1$.
2. les variétés projectives vérifiant : K_X est *psef* et $\kappa(X) \leq 0$ (d'après la conjecture d'abondance, seul le cas $\kappa(X) = 0$ devrait pouvoir se produire).
3. les variétés kählériennes compactes simples (celles de dimension au moins 2 qui ne sont pas couvertes par leurs sous-variétés propres).

Il est donc raisonnable de penser que les variétés primitivement spéciales seront des analogues birationnels de certains tores ou de certaines variétés hyperkählériennes (ce qui conforte la conjecture 4.17).

L'article [**KP12**] est également bien évidemment lié aux résultats des sections précédentes. Outre l'utilisation que nous en avons faite ci-dessus, l'objectif de ce travail est également similaire à celle développé dans [**CHK13**] et [**CH13**]. En effet, les auteurs ont cherché à étudier la situation d'une variété projective dont le revêtement universel est semi-algébrique (c'est-à-dire pouvant être défini par des équations ou inéquations polynomiales à coefficients réels). Le résultat qu'ils obtiennent dans cette direction est le suivant.

Théorème 4.18 **(Kollár-Pardon).** — *Soit X une variété projective lisse et considérons $\tilde{X}_\Gamma$ un revêtement galoisien de X. Supposons que le groupe de Galois Γ agisse proprement discontinûment et sans point fixe sur un domaine symétrique borné $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) $\tilde{X}_\Gamma$ *possède une structure semi-algébrique.*

(ii) X *est un fibré localement analytiquement trivial sur* $\mathbb{D}/\Gamma$.

(iii) $\tilde{X}_\Gamma$ *est isomorphe à* $\mathbb{D} \times F$ *où* F *est une variété projective.*

Remarquons une différence avec les énoncés de [**CHK13**] et [**KP12**] : l'énoncé ci-dessus est inconditionnel. Cependant, l'hypothèse faite sur le groupe fondamental est très forte. Nous constatons donc une fois de plus que la conjecture d'abondance joue le rôle d'une hypothèse de type topologique dans ce contexte.

Kollár et Pardon proposent également la conjecture suivante : si X est une variété projective lisse dont le revêtement universel $\tilde{X}^u$ est semi-algébrique, ce dernier est alors un produit $F \times \mathbb{C}^q \times \mathbb{D}$ avec F une variété projective simplement connexe et $\mathbb{D}$ un domaine borné symétrique.

Appendice A
Feuilles compactes des feuilletages

Dans cette partie quelque peu indépendante du reste du manuscrit, nous donnons un aperçu des résultats présents dans la prépublication [**CLPT15**]. Celle-ci aborde l'étude des feuilletages de codimension 1 possédant une feuille compacte. Rappelons tout d'abord qu'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une variété X est la donnée d'un sous-faisceau saturé $\mathcal{F} \subset T_X$ du fibré tangent qui est de plus stable par l'action du crochet de Lie. Une feuille de $\mathcal{F}$ est une feuille de $\mathcal{F}_{|X^\circ}$ où X° est le plus grand ouvert sur lequel $\mathcal{F}$ est un sous-fibré de T_X. Si L est une feuille compacte de $\mathcal{F}$, le feuilletage est en particulier lisse sur un voisinage de L dans X.

Commençons par une remarque qui va motiver la plupart des questions à suivre.

Remarque A.1. — Si L est une feuille compacte d'un feuilletage lisse, le fibré normal de L vérifie $c_1(N_L)_{\mathbb{Q}} = 0$. En effet, le fibré normal de L est donné par la partie linéaire de la représentation d'holonomie.

À partir de maintenant, nous nous focaliserons sur le cas de la codimension 1, cas qui fait déjà apparaître des difficultés substantielles. Comme les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des hypersurfaces de X, nous optons dorénavant pour la notation Y pour désigner une feuille compacte du feuilletage. Nous commençons par énoncer la réciproque de la remarque ci-dessus sous forme de question.

Question 8. — *Soit $Y \subset X$ une hypersurface de X dont le fibré normal vérifie $c_1(N_L)_{\mathbb{Q}} = 0$. Existe-t-il un feuilletage $\mathcal{F}$ sur X ayant Y comme feuille compacte ?*

Nous sommes restés volontairement flous sur la nature de X dans la question 8 et cette dernière peut donc être déclinée de la manière suivante :

1. *existence formelle :* X est dans ce cas un voisinage formel de Y et $\mathcal{F}$ est un feuilletage formel.
2. *existence locale :* X est un voisinage de Y (et se rétracte topologiquement sur Y) et $\mathcal{F}$ est lisse sur X.
3. *existence globale :* X est une variété projective/kählérienne compacte et $\mathcal{F}$ est défini sur X, avec éventuellement des singularités hors de Y.

Nous donnerons des critères permettant de montrer l'existence de feuilletage ayant un feuille donnée dans les situations formelles et globale dans le paragraphe A.2. Concernant la version *locale*, il nous semble qu'elle est de loin la version la plus ardue à traiter. En effet, la cadre formelle est extrêmement souple et il est possible de trouver des conditions raisonnables permettant de montrer l'existence de feuilletages formelles ayant une feuille donnée. À l'inverse, la situation globale est rigide, parfois au point d'exclure complètement l'existence de tels feuilletages. La version *locale* hérite donc des difficultés des deux autres versions : montrer que certains feuilletages formels sont convergents ou bien montrer qu'ils ne peuvent exister en n'utilisant que des arguments semi-locaux.

Une fois envisagée la question de l'existence de feuilletages ayant une feuille compacte donnée, il nous faudra nous attarder sur les propriétés de ceux-ci. La discussion se fera suivant la dichotomie suivante :

- si la représentation d'holonomie est relativement simple (par exemple d'image abélienne ou résoluble), le feuilletage doit porter une structure transverse (euclidienne ou affine).
- si, au contraire, la représentation est compliquée, le feuilletage doit provenir d'une surface : la variété X admet une fibration rationnelle $\varphi : X \to S$ vers une surface S et le feuilletage est l'image réciproque par φ d'un feuilletage en courbes sur S, ce dernier possédant une courbe compacte invariante.

Des éléments de réponses sont apportés dans les paragraphes A.3 et A.4. Cependant, nous commencerons par faire de brefs rappels de théorie de Ueda [**Ued83**].

