

Une caractérisation des variétés algébriques affines en terme d'exhaustion psh et de croissance du volume

Benoît Claudon

19 septembre 2003

1 Introduction

En ce qui concerne la caractérisation des variétés algébriques (sur \mathbb{C}), le théorème de plongement de Kodaira traite le cas des variétés projectives et donne un critère en terme d'existence de fibrés positifs ou, de façon équivalente (via le lemme de Weyl), en terme de métrique kählérienne; plus précisément :

Théorème 1.1 (Kodaira) *Soit X une variété complexe compacte; il y a alors équivalence entre :*

1. X est projective
2. X porte un fibré ample
3. X possède une métrique de Hodge (c'est à dire une métrique kählérienne de classe entière).

On peut également remarquer que le théorème de Chow permet d'ajouter que X est alors algébrique.

L'objet de ce travail est d'étudier une caractérisation possible des variétés algébriques affines (c'est à dire plongées dans \mathbb{C}^N). Le résultat qu'il m'a été proposé d'étudier décrit une caractérisation en terme d'exhaustion de la variété; en voici l'énoncé :

Théorème 1.2 *Soit X une variété analytique complexe, connexe, de dimension n . Alors X est biholomorphe à une variété algébrique affine si et seulement si X possède une exhaustion φ strictement psh de classe C^∞ telle que :*

- (i) $Vol(X) = \int_X (dd^c \varphi)^n < +\infty$
- (ii) la courbure de Ricci de la métrique $\beta = dd^c(e^\varphi)$ admet une minoration de la forme $Ricci(\beta) \geq -\frac{1}{2}dd^c\psi$ avec $\psi \in C^0(X)$, $\psi \leq A\varphi + B$ ($A, B > 0$)
- (iii) φ n'a qu'un nombre fini de points critiques

Il est assez facile de voir que l'on peut modifier les hypothèses (ii) et (iii) pour obtenir une nouvelle version plus forte du théorème 1.2, avec une condition intégrale sur le potentiel de courbure :

Théorème 1.3 *Le théorème précédent reste vrai sous la condition d'existence de fonctions φ, ψ telles que :*

- (i') $Vol(X) = \int_X (dd^c \varphi)^n < +\infty$
- (ii') $Ricci(\beta) \geq -\frac{1}{2}dd^c\psi$ et $\int_X \exp(c\psi - A\varphi)\beta^n < +\infty$ où ($A, c > 0$)
- (iii') les espaces de cohomologie $H^{2q}(X)$ sont de dimension finie

Le cheminement que nous allons suivre sera le suivant :

X algébrique \Rightarrow conditions 1.2 \Rightarrow conditions 1.3 $\Rightarrow \exists X_{alg}$ avec X biholomorphe à X_{alg} .

Comme il se doit, la dernière flèche est la plus ardue à établir et, pour ce faire, nous aurons besoin de quelques propriétés des exhaustions psh et en particulier des mesures que nous allons leur associer.

2 Mesures de Monge-Ampère et croissance des fonctions holomorphes

2.1 Mesures de Monge-Ampère associées à une exhaustion psh

Soit X un espace de Stein (de dimension n), V une fonction psh sur X et des fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ psh sur X et localement bornées; par récurrence, on peut donc définir le courant :

$dd^c V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_k := dd^c(\varphi_k dd^c V \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_{k-1})$ et on vérifie aisément que le courant ainsi obtenu est positif fermé.

Pour justifier certaines définitions mais aussi pour obtenir des estimations en masse, on dispose des inégalités de Chern-Levine-Nirenberg. Si ρ est strictement psh C^∞ , telle que $\Omega = \{\rho < 0\} \subset\subset X$ et $d\rho \neq 0$ sur $\partial\Omega$, on note alors (pour $0 \leq k \leq n$):

$$\beta_k := |\rho|^{k+1} (dd^c \rho)^{n-k} + (k+1)|\rho|^k d\rho \wedge d^c \rho \wedge (dd^c \rho)^{n-k-1}$$

Théorème 2.1 *Si V, V_1, \dots, V_k sont des fonctions psh sur Ω avec $V \leq 0$ et $V_1, \dots, V_k \geq 0$, on a :*

(i) $\int_{\Omega} \beta_{k+1} \wedge dd^c V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_k \leq C_1 \|V\|_1 \|\varphi_1\|_{\infty} \dots \|\varphi_k\|_{\infty}$

(ii) $\int_{\Omega} \beta_k \wedge |V| \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_k \leq C_2 \|V\|_1 \|\varphi_1\|_{\infty} \dots \|\varphi_k\|_{\infty}$

(iii) $\int_{\Omega} \beta_k \wedge dd^c V_1 \wedge \dots \wedge dd^c V_k \leq C_3 \|V_1\|_k \dots \|V_k\|_k$

(où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes ne dépendant que de k et où les normes L^p sont prises par rapport à la mesure β_0).

