Morphismes de Hopf

Benoît CLAUDON

9 septembre 2009

Résumé

Approche pédestre des morphismes de Hopf.

1 Introduction

Soit X une variété différentiable (compacte, orientable, ...) de groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(X)$ et de revêtement universel $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$. On se propose ici de décrire de la façon la plus explicite possible les morphismes de Hopf qui relient la cohomologie du groupe Γ avec celle de la variété X. Plus précisément :

Théorème 1.1 (H.Hopf, 1942 [Hop42])
Pour tout $k \geq 0$, il existe des morphismes

$$h_k : H^k(\Gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X, \mathbb{Z}),$$

ces morphismes étant définis canoniquement. De plus, l'image de h_k est toujours contenue dans le noyau de π^*, i.e. *:*

$$H^k(\Gamma, \mathbb{Z}) \xrightarrow{h_k} H^k(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^k(\widetilde{X}, \mathbb{Z}).$$

En petit degré, on peut bien entendu être plus précis.

Théorème 1.2 (W. Hurewicz, H. Hopf)
Les morphismes h_0 et h_1 sont des isomorphismes. Le morphisme h_2 est injectif et la suite

$$0 \longrightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) \xrightarrow{h_2} H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi^*} H^2(\widetilde{X}, \mathbb{Z})$$

est exacte.

2 Cohomologie des groupes

Ce premier paragraphe expose quelques rudiments de cohomologie des groupes ; pour plus de détails, se reporter à [Bro94]

2.1 Définition

Soit G un groupe et M un G-module ; l'assignation $F : M \mapsto M^G$ qui a un G module associe le sous-module de ses éléments G-invariants est un foncteur de la catégorie des G-modules vers celle des groupes abéliens, qui est de plus exact à gauche. On définit alors la cohomologie de G à valeurs dans M comme le foncteur dérivé de F :

$$\forall\, k \geq 0,\ H^k(G, M) = \mathrm{R}^k F(M).$$

C'est aussi la cohomologie du complexe $(\mathcal{C}^\bullet(G, M), d)$ où $\mathcal{C}^k(G, M)$ est constituée des applications de G^k dans M (par convention, $\mathcal{C}^0(G, M) = M$) et la différentielle étant donnée par :

$$\begin{aligned} df(g_1, \dots, g_{k+1}) = g_1 \cdot f(g_2, \dots, g_{k+1}) + &\sum_{j=1}^{k} (-1)^j f(g_1, \dots, g_{j-1}, g_j g_{j+1}, \dots) \\ &+ (-1)^{k+1} f(g_1, \dots, g_k). \end{aligned}$$

Si $M = \mathbb{Z}$ est le G-module trivial, on obtient explicitement :

$$H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ et } H^1(G, \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}).$$

De même, un 2-cocycle est donc une application $c : G \times G \longrightarrow \mathbb{Z}$ qui vérifie :

$$c(g, h) = c(h, k) - c(gh, k) + c(g, hk)$$

pour tout $(g, h, k) \in G$. Rappelons également l'interprétation des ces 2-cocycles en terme d'extensions de groupes.

Proposition 2.1
Les classes d'équivalence d'extensions centrales de G par $\mathbb{Z}$

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

sont paramétrées par les éléments de $H^2(G, \mathbb{Z})$.

Démonstration :
La correspondance se fait de la façon suivante.

• A une extension $1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 1$, on associe un 2-cocycle en choisissant tout d'abord une section *ensembliste* de $s : G \longrightarrow E$. On compare ensuite $s(gh)$ et $s(g)s(h)$; comme ces deux éléments de E se projettent sur le même élément de G, il existe un élément de $\mathbb{Z}$ noté $f(g, h)$ tel que $s(gh) = f(g, h)s(g)s(h)$. En écrivant $s((gh)k) = s(g(hk))$, on vérifie immédiatement que f est un 2-cocycle de G à valeurs entières (et on constate également que le choix de la section s détermine f à un cobord près).