A.1. Rappels de théorie de Ueda. — La théorie d'Ueda [**Ued83**] (consulter également l'ouvrage [**Nee89**]) étudie le plongement local d'une hypersurface lisse $Y \subset X$, la variété Y étant supposée kählérienne compacte et son fibré normal N_Y étant topologiquement de torsion. Comme l'étude est par essence locale, nous supposerons ici que X a le même type d'homotopie que Y. L'hypothèse $c_1(N_Y)_{\mathbb{Q}} = 0$, conjuguée au caractère kählérien de Y, montre que le fibré N_Y peut être muni d'une structure plate et qu'il est donc associé à une représentation unitaire

$$\rho_Y : \pi_1(Y) \longrightarrow \mathbb{S}^1.$$

Comme $\pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$, il existe donc $\widetilde{N}_Y$ un fibré plat sur X dont la restriction à Y coïncide avec N_Y. Il est alors naturel de comparer le fibré $\widetilde{N}_Y$ au fibré $\mathcal{O}_X(Y)$, tous deux ayant N_Y pour restriction à Y. Introduisons alors le fibré

$$\mathcal{U} := \widetilde{N}_Y \otimes \mathcal{O}_X(-Y).$$

Si $Y(k) := \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y^{k+1})$ désigne le voisinage infinitésimal d'ordre k de Y dans X, le type d'Ueda est défini par :

$$\operatorname{utype}(Y) := \sup\left\{k \geq 1 \mid \mathcal{U}_{|Y(k-1)} = \mathcal{O}_{Y(k-1)}\right\} \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}.$$

Par définition, si $\operatorname{utype}(Y) \geq k$, cela signifie qu'il existe des coordonnées locales $(y_i)_{i\in I}$ définies sur des ouverts U_i recouvrant X, qui engendrent l'idéal de définition de Y et vérifiant

$$y_i = \lambda_{ij} y_j + a_{ij} y_j^{k+1} \tag{3}$$

où $\lambda_{ij} \in \mathbb{S}^1$ et $a_{ij} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$. Si $\mathrm{utype}(Y) = \infty$, il existe des coordonnées *formelles* (y_i) vérifiant $y_i = \lambda_{ij} y_j$ et, en particulier, la 1-forme formelle

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{y_i} = \frac{\mathrm{d}y_j}{y_j}$$

est bien définie globalement et Y est une feuille du feuilletage induit par cette dernière.

Si $k = \mathrm{utype}(Y) < \infty$, le fibré $\mathcal{U}$ est donc trivial sur $Y(k-1)$ mais pas sur $Y(k)$. Grâce à la suite exacte « exponentielle »

$$0 \longrightarrow H^1(Y, N_Y^{-k}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y(k)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y(k-1)),$$

nous pouvons ainsi associer une classe (non nulle) $u(Y) \in H^1(Y, N_Y^{-k})$ qui est appelée classe d'Ueda. En termes des coordonnées (3), cette classe n'est autre que la classe associée au cocyle $(a_{ij|Y})_{(i,j)\in I^2}$.

Enfin, nous aurons besoin du résultat suivant qui est un des résultat marquants obtenus par Ueda mais qui n'est valable que pour les courbes.

***Théorème A.2* (Ueda).** — *Soit Y une courbe plongée dans une surface projective X et vérifiant $Y^2 = 0$. Si* $\mathrm{utype}(Y) < \infty$*, il existe un voisinage U de Y tel que $U \setminus Y$ soit une surface de Stein. De plus, la variété $X \setminus Y$ est faiblement 1-convexe : il existe un nombre fini de courbes contenues dans $X \setminus Y$ qui peuvent être contractées, le résultat de ces contractions étant une surface normale de Stein.*

A.2. Critères d'existence de feuilletages. — Commençons par donner un résultat d'existence dans le cadre formel.

***Théorème A.3* (Claudon-Loray-Pereira-Touzet).** — *Soit Y une variété kählérienne compacte plongée comme une hypersurface dans un voisinage (analytique) formel $\hat{U}$ et supposons que $N_Y = \mathcal{O}_Y$. Si de plus $h^1(Y, \mathcal{O}_Y) \leq 1$, il existe alors un feuilletage formel $\hat{\mathcal{F}}$ défini sur $\hat{U}$ ayant Y comme feuille. Ce feuilletage est d'ailleurs donné par une 1-forme formelle fermée.*

La démonstration consiste à identifier des obstructions potentielles à l'existence d'une 1-forme formelle (ayant un comportement prescrit le long de Y) et de montrer que ces obstructions s'annulent toutes. Donnons-en maintenant les grandes lignes.

Démonstration. — Si le type d'Ueda est infini (en particulier si $h^1(\mathcal{O}_Y) = 0$), il existe un feuilletage formel ayant Y pour feuille d'après le paragraphe précédent.

Supposons maintenant que le type d'Ueda vaut 1. Par définition, il existe des coordonnées (formelles) adaptées à Y et vérifiant :

$$\frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_j} = a_{ij} + b_{ij} y_j$$

où (a_{ij}) est un cocycle *constant* (un relevé de la classe d'Ueda $u(Y)$ à $H^1(Y, \mathbb{C})$) et où les b_{ij} sont des fonctions (formelles) sur $\hat{U}_i \cap \hat{U}_j$. Il est alors facile d'établir l'affirmation suivante.
Affirmation : $(b_{ij|Y})$ est un cocycle à valeurs dans $\mathcal{O}_Y$.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $[b_{ij}] = \lambda [a_{ij}]$. Introduisons l'expression $a_{ij}^{(1)} \in \mathcal{O}(\hat{U}_i \cap \hat{U}_j)$ vérifiant :

$$\frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_j} + \lambda \log \frac{y_i}{y_j} = a_{ij} + a_{ij}^{(1)} y_j .$$

Le cocycle $(a_{ij}^{(1)}{}_{|Y})$ est alors cohomologue à 0.

La démonstration est alors une conséquence des observations et changements de variables successifs suivants.

⋆ Si, pour un entier $n > 0$, nous avons un développement de la forme

$$\frac{1}{y_i} - \frac{1}{y_j} + \lambda \log \frac{y_i}{y_j} = a_{ij} + a_{ij}^{(n)} {y_j}^n, \tag{4}$$

l'expression $(a_{ij}^{(n)}{}_{|Y})$ est alors un cocycle.

⋆ Supposons que les coordonnées (y_i) vérifient la relation (4) avec $n > 1$. Le cocycle $(a_{ij}^{(n)}{}_{|Y})$ est donc cohomologue à $\lambda^{(n)} [a_{ij}]$ (pour $\lambda^{(n)} \in \mathbb{C}$). Après le changement de coordonnées

$$Y_i = y_i - \frac{\lambda^{(n)}}{n-1} {y_i}^{n+1},$$

la relation (4) devient

$$\frac{1}{Y_i} - \frac{1}{Y_j} + \lambda \log \frac{Y_i}{Y_j} = a_{ij} + \tilde{a}_{ij}^{(n)} {Y_j}^n$$

avec $(\tilde{a}_{ij|Y}^{(n)})$ cohomologue à zéro.