Ces trois inégalités se démontrent par récurrence sur k ; voyons par exemple comment établir le point (iii) dans le cas C^∞ . On suppose d'abord $V_1 = \dots = V_k = v \geq 0$; l'inégalité $(dd^c v^{\frac{k}{k-1}})^{k-1} \geq v(\frac{k}{k-1} dd^c v)^{k-1}$ combinée à une intégration par parties donne :

$$\int_{\Omega} \beta_k \wedge (dd^c v)^k \leq 2(k+1) \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \int_{\Omega} \beta_{k-1} \wedge (dd^c v^{\frac{k}{k-1}})^{k-1}$$

d'où, par récurrence sur k :

$$\int_{\Omega} \beta_k \wedge (dd^c v)^k \leq 2^k (k+1)! \frac{(k-1)!}{k^{k-1}} \int_{\Omega} \beta_0 v^k.$$

On applique alors cette inégalité à la fonction psh $v = \frac{V_1}{\|V_1\|_k} + \dots + \frac{V_k}{\|V_k\|_k}$ pour finalement obtenir :

$$\int_{\Omega} \beta_k \wedge dd^c V_1 \wedge \dots \wedge dd^c V_k \leq 2^k (k+1)! \|V_1\|_k \dots \|V_k\|_k.$$

Les démonstrations des deux premiers points sont similaires à celle-ci (bien que légèrement plus fastidieuses).

Une autre propriété, également très importante de l'opérateur de Monge-Ampère est sa continuité dans le sens suivant :

Théorème 2.2 *Soit $(\varphi_j^m)_{m \geq 0}$ une suite de fonctions (pour $1 \leq j \leq k$) psh et localement bornées qui converge en décroissant vers φ_j supposée localement bornée (et psh comme limite décroissante de fonctions psh); soit de plus $(V^m)_{m \geq 0}$ une suite décroissante de fonctions psh convergeant vers $V \not\equiv -\infty$. On dispose alors des convergences faibles (dans l'espace des mesures) suivantes :*

(i) $dd^c V^m \wedge dd^c \varphi_1^m \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_k^m \rightharpoonup dd^c V \wedge dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_k$

(ii) $V^m dd^c \varphi_1^m \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_k^m \rightharpoonup V dd^c \varphi_1 \wedge \dots \wedge dd^c \varphi_k$

On considère alors la situation suivante : $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ , psh et exhaustive ; dans toute la suite nous noterons : $B(r) := \{z \in X | \varphi(z) < r\}$, $\overline{B}(r) := \{z \in X | \varphi(z) \leq r\}$ et $S(r) := \{z \in X | \varphi(z) = r\}$. On pose également : $\alpha = dd^c \varphi$, $\beta = dd^c(e^\varphi)$ et $\varphi_r = \max(\varphi, r)$. φ_r est donc psh continue et le courant $(dd^c \varphi_r)^n$ est bien défini avec ci dessus.

Définition 2.1 On appelle mesures de Monge-Ampère associées à φ la famille de mesures positives (μ_r) portées par $S(r)$ définies par :

$$\mu_r = (dd^c \varphi_r)^n - \mathbf{1}_{X \setminus B(r)} (dd^c \varphi)^n$$

Il me semble ici indispensable de préciser que la situation étudiée est très restrictive ; en toute généralité, on peut en effet considérer une fonction $\varphi : X \rightarrow [-\infty; +\infty]$ seulement continue (mais toujours psh exhaustive). Dans ce cadre, on comprend mieux la nécessité d'introduire les fonctions φ_r pour se ramener au cas de fonctions L_{loc}^∞ . Je me suis limité à la situation présente car c'est celle à laquelle nous serons confronté.

Pour compléter cette définition, voyons maintenant quelques propriétés de ces mesures et plus particulièrement quelques représentations intéressantes. La formule suivante (dite de Lelong-Jensen) relie en effet les mesures μ_r à la forme α^n :

Théorème 2.3 Si V est psh alors V est μ_r -intégrable (pour tout r) et on a de plus :

$$\int_{-\infty}^r dt \int_{B(t)} dd^c V \wedge \alpha^{n-1} = \mu_r(V) - \int_{B(r)} V \alpha^n$$

Il est à noter que l'intégrabilité de V par rapport à μ_r vient directement du théorème 2.1. La démonstration de l'égalité ci-dessus s'effectue en deux temps : on suppose d'abord V minorée sur $B(r)$ pour assurer la finitude des deux membres de 2.3. Les théorèmes de Fubini et de Stokes permettent alors d'établir la formule précédente. Pour passer au cas général, on utilise le fait que, comme X est de Stein, toute fonction psh est limite décroissante d'une suite de fonctions C^∞ psh ; on passe alors à la limite dans la formule (connue pour V psh C^∞) grâce au théorème 2.2.

