UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Compléments de cours d'algèbre

Réduction des endomorphismes

Exercice 1 [Algèbres d'un groupe]

Soit G un groupe fini et $\mathbb{C}[G]$ le $\mathbb{C}$-expace vectoriel des fonctions $f : G \to \mathbb{C}$. Expliciter la loi qui prolonge la loi du groupe G *via* l'inclusion $G \hookrightarrow \mathbb{C}[G]$ donnée par $g \mapsto \delta_g$ (la fonction qui vaut 1 uniquement en g et 0 ailleurs).

Exercice 2 [L'algèbre $\mathrm{End}(E)$]

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension finie (sur un corps quelconque).

1. [1, ex. 6.24] Montrer que les automorphismes d'algèbre de $\mathrm{End}(E)$ sont intérieurs : si $\varphi : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$ est un automorphisme, alors il existe $u_\varphi \in \mathrm{End}(E)$ tel $\forall v \in \mathrm{End}(E)$, $\varphi(v) = u_\varphi^{-1} \circ v \circ u$.

2. [1, ex. 6.23] Montrer que $\mathrm{End}(E)$ est une algèbre simple : les seuls idéaux bilatères de $\mathrm{End}(E)$ sont $\{0\}$ et $\mathrm{End}(E)$ elle-même.

Exercice 3 [Idéaux à gauche de $\mathrm{End}(E)$]

Il s'agit des exercices [1, ex. 6.25 et 6.26] (l'exercice 6.26 traite le cas similaire des idéaux à droite). On fixe $F \subset E$ un sous-espace de E et on considère

$$\mathcal{I}_F := \{u \in \mathrm{End}(E) \mid F \subset \mathrm{Ker}(u)\}.$$

1. Vérifier que $\mathcal{I}_F$ est un idéal à gauche de $\mathrm{End}(E)$ et que

$$\bigcap_{u \in \mathcal{I}_F} \mathrm{Ker}(u) = F.$$

Réciproquement, considérons $\mathcal{I} \subset \mathrm{End}(E)$ un idéal à gauche et notons

$$F_{\mathcal{I}} := \bigcap_{u \in \mathcal{I}} \mathrm{Ker}(u).$$

2. Soient $u \in \mathcal{I}$ et $v \in \mathrm{End}(E)$ tels que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Montrer que $v \in \mathcal{I}$.

3. Si p et q sont 2 projecteurs qui sont de plus dans $\mathcal{I}$, montrer qu'il existe un projecteur $r \in \mathcal{I}$ tel que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

4. Construire un projecteur $p \in \mathcal{I}$ tel que $\mathrm{Ker}(p) = F_{\mathcal{I}}$ et conclure que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{F_{\mathcal{I}}}$.

Les idéaux à gauche de $\mathrm{End}(E)$ sont donc exactement paramétrés par les sous-espaces vectoriels de E.

Exercice 4 [Commutant d'un endomorphisme]

[2, ex. 2.45] Soit $u \in \text{End}(E)$ que l'on suppose dans un premier temps diagonalisable (avec $\dim(E) = n$). On note λ_i ses valeurs propres de multiplicités m_i (pour $i = 1 \dots r$).

1. Calculer les dimensions de $K[u]$ et de $\mathcal{C}(u)$ le commutant de u.

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\dim \mathcal{C}(u) = n$,

(ii) $\dim K[u] = n$,

(iii) $r = n$ et

(iv) $\mathcal{C}(u) = K[u]$.

3. Trouver une caractérisation de l'égalité $K[u] = \mathcal{C}(u)$ si u n'est plus supposé diagonalisable. Pour cela, établir tout d'abord l'inégalité $\dim \mathcal{C}(u) \geq n$ (on pourra supposer que le corps de base est $\mathbb{C}$ pour se simplifier la vie).

Pour traiter cette dernière question, il faut connaître un peu de choses sur les endomorphismes u vérifiant $\mu_u = \chi_u$ (coIncidence du polynôme minimal et du polynôme caractéristique). Ces endomorphismes sont dits *cycliques* car il vérifie la propriété suivante : si $\mu_u = \chi_u$, il existe alors $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ forme une base de E (*cf.* [2, ex. 2.38] pour les détails).