⋆ Supposons que les coordonnées (y_i) vérifient la relation (4) avec $(a_{ij}^{(n)}{}_{|Y})$ cohomologue à zéro et écrivons $a_{ij}^{(n)}{}_{|Y} = a_i - a_j$. Considérons alors la transformation

$$\frac{1}{Y_i} = \frac{1}{y_i} - A_i {y_i}^n$$

où $A_i \in \mathcal{O}(\hat{U}_i)$ est une fonction telle que $A_{i|Y} = a_i$. Dans ces nouvelles coordonnées, la relation (4) se lit alors :

$$\frac{1}{Y_i} - \frac{1}{Y_j} + \lambda \log \frac{Y_i}{Y_j} = a_{ij} + a_{ij}^{(n+1)} {Y_j}^{n+1}.$$

Comme à chaque étape l'ordre des changements de variables augmentent, nous pouvons passer à la limite et obtenons ainsi une 1-forme formelle le long de Y et qui laisse Y invariant. Dans le cas général, les mêmes calculs fonctionnent en considérant

$$\frac{1}{y_i^\nu} - \frac{1}{y_j^\nu} = a_{ij} + o(1)$$

avec $\mathrm{utype}(Y) = \nu \geq 1$. □

Remarque A.4. — Des calculs de nature similaire mais bien plus pénibles à mettre en œuvre montrent qu'il n'y a pas non plus d'obstructions formelles en dimension 1 et ceci quelque soit le fibré normal. Si C est une courbe plongée dans une surface avec fibré normal topologiquement de torsion, il existe toujours un feuilletage formel laissant C invariante [**CLPT15**].

Passons maintenant au cas global et citons tout d'abord un résultat dû à Neeman [**Nee89**] qui montre l'existence de restrictions sur le type d'Ueda d'une hypersurface ayant un fibré normal (analytiquement) de torsion.

***Théorème A.5* (Neeman)**. — *Soit $Y \subset X$ une hypersurface lisse d'une variété kählérienne compacte et supposons que le fibré normal de Y est d'ordre fini dans* $\mathrm{Pic}(X)$. *Si* $\mathrm{utype}(Y) > \mathrm{ord}(N_Y)$, *$Y$ est alors une fibre (éventuellement multiple) d'une application $f : X \to C$ vers une courbe C. En particulier, le type d'Ueda est infini.*

Nous nous sommes intéressés au cas d'égalité et avons obtenu le résultat suivant.

***Théorème A.6* (Claudon-Loray-Pereira-Touzet)**. — *Soit $Y \subset X$ une hypersurface lisse d'une variété kählérienne compacte et supposons que le fibré normal de Y est d'ordre fini. Si* $\mathrm{utype}(Y) = \mathrm{ord}(N_Y)$, *il existe alors un feuilletage $\mathcal{F}$ ayant Y comme feuille. Ce feuilletage est de plus donné par une 1-forme fermée ayant des pôles au plus le long de Y.*

Démonstration. — L'hypothèse sur le fibré normal et sur le type d'Ueda de Y nous assure de l'existence de coordonnées locales y_i définissant Y et vérifiant :

$$y_i^k = y_j^k + a_{ij} y_j^{2k}.$$

En particulier, l'expression

$$\frac{1}{y_i^k} - \frac{1}{y_j^k} = -a_{ij},$$

qui est *a priori* un cocycle méromorphe, définit un cocycle holomorphe sur X tout entier. D'autre part, la théorie de Hodge montre que l'opérateur

$$\mathrm{d} : H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \Omega_X^1)$$

est identiquement nulle. Le cocycle holomorphe

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{y_i^{k+1}} - \frac{\mathrm{d}y_j}{y_j^{k+1}}$$

s'écrit donc $\omega_i - \omega_j$ avec ω_i et ω_j des 1-formes holomorphes. Le lemme du $\partial\bar{\partial}$ montre finalement que ces formes peuvent être choisies fermées. En conclusion, la 1-forme

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{y_i^{k+1}} - \omega_i = \frac{\mathrm{d}y_j}{y_j^{k+1}} - \omega_j$$

définit bien une 1-forme méromorphe fermée dont les pôles sont concentrés sur Y. □

La méthode de démonstration s'adapte pour établir simplement le théorème A.5 ; ne nous en privons pas. Nous utiliserons le lemme classique suivant.

Lemme A.7. — *Soit $Y \subset X$ une hypersurface lisse d'une variété kählérienne compacte ayant un fibré normal plat. Si le morphisme de restriction*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$$

n'est pas injectif, Y est alors une fibre (éventuellement multiple) d'une fibration vers une courbe.

Démonstration du théorème A.5. — Sous les hypothèses faites, nous pouvons également trouver des coordonnées (y_i) vérifiant

$$y_i^k = y_j^k + a_{ij} y_j^{2k}.$$

Le cocyle

$$\frac{1}{y_i^k} - \frac{1}{y_j^k} = -a_{ij}$$

est donc bien holomorphe et sa restriction à Y est la classe d'Ueda à l'ordre k. L'hypothèse $\operatorname{utype}(Y) > k$ montre que cette classe est nulle dans $H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$. D'autre part, nous pouvons supposer que la restriction

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(Y, \mathcal{O}_Y)$$

est injective (sinon le lemme A.7 fournit d'emblée la conclusion). Le cocycle ci-dessus est donc cohomologue à zéro sur X cette fois et nous en déduisons l'existence de fonctions holomorphes $f_i : U_i \to \mathbb{C}$ telles que :

$$\frac{1}{y_i^k} - \frac{1}{y_j^k} = f_j - f_i.$$

L'hypersurface Y est alors la fibre (multiple d'ordre k) au dessus de ∞ de $f : X \to \mathbb{P}^1$ donnée par

$$f := \frac{1}{y_i^k} + f_i = \frac{1}{y_j^k} + f_j.$$

$\square$

Remarque A.8. — Si le fibré normal de Y n'est pas de torsion, la situation peut être toute autre comme le montre un résultat remarquable de Sad [**Sad99**] : si Y est une courbe lisse de degré $d \geq 3$ dans $\mathbb{P}^2$ et si X désigne l'éclaté de $\mathbb{P}^2$ en d^2 points de Y en position très générale, la transformée stricte de Y dans X (qui est encore isomorphe à Y) vérifie $Y^2 = 0$ mais n'est jamais la feuille d'une feuilletage sur X. En outre, la situation $\mathrm{utype}(Y) < \mathrm{ord}(N_Y) < \infty$ reste largement incomprise.