On dispose également d'une représentation de μ_r en terme de forme volume, à savoir :

Proposition 2.1 Si $d\varphi(x) \neq 0$ en un point x de la surface de niveau $\{\varphi(x) = r\}$, la mesure μ_r est alors définie (au moins au voisinage de x) par la $(2n-1)$ forme volume $\alpha^{n-1} \wedge d^c \varphi|_{S(r)}$

Cette proposition est encore une fois une conséquence du théorème de Stokes ; les deux résultats suivants (qui s'en déduisent) nous serons forts utiles :

Proposition 2.2 (i) Si $h \in C_c^0(X)$ alors $\int_{\mathbb{R}} \mu_r(h) dr = \int_X h \alpha^{n-1} \wedge d\varphi \wedge d^c \varphi$

(ii) Si $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe croissante (C^∞), on note $\varphi^* = \chi \circ \varphi$ et (μ_r^*) la famille associée à φ^* ; on a alors $\mu_{\chi(r)}^* = \chi'(r)^n \mu_r$

Ces résultats peuvent bien entendu être énoncés dans le cadre beaucoup plus général cité plus haut ; ils sont obtenus en élargissant le cas traité ici par des procédés de passage à la limite (reposant une fois de plus sur le théorème 2.2).

2.2 Croissance du volume et lien avec les fonctions holomorphes

Dans la suite, on notera $\tau(r) = \int_{B(r)} \alpha^n$; on peut remarquer que la formule 2.3 appliquée à $V \equiv 1$ donne alors $\tau(r) = \|\mu_r\|$. On fait de plus l'hypothèse suivante sur la croissance du volume de Monge-Ampère :

$$(H) : \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\tau(r)}{r} = 0$$

Nous allons voir qu'en conjuguant l'hypothèse (H) la formule 2.3, on obtient une inégalité très intéressante : soit en effet V psh, $r_0 < r$ et $m \geq 1$ un entier ; en appliquant la formule 2.3 à $V_m = \max(V, -m)$, il vient :

$$(r - r_0) \int_{B(r_0)} dd^c V_m \wedge \alpha^{n-1} \leq \int_{r_0}^r dt \int_{B(t)} dd^c V_m \wedge \alpha^{n-1} \leq \int_{-\infty}^r dt \int_{B(t)} dd^c V_m \wedge \alpha^{n-1} = \mu_r(V_m) - \int_{B(r)} V \alpha^n \leq \mu_r(V_+) + m\tau(r)$$

D'où, en divisant par r et passant à la limite inférieure (sur r), on obtient :

$$\int_{B(r_0)} dd^c V_m \wedge \alpha^{n-1} \leq \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \mu_r(V_+)$$

et donc, comme ceci est valable pour tout m et pour tout r_0 et comme $(V_m)_{m \geq 1}$ converge en décroissant vers V , le théorème 2.2 donne :

Proposition 2.3 *Pour $V \in PSH(X)$, $\int_X dd^c V \wedge \alpha^{n-1} \leq \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \mu_r(V_+)$.*

On va maintenant effectuer le lien avec les fonctions holomorphes ; pour ce faire, on va définir une classe de fonctions dont la croissance à l'infini est, en quelque sorte, contrôlée par φ .

Définition 2.2 – *Pour $f \in \mathcal{O}(X)$, on définit le degré de f par :*

$$\delta_\varphi(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \mu_r(\text{Log}_+ |f|)$$

- on note $A_\varphi(X)$ l'algèbre (intègre) des fonctions holomorphes de degré fini (dites fonctions φ -polynômiales) et $K_\varphi(X)$ son corps de fractions (dites fonctions φ -rationnelles).