Exercice 5 [Application directe du lemme des noyaux]

[2, ex. 2.12] Soient $u \in \text{End}(E)$ et $(P, Q) \in K[X]$ deux polynômes. Décrire les noyaux et images de $\text{pgcd}(P, Q)(u)$ et de $\text{ppcm}(P, Q)(u)$ en fonction de ceux de $P(u)$ et $Q(u)$.

Exercice 6 [Noyaux itérés]

On se reportera aux exercices [1, ex. 6.13, 6.14 et 6.15] et [2, ex. 2.13]. Soit $u \in \text{End}(E)$ (avec E de dimension finie). Pour $k \geq 0$, on note $E_k := \text{Ker}(u^k) \subset E$ les noyaux itérés de u et $d_k := \dim(E_k)$ leurs dimensions.

1. Montrer que $E_k \subset E_{k+1}$ mais que la suite $(d_{k+1} - d_k)_{k \geq 0}$ est décroissante.

2. On considère p le plus petit entier vérifiant $E_p = E_{p+1}$. Montrer que $E = E_p \oplus \text{Im}(u^p)$. En déduire que, dans une base bien choisie, la matrice de u est diagonale par blocs avec un bloc nilpotent et un bloc inversible (l'un des 2 blocs pouvant être triviaux).

3. Montrer que l'entier p apparaissant ci-dessus n'est autre que la valuation en 0 du polynôme minimal de u : $\mu_u(X) = X^p Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.

Exercice 7 [Diagonalisabilité sur les corps finis]

[3, ex. 2, page 178] On considère ici le cas d'un espace vectoriel de dimension finie E défini sur un corps fini $K = \mathbb{F}_q$. Montrer que $u \in \text{End}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $u^q = u$.

Exercice 8 [Applications de la réduction de Jordan]

1. Montrer que tout matrice complexe est semblable à sa transposée. Pour étendre le résultat à $\mathbb{R}$, on pourra utiliser l'exercice [2, ex. 2.15]

2. Soient A et B deux matrices complexes. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall k \geq 1, \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda \,\mathrm{id})^k = \dim \mathrm{Ker}(B - \lambda \,\mathrm{id})^k,$$

ou encore si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall k \geq 1, \mathrm{rg}(A - \lambda \,\mathrm{id})^k = \mathrm{rg}(B - \lambda \,\mathrm{id})^k.$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Jordan–Wreyer ((*cf.* [4, chap. X, th. 4.4]).

Exercice 9 [Tableaux de Young]

1. Déterminer les formes possibles des endomorphismes vérifiant $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ (*cf.* [4, chap. X, ex. 6.11]).

2. Que dire d'un endomorphisme nilpotent vérifiant $\dim \ker(u) = 1$?

3. Décrire la réduite de Jordan d'une matrice nilpotente vérifiant $\mathrm{rg}(M) = r$ et $\mathrm{rg}(M^2) = r - 1$ (*cf.* [4, chap. X, ex. 6.13]).

4. Soient A et B deux matrices nilpotentes de taille n ayant même polynôme minimal et même rang. Montrer que A et B sont semblables si $n \leq 6$. Donner un exemple où A et B ne sont pas semblables avec $n = 7$ (*cf.* [4, chap. X, ex. 6.16]).

Exercice 10 [Un peu de topologie]

1. Montrer que l' adhérence d'une classe de similitude est une réunion de classes de similitude (*cf.* [4, chap. XII, prop. 3.1]).

2. Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement 0 est dans l'adhérence de sa classe de similitude. Déterminer l'adhérence de la classe de similitude du bloc de Jordan J_n (*cf.* [4, chap. XII, prop. 3.2 et ex. 3.4]).

3. Montrer qu'une matrice complexe est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée (on peut utiliser la décomposition de Jordan–Chevalley pour l'une des implications). Voir [4, chap. XII, prop. 3.5].

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X–ENS, algèbre*, volume 1, Cassini, 2001.

[2] ———, *Oraux X–ENS, algèbre*, volume 2, Cassini, 2006.

[3] X. Gourdon, *Les maths en tête, algèbre*, 2ème édition, Ellipses, 2009.

[4] R. Mansuy et R. Mneimé, *Algèbre linéaire. Réduction des endomorphismes*, Licence Mathématiques, Classes préparatoires scientifiques, Vuibert, 2016.