A.3. Existence de structures transverses. — Une des raisons pour lesquelles il est raisonnable de s'attendre à l'existence d'une structure transverse dans le cas où l'holonomie est résoluble vient du fait que les groupes résolubles de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ sont relativement bien compris, tout du moins du point de vue formel. Dans le résultat suivant, la notation $v_{k,\lambda}$ désigne le champ de vecteurs :

$$v_{k,\lambda} := \frac{z^{k+1}}{1 + \frac{\lambda}{2i\pi} z^k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

***Théorème A.9* (Cerveau-Moussu)**. — *Soit $G \subset \mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ un sous-groupe résoluble de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. *Le groupe G est alors* formellement *conjugué à l'un des sous-groupes suivants :*

1. *le groupe $\mathbb{L} = \{z \mapsto \alpha z,\ \alpha \in \mathbb{C}^*\} \simeq \mathbb{C}^*$.*
2. *le groupe $\mathbb{E}_{k,\lambda} = \left\{f = a \cdot \exp(tv_{k,\lambda}) \mid a^k = 1, t \in \mathbb{C}\right\}$, pour $k \geq 1$ un entier et un paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$.*
3. *le groupe $\mathbb{A}_k = \{f(z) = az/(1 - bz^k)^{1/k} \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$, pour $k \geq 1$.*

Si de plus G est abélien, alors seuls les deux premiers cas se produisent.

Nous renvoyons à l'article original [**CM88**], ainsi qu'aux monographies [**Lor06**] et [**CCD06**].

Un point intéressant de cette classification est que les groupes apparaissant dans l'énoncé précédent s'identifient à des groupes de symétries de 1-formes méromorphes (ou d'espaces de 1-formes). En effet :

1. le groupe $\mathbb{L}$ est le groupe des symétries de la forme $\frac{\mathrm{d}z}{z}$.
2. le groupe $\mathbb{E}_{k,\lambda}$ est le groupe des symétries de la 1-forme $\frac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}} + \frac{\lambda}{2\imath\pi}\frac{\mathrm{d}z}{z}$.

3. le groupe $\mathbb{A}_k$ laisse lui invariante la droite engendrée par la 1-forme $\dfrac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}}$.

Remarque A.10. — Le théorème A.9 fournit une classification formelle : le changement de coordonnées est *a priori* donnée par une série formelle. Le problème de la classification analytique est bien plus ardu et fait apparaître des phénomènes extrêmement complexes. Certains cas donnent même lieu à des espaces de modules (*cf.* [**Lor06**]).

Si maintenant $Y \subset X$ (avec X projective) est la feuille d'un feuilletage $\mathcal{F}$ dont l'holonomie le long de Y est abélienne, nous obtenons les informations suivantes.

Proposition A.11. — *Dans la situation ci-dessus, il existe $\hat{\omega}$ une 1-forme méromorphe formelle au voisinage de Y et ayant des pôles le long de Y. De plus, le type d'Ueda de Y vaut :*
- $\mathrm{utype}(Y) = \infty$ *si l'holonomie est formellement linéarisable.*
- *si l'holonomie est formellement conjuguée à un sous-groupe de $\mathbb{E}_{k,\lambda}$ alors* $\mathrm{ord}(N_Y) = k$ *et* $\mathrm{utype}(Y) \geq k$. *En particulier, le théorème A.5 montre que* $\mathrm{utype}(Y) = k$ *ou* $\mathrm{utype}(Y) = \infty$.

Nous obtenons alors un premier résultat d'existence de structure transverse (euclidienne).

Théorème A.12 **(Claudon-Loray-Pereira-Touzet)**
Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété X projective et possédant une feuille compacte Y le long de laquelle l'holonomie de $\mathcal{F}$ est abélienne. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est alors donné (à revêtement fini près) par une 1-forme rationnelle fermée, sauf éventuellement dans le cas suivant : l'holonomie est formellement linéarisable et l'ordre du fibré normal de Y est infini.

Esquisse de démonstration. — Au vu de la proposition A.11 et de l'hypothèse $\mathrm{ord}(N_Y) < \infty$ si l'holonomie est linéarisable, deux cas se présentent à nous.

1. l'holonomie est formellement contenue dans $\mathbb{E}_{k,\lambda}$ et $\mathrm{utype}(Y) = k$.
2. Y est la fibre d'une fibration $f : X \to C$.

Le premier cas présente à nouveau une dichotomie. Considérons le groupe $G_1 < G$ des éléments de G de partie linéaire triviale : c'est un groupe abélien sans torsion.
- Si $\mathrm{rg}(G_1) \geq 2$, un théorème de Cerveau et Moussu [**CM88**, prop. 1] montre que, dans ce cas, G est *analytiquement* conjugué à son modèle donné par le théorème A.9. La 1-forme formelle donnée par la proposition A.11 est en réalité méromorphe sur un voisinage de Y (et ayant tous ses pôles sur

Y). Le théorème A.2 de Ueda montre que cette forme s'étend [24] à X tout entier.
- si $\mathrm{rg}(G_1) = 1$, nous comparons alors la 1-forme formelle $\hat{\omega}$ fournie par la proposition A.11 à la 1-forme rationnelle η construite dans le théorème A.6. L'information sur le rang de G_1 permet de mieux contrôler la construction de η et nous permet de montrer que la forme $\hat{\omega} - \eta$ n'a pas de pôles, puis que les périodes de cette forme s'annulent. Nous en déduisons que $\hat{\omega} - \eta = \mathrm{d}\hat{f}$ pour une fonction formelle $\hat{f}$. Comme $\mathrm{utype}(Y) = k < \infty$, cette fonction doit être constante et $\mathcal{F}$ est donc donné par la forme fermée η.