Le fait que $A_\varphi(X)$ soit une algèbre vient des deux inégalités suivantes :

- $\text{Log}_+ |fg| \leq \text{Log}_+ |f| + \text{Log}_+ |g|$
- $\text{Log}_+ |f + g| \leq \text{Log}_+ |f| + \text{Log}_+ |g| + \text{Log } 2$

et de l'hypothèse de croissance (H). Les deux inégalités précédentes se réécrivent alors :

$$\delta_\varphi(fg) \leq \delta_\varphi(f) + \delta_\varphi(g) \text{ et } \delta_\varphi(f + g) \leq \delta_\varphi(f) + \delta_\varphi(g), \quad \forall (f, g) \in \mathcal{O}(X).$$

Si $f \in \mathcal{O}(X)$ (et $f \neq 0$), l'équation de Lelong-Poincaré affirme alors que $\frac{1}{2\pi} dd^c \text{Log } |f| = [Z_f]$ et donc en reportant dans 2.3, on a : $2\pi \int_X [Z_f] \wedge \alpha^{n-1} \leq \delta_\varphi(f)$. On peut améliorer ce résultat de la manière suivante : si $a \in X$ (fixé), on considère des coordonnées locales (z_1, \dots, z_n) centrées en a telles que $\{|z| < r\} \subset B(r')$ (avec $r < r'$). Soient alors $r < r_1 < r_2 < r'$; on peut donc choisir $\epsilon > 0$ assez petit pour que la fonction strictement psh $\varphi' = \max(\varphi, r_1 + \epsilon|z|^2 + \sqrt{\epsilon})$ vérifie :

$$\varphi' = \begin{cases} \varphi & \text{au voisinage de } S(r_2) \\ r_1 + \epsilon|z|^2 + \sqrt{\epsilon} & \text{sur } B(r_1) \end{cases}$$

En appliquant le théorème de Stokes, on a alors pour $f \in \mathcal{O}(X)$:

$$\begin{aligned} \epsilon^{n-1} \text{Ord}_a(f) &\leq \epsilon^{n-1} \int_{\{|z| < r\}} [Z_f] \wedge (dd^c |z|^2)^{n-1} \leq \int_{B(r_1)} [Z_f] \wedge (dd^c |z|^2)^{n-1} = \int_{B(r_1)} [Z_f] \wedge (dd^c \varphi')^{n-1} \\ &\leq \int_{B(r_2)} [Z_f] \wedge (dd^c \varphi')^{n-1} = \int_{B(r_2)} [Z_f] \wedge \alpha^{n-1} \leq \int_X [Z_f] \wedge \alpha^{n-1} \leq \frac{1}{2\pi} \delta_\varphi(f) \end{aligned}$$

la première inégalité étant une conséquence des propriétés des nombres de Lelong. On a donc montré le :

Corollaire 2.1 *Si $a \in X$ (fixé), il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de a telle que :*

$$\forall f \in A_\varphi(X) (f \neq 0), \text{Ord}_a(f) \leq C \delta_\varphi(f)$$

La constante C ne dépendant que du point a , cette inégalité va nous permettre d'obtenir le premier résultat d'algébricité. En effet, soit $(f_1, \dots, f_N) \in A_\varphi(X)$ que l'on suppose algébriquement indépendante; soit k un entier assez grand et $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ non nul vérifiant de plus $\deg_{z_j} P \leq k$. On a alors: $\delta_\varphi(P(f_1, \dots, f_N)) \leq k \sum_{j=1}^N \delta_\varphi(f_j)$ et donc, avec le corollaire 2.1, on obtient: $\text{Ord}_a(P(f_1, \dots, f_N)) \leq Ck \sum_{j=1}^N \delta_\varphi(f_j)$. Si on pose $s = [Ck \sum_{j=1}^N \delta_\varphi(f_j)]$, un petit argument d'algèbre linéaire nous amène à la majoration:

$$(k+1)^N \leq C_{n+s}^s \leq \frac{(n+s)^n}{n!}$$

et donc, lorsque $k \rightarrow +\infty$, on obtient:

Théorème 2.4 *Le corps $K_\varphi(X)$ vérifie $\text{degtr}_{\mathbb{C}}(K_\varphi(X)) \leq n$; de plus, dans le cas où $\text{degtr}_{\mathbb{C}}(K_\varphi(X)) = n$, $K_\varphi(X)$ est alors une extension de type finie de \mathbb{C} .*

La deuxième partie du théorème s'établit en montrant que, dans ce cas, $[K_\varphi(X) : \mathbb{C}(f_1, \dots, f_n)] < +\infty$. Pour ce faire, on majore le degré d'un élément de $K_\varphi(X)$ sur $\mathbb{C}(f_1, \dots, f_n)$ en utilisant à nouveau le corollaire 2.1.