• Réciproquement, si f est un 2-cocycle normalisé ($f(g, 1) = f(1, g) = 0$; on peut toujours choisir un tel représentant), on définit sur $\mathbb{Z} \times G$ la loi suivante :

$$(n, g) \cdot (m, h) = (n + m + f(g, h), gh).$$

On vérifie aisément que ceci munit $\mathbb{Z} \times G$ d'une loi de groupe (la relation vérifiée par f montre l'associativité, l'inverse étant donné par $(n, g)^{-1} = (-n - f(g, g^{-1}), g^{-1})$) pour laquelle $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \{1\}$ est bien central. $\square$

2.2 Un résultat d'acyclicité

On se replace ici dans le contexte géométrique : le groupe Γ est le groupe fondamental d'une variété X de revêtement universel $\widetilde{X}$. Comme Γ agit sur $\widetilde{X}$, les fonctions et, plus généralement, les formes différentielles sur $\widetilde{X}$ sont naturellement des Γ-modules ; notons $\mathcal{E}^q(\widetilde{X})$ les formes différentielles de degré q sur $\widetilde{X}$ (avec la convention $\mathcal{E}^0(\widetilde{X}) = \mathcal{C}^\infty(\widetilde{X})$). Le lemme suivant va nous permettre d'expliciter les morphismes de Hopf par la suite.

Lemme 2.1
Les Γ-modules $\mathcal{E}^q(\widetilde{X})$ sont acycliques :

$$H^k(\Gamma, \mathcal{E}^q(\widetilde{X})) = 0 \; \forall\, k \geq 1, \, \forall\, q \geq 0.$$

Remarque 2.1
Pour $k = 0$, on a bien évidemment :

$$H^0(\Gamma, \mathcal{E}^q(\widetilde{X})) = \mathcal{E}^q(\widetilde{X})^\Gamma = \mathcal{E}^q(X)$$

Démonstration :
Pour construire des "opérateurs de Poincaré", on utilise une partition de l'unité équivariante. Soit en effet un recouvrement ouvert de X par des ouverts $(V_j)_{j\in J}$ suffisamment petits pour que $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ admette des sections au-dessus de V_j. Pour chaque j, on choisit alors un ouvert U_j de $\widetilde{X}$ tel que π réalise un isomorphisme entre U_j et V_j. Si maintenant $(\varphi_j)_{j\in J}$ est une partition de l'unité subordonnée à $(V_j)_j$, considérons les fonctions

$$\chi_j = (\pi_{|U_j})^*(\varphi_j) = \varphi_j \circ \pi^{-1}_{|U_j}.$$

Ces fonctions sont à support dans U_j et permettent de construire une partition subordonnée au recouvrement $(g(U_j))_{j\in J,\, g\in\Gamma}$ par la formule :

$$\chi_{j,g} = g^*(\chi_j) = \chi_j \circ g^{-1}.$$

Par construction, ces fonctions vérifient :

$$\forall\, g, h \in \Gamma, \, \forall\, j \in J, \; \chi_{j,gh} = g^*\chi_{j,h}. \tag{1}$$

On définit alors un opérateur

$$P : C^{k+1}(\Gamma, \mathcal{E}^q(\widetilde{X})) \longrightarrow C^k(\Gamma, \mathcal{E}^q(\widetilde{X}))$$

de la façon suivante :

$$P(f)(g_1, \dots, g_k) = (-1)^{k+1} \sum_{(j,g)\in J\times\Gamma} \chi_{j,g} f(g_1, \dots, g_k, g_k^{-1} g_{k-1}^{-1} \cdots g_1^{-1} g).$$

Le calcul direct de $d(P(f))$ donne :

$$\begin{aligned}
&d((-1)^{k+1}P(f))(g_1,\ldots,g_{k+1}) = g_1^*\left[P(f)(g_2,\ldots,g_{k+1})\right] + \\
&\sum_{i=1}^{k}(-1)^i P(f)(g_1,\ldots,g_i g_{i+1},\ldots,g_{k+1}) + (-1)^{k+1}P(f)(g_1,\ldots,g_k) \\
&= \sum_{j,g} g_1^*(\chi_{j,g}) g_1^*\left(f(g_2,\ldots,g_k,g_{k+1}^{-1}g_k^{-1}\cdots g_2^{-1}g)\right) + \\
&\sum_{i=1}^{k}(-1)^i \sum_{j,g}\chi_{j,g} f(g_1,\ldots,g_i g_{i+1},\ldots,g_{k+1},g_{k+1}^{-1}g_k^{-1}\cdots g_1^{-1}g) + \\
&(-1)^{k+1}\sum_{j,g}\chi_{j,g} f(g_1,\ldots,g_k,g_k^{-1}g_{k-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}g) \\
&= \sum_{j,g}(\chi_{j,g})\big[g_1^*\left(f(g_2,\ldots,g_k,g_{k+1}^{-1}g_k^{-1}\cdots g_1^{-1}g)\right) + \\
&\sum_{i=1}^{k}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_i g_{i+1},\ldots,g_{k+1},g_{k+1}^{-1}g_k^{-1}\cdots g_1^{-1}g) + \\
&(-1)^{k+1} f(g_1,\ldots,g_k,g_{k+1}g_{k+1}^{-1}g_k^{-1}g_{k-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}g)\big] \\
&= \sum_{j,g}(\chi_{j,g})\left[g_1^*\left(f(g_2,\ldots,\gamma_{k+2}^g)\right) + \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_i g_{i+1},\ldots,\gamma_{k+2}^g)\right]
\end{aligned}$$