Le cas où Y est une fibre d'une fibration $f : X \to C$ se traite d'une manière différente. Tout d'abord, nous savons que le fibré normal à $\mathcal{F}$ est formellement équivalent à $\mathcal{O}_X(kY)$ pour un certain entier k (proposition A.11, k étant l'ordre du pôle de $\hat{\omega}$ le long de Y). D'après un théorème de Grothendieck, le faisceau

$$f_*(\mathcal{O}_X(N_{\mathcal{F}}(-kY)))$$

a pour complété formel $\widehat{\mathcal{O}_{C,o}}$ où $o := f(Y) \in C$. Cela signifie que $f_*(\mathcal{O}_X(N_{\mathcal{F}}(-kY)))$ est un fibré en droites et est donc trivial sur un ouvert de Zariski de C (contenant o). Nous en déduisons que $N_{\mathcal{F}}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X(kY)$ sur un ouvert de Zariski U de X (qui est un voisinage de Y) et que $\mathcal{F}$ est donc donnée par une forme rationnelle ω ayant des pôles d'ordre k le long de Y et éventuellement hors de U. À nouveau, en comparant les formes ω et $\hat{\omega}$, nous montrons que la forme ω est fermée (ou bien une modification de ω sur un revêtement de X l'est). □

À titre d'exemple, citons également le résultat suivant qui fournit des éléments en faveur de la dichotomie envisagée ci-dessus (nous renvoyons à [**CLPT15**] pour les détails de la démonstration).

Théorème A.13 **(Claudon-Loray-Pereira-Touzet)**

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur une variété projective lisse X et possédant une feuille compacte Y. Si Y est de plus la fibre d'une fibration $f : X \to C$ et si l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de Y est résoluble, le feuilletage $\mathcal{F}$ est alors transversalement affine [25].

24. En effet, pour savoir si un feuilletage possède une structure transverse (euclidienne, affine ou projective), il suffit de le vérifier sur une surface intersection complète de diviseurs amples (*cf.* l'appendice de [**CLPT15**]). Une fois ramenés au cas des surfaces, nous pouvons bien appliquer le théorème A.2 et les propriétés de convexité de $X \setminus Y$ permettent d'étendre la forme en question.

25. Un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 est dit *transversalement affine* si son fibré normal $N_{\mathcal{F}}$ peut être muni d'une connexion méromorphe plate ∇ vérifiant $\nabla(\omega) = 0$ pour une forme ω définissant $\mathcal{F}$. De façon équivalente, cela revient à se donner une 1-forme rationnelle η

A.4. Résultats de factorisation. — Pour finir, nous mentionnons quelques situations dans lesquelles il est possible de factoriser une partie des informations par une variété de dimension (beaucoup) plus petite. Nous considérerons en effet le problème sous l'angle de l'holonomie (savoir quand la représentation d'holonomie se factorise par le groupe fondamental d'une courbe) ou bien du feuilletage tout entier (faire apparaître le feuilletage comme image réciproque d'un feuilletage sur une surface).

Concernant la représentation d'holonomie, nous obtenons l'énoncé suivant.

***Théorème A.14* (Claudon-Loray-Pereira-Touzet)**

Soient Y une variété kählérienne compacte et $\rho : \pi_1(Y) \to \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ une représentation de son groupe fondamental. Si l'image de ρ, notée G, n'est pas virtuellement abélienne, le centre de G est alors un groupe fini et le morphisme $\bar{\rho} : \pi_1(Y) \to G/Z(G)$ factorise alors par une courbe : il existe une fibration $f : Y \to C$ et une factorisation

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y) \arrow[r, "f_*"] \arrow[rr, bend right, "\bar{\rho}"'] & \pi_1^{orb}(C) \arrow[r] & G/Z(G). \end{tikzcd}$$

Donnons quelques explications permettant d'obtenir la factorisation annoncée ci-dessus. Remarquons tout d'abord que la finitude du centre est classique (voir [**Lor06**]). Il nous faut ensuite exhiber une fibration sur une courbe factorisant au moins une partie de la représentation (la représentation induite sur les k-jets par exemple). L'étude se divise en deux cas suivant la nature de la partie linéaire de la représentation ρ.

Premier cas : si la partie linéaire de G est infini, la représentation induite sur les jets d'ordre k (pour k assez grand) fournit un quotient de $\pi_1(Y)$ qui est résoluble mais non virtuellement abélien. Les résultats de [**Cam01**] montrent que $j^k\rho$ factorise alors à travers une courbe.

Deuxième cas : dans le cas contraire, nous pouvons supposer que les éléments de G sont tangents à l'identité (quitte à remplacer G par un sous-groupe d'indice fini). Nous nous appuyons alors sur un résultat purement algébrique. Le théorème A.15 ci-dessous fournit en effet deux classes de cohomologie de degré 1 dont le produit est nul. Le lemme de Castelnuovo-de Franchis montre finalement que les classes en question sont induites par un morphisme vers une courbe (et en particulier que le premier jet non trivial $j^k\rho$ se factorise à travers cette fibration).

Dans tous les cas, nous obtenons donc une fibration $f : Y \to C$ vers une courbe qui factorise $j^k\rho$ pour un entier $k \geq 2$. Il est possible de conclure en appliquant

vérifiant $\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$ et $\mathrm{d}\eta = 0$. Nous renvoyons le lecteur à [**CP14**, §2] pour une introduction à cette notion.

le théorème de semi-simplicité de Deligne pour montrer que la représentation ρ toute entière se factorise à travers f. Nous renvoyons à l'article [**CLPT15**] pour les détails.

Théorème A.15 **(Claudon-Loray-Pereira-Touzet)**
Soit $\Gamma < \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)_1$ *un sous-groupe non abélien de* $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C},0)_1$. *Il existe alors* α *et* $\beta \in H^1(\Gamma,\mathbb{C})$ *deux classes de degré 1 non proportionnelles et qui vérifient* $\alpha \wedge \beta = 0$. *De plus, une des classes est donnée par le premier jet non trivial* $j^k : \Gamma \to \mathbb{C}$

Il est intéressant de noter ici que la démonstration du théorème A.15 est une réminiscence des changements de coordonnées utilisés dans la démonstration du théorème A.3.

Concluons cet appendice avec un théorème de factorisation, analogue feuilleté du théorème A.14. Pour simplifier, nous énonçons ce résultat dans le cas où le fibré normal de Y est trivial. Pour un résultat plus complet, nous renvoyons à l'article original.

Théorème A.16 **(Claudon-Loray-Pereira-Touzet)**
Soit $\mathcal{F}$ *un feuilletage sur une variété projective lisse* X *et supposons que* $\mathcal{F}$ *possède une feuille compacte* Y *dont le fibré normal est trivial. Si l'holonomie de* $\mathcal{F}$ *le long de* Y *n'est pas virtuellement abélienne, il existe alors un application rationnelle* $\varphi : X \dashrightarrow S$ *vers une surface projective* S *et un feuilletage* $\mathcal{G}$ *sur* S *tels que* $\mathcal{F} = \varphi^{-1}\mathcal{G}$.