Pour terminer, nous allons étudier un exemple montrant que la croissance du volume est un bon indicateur d'algébricité. Soit en effet X un ensemble analytique irréductible de dimension n dans \mathbb{C}^N et on considère $\varphi(z) = \text{Log}(1 + |z|^2)$ de sorte que α s'identifie à la métrique de Fubini-Study de \mathbb{P}^N et β à la métrique standard de \mathbb{C}^N . D'autre part, la proposition 2.2 et la formule 2.3 donnent:

$$\int_{X \cap \{|z| < r\}} \beta^n = (1+r^2)^n \int_{X \cap \{|z| < r\}} \alpha^n.$$

Si on fait l'hypothèse que $\text{Vol}_\alpha(X) < +\infty$, on constate alors aisément que les polynômes (en restriction à X) fournissent des éléments de $A_\varphi(X)$. On en déduit l'existence d'un morphisme $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N] \rightarrow A_\varphi(X)$ et si on note I son noyau et $Y = \mathbb{V}(I)$, le théorème 2.4 donne finalement $X = Y$; d'où:

Théorème 2.5 *Si X est un ensemble analytique irréductible dans \mathbb{C}^N de volume projectif fini, alors X est algébrique.*

Ce cas particulier montre la pertinence de l'hypothèse de finitude du volume. Mais même lorsque X n'est plus plongée dans \mathbb{C}^N , les autres hypothèses du théorème 1.3 vont, comme nous allons le voir, nous fournir des fonctions de $A_\varphi(X)$ pour "déplier" la variété X .

3 Caractérisation des variétés algébriques affines

3.1 Nécessité des conditions du théorème 1.2

Si X est une sous-variété algébrique affine (irréductible et lisse) de \mathbb{C}^N de dimension n , on dispose de la fonction d'exhaustion $\text{Log}(1 + |z|^2)$. Comme α s'identifie à la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif \mathbb{P}^N , la condition de finitude du volume est alors immédiate: l'adhérence \overline{X} de X dans \mathbb{P}^N étant compacte, on a bien

$$\int_X \alpha^n < +\infty$$

De plus, des arguments de théorie de Morse (que nous admettrons ici) permettent de démontrer que la cohomologie de X est finie.

Quant à la minoration de la courbure de Ricci, on peut obtenir une expression explicite de ψ : Soient (P_1, \dots, P_m) un système de générateurs de l'idéal $\mathbb{I}(X)$ et $s = N - n = \text{codim}(X)$; pour $K = \{k_1 < \dots < k_s\} \subset \{1..m\}$ et $L = \{l_1 < \dots < l_s\} \subset \{1..N\}$ des multi-indices de longueur s , on pose:

$$J_{K,L}(z) = \det\left(\frac{\partial P_{k_i}}{\partial z_{l_j}}(z)\right)_{1 \leq i, j \leq s} \quad \text{et} \quad \psi(z) = \text{Log} \left(\sum_{|K|=|L|=s} |J_{K,L}(z)|^2 \right).$$

Les fonctions $J_{K,L}$ étant polynômiales, on a bien les estimations souhaitées pour ψ . D'autre part, un calcul explicite de la courbure de Ricci et de $dd^c\psi$ montre qu'on a bien l'inégalité attendue, c'est à dire :

$$\text{Ricci}(\beta|_X) \geq -\frac{1}{2}dd^c\psi$$

Le sens direct venant d'être démontré, il nous reste maintenant à montrer la suffisance des conditions du théorème 1.3. On suppose donc données sur X une exhaustion φ strictement psh C^∞ (donc X est de Stein) et une fonction ψ continue vérifiant :

$$\begin{aligned} \text{Vol}(X) &= \int_X (dd^c\varphi)^n < +\infty \\ \text{Ricci}(\beta) &\geq -\frac{1}{2}dd^c\psi \text{ et } \int_X \exp(c\psi - A\varphi)\beta^n < +\infty \text{ où } (A, c > 0) \end{aligned}$$

On suppose en outre que les espaces de cohomologie $H^{2q}(X)$ sont de dimension finie.

3.2 Conséquences des estimations L^2

Nous allons maintenant voir que les techniques L^2 assurent l'existence (sous les hypothèses du théorème 1.3) de fonctions de $A_\varphi(X)$. Aux nombreuses hypothèses qui ont déjà été faites, on en ajoute une concernant le signe de φ : on supposera en effet $\varphi \geq 0$ (ce qui simplifiera quelques points). Dans la suite on considèrera les espaces fonctionnels suivants :

Définition 3.1 *Pour $0 < p < +\infty$, on note*

$$L_\varphi^p(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable} \mid \int_X |f|^p e^{-C\varphi} \beta^n < +\infty, C > 0\}$$

On pose de plus $L_\varphi^0(X) = \bigcup_{p>0} L_\varphi^p(X)$ et $A_\varphi^p(X) = L_\varphi^p(X) \cap \mathcal{O}(X)$

Avec cette définition, l'inégalité de Hölder et l'hypothèse de finitude du volume montre que $L_\varphi^0(X)$ est alors une algèbre unitaire intègre et de plus, on montre facilement que $A_\varphi^0(X)$ est une sous-algèbre intégralement close de $L_\varphi^0(X)$. Enfin, le lemme suivant montre que l'algèbre $A_\varphi^0(X)$ des fonctions holomorphes satisfaisant une condition L^p , $p > 0$, est une sous-algèbre de l'algèbre $A_\varphi(X)$:

Lemme 3.1 *(i) Si $f \in A_\varphi^0(X)$ avec $\int_X |f|^p e^{-C\varphi} \beta^n < +\infty$ alors*

$$\delta_\varphi(f) \leq \frac{C-n}{p} \text{Vol}(X) \quad (\text{donc } A_\varphi^0(X) \subset A_\varphi(X))$$

(ii) si de plus $0 < p \leq 2$, $\int_X |df|_\beta^p e^{(p/2-C)\varphi} \beta^n < +\infty$ (donc $|df|_\beta^p \in L_\varphi^0(X)$).

Le point (i) s'obtient en remarquant que $\beta^n \geq e^{n\varphi}(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d\varphi \wedge d^c\varphi$ et donc, avec la proposition 2.2, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \mu_t(|f|^p) e^{(n-C)t} dt = \int_X |f|^p e^{(n-C)\varphi} (dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d\varphi \wedge d^c\varphi \leq \int_X |f|^p e^{-C\varphi} \beta^n < +\infty$$

d'où on déduit :

$$\mu_r(|f|^p) \leq C_1 e^{(n-C)r} \quad (\text{avec } C_1 > 0).$$

En appliquant l'inégalité de Jensen à $\frac{\mu_r}{\tau(r)}$ et à la fonction concave $t \rightarrow \text{Log}(1+t)$ et en utilisant le fait que $\tau(r) \leq \text{Vol}(X)$, on a bien la majoration annoncée.

La démonstration du point (ii) est elle un peu plus technique.

Un raisonnement classique, utilisant les estimations L^2 , permet de plus d'établir le résultat d'interpolation suivant :

Proposition 3.1 *Soit $\{x_1, \dots, x_m\}$ des points de X et ρ une fonction psh telle que $e^{-\rho}$ soit intégrable au voisinage de chaque x_j . Alors, pour tout entier s , il existe $f \in \mathcal{O}(X)$ telle que*

- f a un jet fixé d'ordre s en chaque x_j
- $\int_X |f|^2 e^{-\rho - \psi - C_1 \varphi} \beta^n < +\infty$ avec $C_1 \geq 0$ (ne dépendant que de s et des points x_j)

En particulier, si $\rho \equiv 0$, comme $e^\psi \in L_\varphi^0(X)$, on aura $f \in A_\varphi^0(X)$ (et même $f \in A_\varphi^p(X)$ avec $p \leq 2$). Appliquons ce résultat en un point x_0 de X ; on peut donc trouver $(f_1, \dots, f_n) \in A_\varphi^0(X) (\subset A_\varphi(X))$ dont le jet en x_0 vérifie: $J(f_j)_{x_0} = z_j$ et donc $df_1 \wedge \dots \wedge df_n(x_0) \neq 0$. Ces fonctions sont donc algébriquement indépendantes et on en déduit que:

$$\text{degr}_{\mathbb{C}}(K_\varphi(X)) = n \text{ et } K_\varphi(X) \text{ est une extension de type finie.}$$

De plus, l'équation de Lelong-Poincaré et l'hypothèse de minoration de la courbure montrent que la fonction $\rho = \psi + \text{Log } |df_1 \wedge \dots \wedge df_n|_\beta^2$ est psh sur X et donc, en appliquant à nouveau la proposition 3.1 en x_0 , on trouve: $f_{n+1} \in \mathcal{O}(X)$ avec $f_{n+1}(x_0) = 1$ et

$$\int_X |f_{n+1}|^2 |df_1 \wedge \dots \wedge df_n|_\beta^{-2} e^{-2\psi - C\varphi} \beta^n < +\infty$$

De cette majoration, on déduit les deux points essentiels suivants :

1. $\{x \in X \mid df_1 \wedge \dots \wedge df_n(x) = 0\} \subset f_{n+1}^{-1}(0)$
2. $f_{n+1} \in A_\varphi^0(X)$

On constate que la proposition 3.1 nous a déjà fourni un bon nombre de fonctions φ -polynômiales; en fait en raisonnant par récurrence, on peut construire des fonctions $(f_1, \dots, f_N) \in A_\varphi^0(X)$ telles que :

Théorème 3.1 *Il existe $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété algébrique affine irréductible de dimension n telle que*

- (i) $F = (f_1, \dots, f_N) : X \rightarrow \mathbb{C}^N$ envoie X dans M
- (ii) F est un isomorphisme analytique de $X \setminus f_{n+1}^{-1}(0)$ sur un ouvert lisse de M .