Esquisse de démonstration. — Des considérations élémentaires s'appuyant sur l'existence de l'espace des cycles montrent qu'il suffit de produire des sous-variétés de codimension 2 tangentes à $\mathcal{F}$ et couvrant un ouvert (non vide) de X. De plus, le théorème A.5 montre que, soit Y est la fibre d'une fibration $f : X \to C$, soit $\mathrm{utype}(Y) = 1$.

Commençons par traiter le cas d'une fibration et donnons-nous une forme $\Omega \in H^0(X, \Omega^1_X \otimes N_{\mathcal{F}})$ qui définit le feuilletage. Il nous faut à nouveau distinguer deux cas :

1. si $N_{\mathcal{F}|X_t} \neq \mathcal{O}_{X_t}$ pour $t \in C$ général, comme $c_1(N_{\mathcal{F}|X_t})_{\mathbb{Q}} = 0$, nous pouvons appliquer les résultats de [**Cam01**] car $\Omega_{|X_t}$ fournit une section de $\Omega^1_{X_t} \otimes N_{\mathcal{F}|X_t}$. Les sous-variétés admettent donc des fibrations sur des courbes $g_t : X_t \to \Sigma_t$ et la forme Ω est nulle en restriction aux fibres de g_t : ce sont donc des sous-variétés de codimension 2 tangentes à $\mathcal{F}$.
2. si $N_{\mathcal{F}|X_t} = \mathcal{O}_{X_t}$ (pour t général dans C), nous pouvons alors supposer que la forme Ω (vue comme forme rationnelle) a ses pôles et ses zéros portés par un nombre fini de fibres de f. En particulier, la restriction

de Ω à une fibre générale de f est une authentique forme holomorphe et est donc fermée. Si g est une fonction rationnelle sur C (et holomorphe au voisinage de $f(Y)$) et si nous notons encore g la fonction induite sur X, cette dernière remarque s'écrit $\mathrm{d}\Omega \wedge \mathrm{d}g = 0$. Comme la forme Ω est intégrable, nous avons également $\mathrm{d}\Omega \wedge \Omega = 0$ et nous en déduisons qu'il existe une fonction rationnelle $h \in \mathbb{C}(X)$ telle que :

$$\mathrm{d}\Omega = h\mathrm{d}g \wedge \Omega.$$

En dérivant, nous obtenons l'identité :

$$\mathrm{d}h \wedge \mathrm{d}g \wedge \Omega = 0$$

et cela montre que les fibres [26] de l'application $h \times g : X \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont tangentes à $\mathcal{F}$.

Il nous reste donc à traiter le cas utype$(Y) = 1$. Commençons par appliquer le théorème A.14 : il existe une fibration $g : Y \to C$ vers une courbe factorisant la représentation d'holonomie $\rho_{\mathcal{F}}$. En particulier, si F désigne une fibre générale de g, il existe un voisinage U de F dans X sur lequel le feuilletage est donné par une fonction holomorphe $y : U \to \mathbb{C}$ s'annulant sur $Y \cap U$. De plus, d'après l'hypothèse utype$(Y) = 1$ (et la démonstration du théorème A.6), il existe une 1-forme holomorphe ω dont la restriction à Y n'est autre que le conjugué de la classe d'Ueda de Y, c'est-à-dire la partie de type (0,1) du deuxième jet de la représentation d'holonomie :

$$j^2\rho_{\mathcal{F}} \in H^1(\pi_1(Y), \mathbb{C}) \simeq H^1(Y, \mathbb{C}).$$

En particulier, cette forme est nulle en restriction à F et nous pouvons supposer que $\omega = \mathrm{d}z$ pour une fonction holomorphe $z : U \to \mathbb{C}$ s'annulant sur F (quitte à restreindre U). La fibre au dessus de $(0,0)$ de $y \times z : U \to \mathbb{C}^2$ est la sous-variété F et les fibres proches de F sont donc des sous-variétés compactes de codimension 2 de X, tangentes à $\mathcal{F}$ et qui recouvrent U. Là encore, nous obtenons la factorisation de $\mathcal{F}$ à travers une surface. $\square$

Références

[AB08] P. Abramenko & K. S. Brown – *Buildings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, New York, 2008, Theory and applications.

[Ara11] D. Arapura – « Homomorphisms between Kähler groups », in *Topology of algebraic varieties and singularities*, Contemp. Math., vol. 538, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, p. 95–111.

26. Encore faut-il qu'elles soient de codimension 2. Si ce n'est pas le cas ; cela signifie que $\mathcal{F}$ coïncide avec la fibration f ou alors que Ω est fermée sur un revêtement fini de X, étale le long de Y. Dans les deux cas, l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de Y est virtuellement abélienne.

[Ati76] M. F. Atiyah – « Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras », in *Colloque "Analyse et Topologie" en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974)*, Soc. Math. France, Paris, 1976, p. 43–72. Astérisque, No. 32–33.

[BC15] C. Birkar & J. A. Chen – « Varieties fibred over abelian varieties with fibres of log general type », *Adv. Math.* **270** (2015), p. 206–222.

[BHPVdV04] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters & A. Van de Ven – *Compact complex surfaces*, second éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Bog78] F. A. Bogomolov – « Holomorphic tensors and vector bundles on projective manifolds », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **42** (1978), no. 6, p. 1227–1287, 1439.

[Buc08] N. Buchdahl – « Algebraic deformations of compact Kähler surfaces. II », *Math. Z.* **258** (2008), no. 3, p. 493–498.

[BZ94] J. E. Borzellino & S.-H. Zhu – « The splitting theorem for orbifolds », *Illinois J. Math.* **38** (1994), no. 4, p. 679–691.

[Cam81] F. Campana – « Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact », *Invent. Math.* **63** (1981), no. 2, p. 187–223.

[Cam94] F. Campana – « Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes », *Bull. Soc. Math. France* **122** (1994), no. 2, p. 255–284.

[Cam95a] F. Campana – « Fundamental group and positivity of cotangent bundles of compact Kähler manifolds », *J. Algebraic Geom.* **4** (1995), no. 3, p. 487–502.

[Cam95b] ______, « Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **28** (1995), no. 3, p. 307–316.

[Cam98a] ______, « Negativity of compact curves in infinite covers of projective surfaces », *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no. 4, p. 673–693.

[Cam98b] F. Campana – « Connexité abélienne des variétés kählériennes compactes », *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), no. 4, p. 483–506.