La construction, comme il est précisé plus haut, se fait par récurrence: on "ajoute" des fonctions pour rendre l'immersion F injective. Le fait que le procédé s'arrête vient principalement du fait que $[K_\varphi(X) : \mathbb{C}(f_1, \dots, f_n)] < +\infty$.

3.3 Quasi-surjectivité de F

Il reste maintenant essentiellement deux problèmes à surmonter :

- (a) montrer que l'ouvert $F(X \setminus f_{n+1}^{-1}(0))$ est un ouvert de Zariski de M
- (b) passer de $X \setminus f_{n+1}^{-1}(0)$ à X .

Supposons pour l'instant le point (a) démontré; il est à noter que l'hypothèse de finitude de la cohomologie de X n'a pas encore été utilisée. C'est elle qui va nous permettre d'établir le point (b).

En effet, si $x_0 \in X$ on sait qu'il existe $F^{(0)} = (f_1^{(0)}, \dots, f_{N_0}^{(0)}) : X \rightarrow \mathbb{C}^{N_0}$ et $g_0 = f_{n+1}^{(0)}$ telles que $x_0 \in X \setminus g_0^{-1}(0)$ et que cet ouvert soit isomorphe par $F^{(0)}$ à un ouvert de Zariski d'une sous-variété (affine irréductible) de \mathbb{C}^{N_0} . On peut donc recouvrir X par de tels ouverts $(X \setminus g_k^{-1}(0))_{k \geq 0}$ et on considère les morphismes produits $F_k = F^{(0)} \times \dots \times F^{(k)} : X \rightarrow \mathbb{C}^{N_0 + \dots + N_k}$ et on note $Y_k = \bigcap_{j \leq k} Y_j$ et $X_k = X \setminus Y_k = \bigcup_{j \leq k} (X \setminus g_j^{-1}(0))$. Dans cette situation :

- F_k envoie X dans M_k variété algébrique affine irréductible de dimension n
- $F_k(X_k)$ est un ouvert de Zariski de M_k .

Le lemme suivant permet d'affirmer que la suite $(X_k)_{k \geq 0}$ est stationnaire.

Lemme 3.2 *Soit X de dimension n et Y un ensemble analytique de X de dimension $\leq p$. En posant $d = n - p$, on a*

- $H^q(X, X \setminus Y; \mathbb{R}) = 0$ si $q < 2d$
- $H^{2d}(X, X \setminus Y; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^J$ où $(Y_j)_{j \in J}$ désigne les composantes irréductibles de Y de dimension p .

On déduit facilement de ce lemme (et de l'hypothèse (iii')) du théorème 1.3) l'existence d'un entier l tel que $X = X_l$; on pose alors $F = F_l$, $N = N_0 + \dots + N_l$ et $M = M_l$. $F : X \rightarrow M$ est donc un biholomorphisme de X sur un ouvert de Zariski de M .

La démonstration du point (a) étant assez longue, nous nous contenterons ici d'en donner les grandes idées.

Tout d'abord, reprenons la situation; on a $F : X \rightarrow \mathbb{C}^N$ avec $X \setminus f_{n+1}^{-1}(0)$ biholomorphe à un ouvert de M . Soit alors un polynôme $Q \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$ vérifiant :

- $Q \neq 0$ sur M
- $Q = z_{n+1}R$ (avec $R \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_N]$)
- le lieu singulier (M_s) de M vérifie $M_s \subset Q^{-1}(0)$

On pose $\hat{M} = M \setminus Q^{-1}(0)$, $\hat{X} = X \setminus Q(F)^{-1}(0) \subset X \setminus f_{n+1}^{-1}(0)$ de sorte que \hat{M} est lisse et $\hat{F} : \hat{X} \rightarrow \hat{M}$ est un biholomorphisme de \hat{X} sur l'ouvert $\Omega = \hat{F}(\hat{X})$.

On considère ensuite le courant T défini sur \hat{M} par $T = \hat{F}_*(dd^c\varphi)$ sur Ω et prolongé par 0 en dehors de Ω ; les estimations de masses de Chern-Levine-Nirenberg (théorème 2.1) permettent d'affirmer que T est un (1,1)-courant positif fermé vérifiant l'estimation

$$\int_{\hat{M}} T \wedge \omega^{n-1} < +\infty \quad (\omega \text{ métrique de Fubini-Study de } \mathbb{P}^N).$$

En admettant un résultat sur les courants à croissance minimale (c'est à dire vérifiant une telle inégalité) sur les variétés algébriques affines lisses, on obtient l'existence de V fonction psh sur \hat{M} et de u une (1,0)-forme C^∞ sur \hat{M} telles que :

1. $dd^cV \leq T$
2. $dd^cV - T = \bar{\partial}u$
3. $V(z) \leq C_1 \text{Log}(1 + |z|^2)$
4. $|u|_\omega \leq C_2(1 + |z|^2)^{C_3}$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes (positives).

La fonction $\tau = V - \hat{F}_*\varphi$ est alors psh sur \hat{M} avec $\hat{M} \setminus \Omega \subset \tau^{-1}(-\infty)$ (donc $\hat{M} \setminus \Omega$ est pluripolaire fermée). De plus la (1,0)-forme $h = \partial\tau + \frac{u}{2i}$ est holomorphe sur Ω . La fin de la démonstration consiste, en utilisant des estimations intégrales, à montrer que h se prolonge en une (1,0)-forme méromorphe rationnelle sur \hat{M} et que le plus grand ouvert de Zariski sur lequel h est holomorphe est en fait Ω . Pour finir, en chaque point $x \in X \setminus f_{n+1}^{-1}(0)$, on trouve un polynôme Q_x vérifiant les hypothèses mentionnées plus haut avec de plus $Q_x(F)(x) \neq 0$; comme $\Omega_x = F(X \setminus Q_x(F)^{-1}(0))$ est un ouvert de Zariski de M , il en est de même de

$$F(X \setminus f_{n+1}^{-1}(0)) = \bigcup_{x \in X \setminus f_{n+1}^{-1}(0)} \Omega_x.$$

3.4 Conclusion

On a pour l'instant établi le résultat suivant : il existe $F : X \rightarrow M \subset \mathbb{C}^N$ tel que F réalise un biholomorphisme entre X et Ω un ouvert de Zariski de M . On peut de plus supposer la variété M normale ; Ω étant de Stein (biholomorphe à X), son complémentaire est alors une hypersurface de M . En effet, si on avait $\text{codim}(M \setminus \Omega) \geq 2$, le théorème de prolongement de Riemann permettrait de prolonger les fonctions holomorphes sur Ω à M . Or, Ω est de Stein donc, en particulier, holomorphiquement convexe et on sait ainsi qu'il existe des fonctions holomorphes qui tendent vers l'infini au bord de Ω ; ceci étant en contradiction avec la possibilité de prolongement. $H = M \setminus \Omega$ est donc bien une hypersurface algébrique de M . Il nous reste donc à montrer que, dans cette situation, Ω est lui-même algébriquement isomorphe à une variété algébrique affine.

Si H est localement intersection complète, il n'est pas très difficile de constater que Ω est bien algébriquement isomorphe à une variété algébrique affine. Mais ce n'est malheureusement pas nécessairement le cas ; par contre, on peut observer que Ω est rationnellement convexe : si K est un compact de Ω , l'enveloppe

$$\hat{K} = \{x \in \Omega \mid |g(x)| \leq \sup_K |g|, \forall g \in R(\Omega)\}$$

est compact dans Ω .

Théorème 3.2 *Soit $M \subset \mathbb{C}^N$ une sous-variété algébrique affine (irréductible) et H une hypersurface algébrique de M . Si $M \setminus H$ est rationnellement convexe, alors $M \setminus H$ est algébriquement isomorphe à une variété algébrique affine.*

Et ceci marque la fin de la démonstration du théorème 1.3.

En complément au théorème 1.3, on peut ajouter le fait que, d'après la démonstration précédente, l'anneau des fonctions algébriques régulières de X_{alg} coïncide avec $K_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X)$. Les hypothèses du théorème 1.3 nous permettent donc non seulement de montrer le caractère algébrique de la variété X mais également de déterminer complètement la structure de celle-ci.

Pour conclure, il convient de préciser que ce théorème peut bien entendu être énoncé dans le cadre plus général des espaces complexes. Les hypothèses sont exactement celles que nous avons considérées ici ; il faut par contre supposer que les singularités de l'espace X sont isolées et en nombre fini (essentiellement, cela permet d'obtenir un théorème d'interpolation sensiblement identique au théorème 3.1).