[Cam01] F. Campana – « Ensembles de Green-Lazarsfeld et quotients résolubles des groupes de Kähler », *J. Algebraic Geom.* **10** (2001), no. 4, p. 599–622.

[Cam04] F. Campana – « Orbifolds, special varieties and classification theory », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), no. 3, p. 499–630.

[Cam11a] ______, « Orbifoldes géométriques spéciales et classification biméromorphe des variétés kählériennes compactes », *J. Inst. Math. Jussieu* **10** (2011), no. 4, p. 809–934.

[Cam11b] ______, « Quotients résolubles ou nilpotents des groupes de Kähler orbifoldes », *Manuscripta Math.* **135** (2011), no. 1-2, p. 117–150.

[CC91] F. Capocasa & F. Catanese – « Periodic meromorphic functions », *Acta Math.* **166** (1991), no. 1-2, p. 27–68.

[CC14a] F. Campana & B. Claudon – « Abelianity conjecture for special compact Kähler 3-folds », *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* **57** (2014), no. 1, p. 55–78.

[CC14b] ———, « Quelques propriétés de stabilité des variétés spéciales », (2014), Preprint arXiv.

[CCD06] F. Cano, D. Cerveau & J. Déserti – *Théorie élémentaires des feuilletages holomorphes singuliers*, Belin, 2006, 206 pp.

[CCE14] F. Campana, B. Claudon & P. Eyssidieux – « Représentations linéaires des groups kählériens et de leurs analogues projectifs », *J. Éc. polytech. Math.* **1** (2014), p. 331–342.

[CCE15] ———, « Représentations linéaires des groupes kählériens : factorisations et conjecture de Shafarevich linéaire », *Compos. Math.* **151** (2015), no. 2, p. 351–376.

[CH11] J. A. Chen & C. D. Hacon – « Kodaira dimension of irregular varieties », *Invent. Math.* **186** (2011), no. 3, p. 481–500.

[CH13] B. Claudon & A. Höring – « Compact Kähler manifolds with compactifiable universal cover », *Bull. Soc. Math. France* **141** (2013), no. 2, p. 355–375, With an appendix by Frédéric Campana.

[CHK13] B. Claudon, A. Höring & J. Kollár – « Algebraic varieties with quasi-projective universal cover », *J. Reine Angew. Math.* **679** (2013), p. 207–221.

[CHP14] F. Campana, A. Höring & T. Peternell – « Abundance for Kähler threefolds », arXiv :1403.3175, 2014.

[Cla10] B. Claudon – « Invariance de la Γ-dimension pour certaines familles kählériennes de dimension 3 », *Math. Z.* **266** (2010), no. 2, p. 265–284.

[CLPT15] B. Claudon, F. Loray, J. V. Pereira & F. Touzet – « Compact leaves of codimension one holomorphic foliations on projective manifolds », prépublication arXiv : ? ?, 2015.

[CM88] D. Cerveau & R. Moussu – « Groupes d'automorphismes de $(\mathbf{C}, 0)$ et équations différentielles $ydy + \cdots = 0$ », *Bull. Soc. Math. France* **116** (1988), no. 4, p. 459–488 (1989).

[Cor88] K. Corlette – « Flat G-bundles with canonical metrics », *J. Differential Geom.* **28** (1988), no. 3, p. 361–382.

[CP14] G. Cousin & J. V. Pereira – « Transversely affine foliations on projective manifolds », *Math. Res. Lett.* **21** (2014), no. 5, p. 985–1014.

[Del68] P. Deligne – « Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1968), no. 35, p. 259–278.

[Del71] P. Deligne – « Théorie de Hodge. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1971), no. 40, p. 5–57.

[EKPR12] P. Eyssidieux, L. Katzarkov, T. Pantev & M. Ramachandran – « Linear Shafarevich conjecture », *Ann. of Math. (2)* **176** (2012), no. 3, p. 1545–1581.

[Eys04] P. Eyssidieux – « Sur la convexité holomorphe des revêtements linéaires réductifs d'une variété projective algébrique complexe », *Invent. Math.* **156** (2004), no. 3, p. 503–564.

[Eys11] ______, « Lectures on the Shafarevich conjecture on uniformization », in *Complex manifolds, foliations and uniformization*, Panor. Synthèses, vol. 34/35, Soc. Math. France, Paris, 2011, p. 101–148.

[GPP11] R. V. Gurjar, S. Paul & B. P. Purnaprajna – « On the fundamental group of hyperelliptic fibrations and some applications », *Invent. Math.* **186** (2011), no. 2, p. 237–254.

[Gri71] P. A. Griffiths – « Complex-analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties », *Ann. of Math. (2)* **94** (1971), p. 21–51.

[Gro89] M. Gromov – « Sur le groupe fondamental d'une variété kählérienne », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), no. 3, p. 67–70.

[Gro91] M. Gromov – « Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory », *J. Differential Geom.* **33** (1991), no. 1, p. 263–292.

[GS75] P. Griffiths & W. Schmid – « Recent developments in Hodge theory : a discussion of techniques and results », in *Discrete subgroups of Lie groups and applicatons to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973)*, Oxford Univ. Press, Bombay, 1975, p. 31–127.

[GS85] R. V. Gurjar & A. R. Shastri – « Covering spaces of an elliptic surface », *Compositio Math.* **54** (1985), no. 1, p. 95–104.

[GS92] M. Gromov & R. Schoen – « Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 76, p. 165–246.

[Hai87] R. M. Hain – « The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties. I », *K-Theory* **1** (1987), no. 3, p. 271–324.

[Hit87] N. J. Hitchin – « The self-duality equations on a Riemann surface », *Proc. London Math. Soc. (3)* **55** (1987), no. 1, p. 59–126.

[HP13a] A. Höring & T. Peternell – « Minimal models for Kähler threefolds », To appear in *Invent. Math.*, 2013.

[HP13b] ______, « Mori fibre spaces for Kähler threefolds », To appear in *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* : Kodaira Centennial Issue., 2013.

[HPR13] A. Höring, T. Peternell & I. Radloff – « Uniformisation in dimension four : towards a conjecture of Iitaka », *Math. Z.* **274** (2013), no. 1-2, p. 483–497.

[Iit72] S. Iitaka – « On algebraic varieties whose universal covering manifolds are complex affine 3-spaces », *Bull. Amer. Math. Soc.* **78** (1972), p. 737–740.

[Kan92] *Flips and abundance for algebraic threefolds* – Société Mathématique de France, Paris, 1992, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry held at the University of Utah, Salt Lake City, Utah, August 1991, Astérisque No. 211 (1992).

[Kat97] L. Katzarkov – « On the Shafarevich maps », in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., 1997, p. 173–216.

[Kaw81] Y. Kawamata – « Characterization of abelian varieties », *Compositio Math.* **43** (1981), no. 2, p. 253–276.

[KO75] S. Kobayashi & T. Ochiai – « Meromorphic mappings onto compact complex spaces of general type », *Invent. Math.* **31** (1975), no. 1, p. 7–16.

[Kob98] S. Kobayashi – *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 318, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Kod63] K. Kodaira – « On compact analytic surfaces. II, III », *Ann. of Math. (2) 77 (1963), 563–626 ; ibid.* **78** (1963), p. 1–40.

[Kol87] J. Kollár – « Subadditivity of the Kodaira dimension : fibers of general type », in *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1987, p. 361–398.

[Kol93] ______, « Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties », *Invent. Math.* **113** (1993), no. 1, p. 177–215.

[KP12] J. Kollár & J. Pardon – « Algebraic varieties with semialgebraic universal cover », *J. Topol.* **5** (2012), no. 1, p. 199–212.

[KS93] N. J. Korevaar & R. M. Schoen – « Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets », *Comm. Anal. Geom.* **1** (1993), no. 3-4, p. 561–659.

[KS97] ______, « Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces », *Comm. Anal. Geom.* **5** (1997), no. 2, p. 333–387.

[Lie78] D. I. Lieberman – « Compactness of the Chow scheme : applications to automorphisms and deformations of Kähler manifolds », in *Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, Lecture Notes in Math., vol. 670, Springer, Berlin, 1978, p. 140–186.

[Lor06] F. Loray – « Pseudo-groupe d'une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux », 2006.

[Mil12] J. S. Milne – « Basic Theory of Affine Group Schemes. », disponible à `http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AGS.pdf`, 2012.

[Mok92] N. Mok – « Factorization of semisimple discrete representations of Kähler groups », *Invent. Math.* **110** (1992), no. 3, p. 557–614.

[Nak99a] N. Nakayama – « Compact Kähler manifolds whose universal covering spaces are biholomorphic to $\mathbb{C}^n$ », *RIMS* preprint, 1230, 1999.

[Nak99b] ———, « Projective algebraic varieties whose universal covering spaces are biholomorphic to $\mathbf{C}^n$ », *J. Math. Soc. Japan* **51** (1999), no. 3, p. 643–654.

[Nak02] ———, « Local structure of an elliptic fibration », in *Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 35, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, p. 185–295.

[Nee89] A. Neeman – « Ueda theory : theorems and problems », *Mem. Amer. Math. Soc.* **81** (1989), no. 415, p. vi+123.

[NS95] Y. Namikawa & J. H. M. Steenbrink – « Global smoothing of Calabi-Yau threefolds », *Invent. Math.* **122** (1995), no. 2, p. 403–419.

[Rei87] M. Reid – « Tendencious survey of 3-folds », in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, p. 333–344.

[Sad99] P. Sad – « Regular foliations along curves », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **8** (1999), no. 4, p. 661–675.

[Sam86] J. H. Sampson – « Applications of harmonic maps to Kähler geometry », in *Complex differential geometry and nonlinear differential equations (Brunswick, Maine, 1984)*, Contemp. Math., vol. 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 125–134.

[Sel60] A. Selberg – « On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces », in *Contributions to function theory (internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960, p. 147–164.

[Sha13] I. R. Shafarevich – *Basic algebraic geometry. 2*, third éd., Springer, Heidelberg, 2013, Schemes and complex manifolds, Translated from the 2007 third Russian edition by Miles Reid.

[Sie08] C. L. Siegel – *Analytic functions of several complex variables*, Kendrick Press, Heber City, UT, 2008, Lectures delivered at the Institute for Advanced Study, 1948–1949, With notes by P. T. Bateman, Reprint of the 1950 edition.

[Sim92] C. T. Simpson – « Higgs bundles and local systems », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1992), no. 75, p. 5–95.

[Sim93] C. Simpson – « Subspaces of moduli spaces of rank one local systems », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **26** (1993), no. 3, p. 361–401.

[Sim94a] C. T. Simpson – « Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1994), no. 79, p. 47–129.

[Sim94b] ———, « Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1994), no. 80, p. 5–79.

[Sta65] J. Stallings – « Homology and central series of groups », *J. Algebra* **2** (1965), p. 170–181.

[Tak03] S. Takayama – « Local simple connectedness of resolutions of log-terminal singularities », *Internat. J. Math.* **14** (2003), no. 8, p. 825–836.

[Tol93] D. Toledo – « Projective varieties with non-residually finite fundamental group », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1993), no. 77, p. 103–119.

[Tsu96] H. Tsuji – « On the universal covering of projective manifolds of general type », *Kodai Math. J.* **19** (1996), no. 1, p. 137–143.

[Ued83] T. Ueda – « On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle », *J. Math. Kyoto Univ.* **22** (1982/83), no. 4, p. 583–607.

[Uen75] K. Ueno – *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439, Springer-Verlag, 1975, Notes written in collaboration with P. Cherenack.

[Vie83] E. Viehweg – « Weak positivity and the additivity of the Kodaira dimension for certain fibre spaces », in *Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1983, p. 329–353.

[Voi02] C. Voisin – *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 10, Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[Voi04] ———, « On the homotopy types of compact Kähler and complex projective manifolds », *Invent. Math.* **157** (2004), no. 2, p. 329–343.

[Voi06] ———, « On the homotopy types of Kähler manifolds and the birational Kodaira problem », *J. Differential Geom.* **72** (2006), no. 1, p. 43–71.

[Zuo94] K. Zuo – « Factorizations of nonrigid Zariski dense representations of π_1 of projective algebraic manifolds », *Invent. Math.* **118** (1994), no. 1, p. 37–46.

[Zuo96] ———, « Kodaira dimension and Chern hyperbolicity of the Shafarevich maps for representations of π_1 of compact Kähler manifolds », *J. Reine Angew. Math.* **472** (1996), p. 139–156.

[Zwo98] W. Zwonek – « On an example concerning the Kobayashi pseudodistance », *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), no. 10, p. 2945–2948.

Benoît Claudon, Université de Lorraine, Institut Élie Cartan Nancy, UMR 7502, B.P. 70239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
E-mail : Benoit.Claudon@univ-lorraine.fr