où à la sixième ligne on a utilisé la propriété d'équivariance (1) des $\chi_{j,g}$ et où à la dernière ligne on a posé :

$$\gamma_{k+2}^g = g_{k+1}^{-1}g_k^{-1}\cdots g_1^{-1}g.$$

Mais l'expression entre crochet n'est autre que :

$$df(g_1,\ldots,g_{k+1},\gamma_{k+2}^g) - (-1)^{k+2}f(g_1,\ldots,g_{k+1}).$$

Comme les $\chi_{j,g}$ forment une partition de l'unité, on en déduit :

$$d\left(P(f)\right) = f - (-1)^k P(df))$$

pour toute cochaîne f. En particulier, si f est un cocycle, on obtient :

$$d\left(P(f)\right) = f.$$

Ceci constitue exactement l'annulation cherchée. □

3 Morphismes de Hopf

Nous allons maintenant pouvoir décrire de façon relativement explicite les morphismes de Hopf. Pour pouvoir utiliser les résultats précédents (c'est-à-dire travailler avec des formes différentielles), nous allons montrer comment construire ces morphismes pour la cohomologie à valeurs réelles. Considérons pour cela le complexe de De Rham (sur $\widetilde{X}$) ; ce dernier induit des morphismes entre les différents espaces de cochaînes

$$C^k(\Gamma, \mathcal{E}^q(\widetilde{X})).$$

On obtient ainsi le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}^0(\widetilde{X})^\Gamma \arrow[r, "d"] \arrow[d, hook] & \mathcal{E}^1(\widetilde{X})^\Gamma \arrow[r, "d"] \arrow[d, hook] & \mathcal{E}^2(\widetilde{X})^\Gamma \arrow[r, "d"] \arrow[d, hook] & \cdots \\
\mathbb{R} \arrow[r, hook] \arrow[d, "d_\Gamma"] & \mathcal{E}^0(\widetilde{X}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_\Gamma"] & \mathcal{E}^1(\widetilde{X}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_\Gamma"] & \mathcal{E}^2(\widetilde{X}) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_\Gamma"] & \cdots \\
C^1(\Gamma, \mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "d_\Gamma"] & C^1(\Gamma, \mathcal{E}^0(\widetilde{X})) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_\Gamma"] & C^1(\Gamma, \mathcal{E}^1(\widetilde{X})) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_\Gamma"] & C^1(\Gamma, \mathcal{E}^2(\widetilde{X})) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & \cdots \\
C^2(\Gamma, \mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, "d_\Gamma"] & C^2(\Gamma, \mathcal{E}^0(\widetilde{X})) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_\Gamma"] & C^2(\Gamma, \mathcal{E}^1(\widetilde{X})) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_\Gamma"] & C^2(\Gamma, \mathcal{E}^2(\widetilde{X})) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_\Gamma"] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches repérées par un d sont celles induites par la différentielle extérieure alors que celles portant un d_Γ sont les différentielles permettant de calculer la cohomologie de Γ. Or, le lemme 2.1 montre que les colonnes (à partir de la deuxième) sont exactes. Cette remarque permet de définir les morphismes

$$h_k : H^k(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow H^k(X, \mathbb{R})$$

par un simple parcours dans le diagramme. Pour illustrer cela, traitons le cas $k = 2$ et promenons nous dans le diagramme ci-dessus. En effet, si f est un 2-cocycle réel pour Γ, on peut remonter en zigzags jusqu'à la première ligne :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}^0(\widetilde{X})^\Gamma \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{E}^1(\widetilde{X})^\Gamma \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{E}^2(\widetilde{X})^\Gamma \arrow[r, dashed] & \cdots \\
\mathbb{R} \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{E}^0(\widetilde{X}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \mathcal{E}^1(\widetilde{X}) \arrow[r, "d"] & \mathcal{E}^2(\widetilde{X}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[u] & \cdots \\
C^1(\Gamma, \mathbb{R}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & C^1(\Gamma, \mathcal{E}^0(\widetilde{X})) \arrow[r, "d"] & C^1(\Gamma, \mathcal{E}^1(\widetilde{X})) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[u, "P"] & C^1(\Gamma, \mathcal{E}^2(\widetilde{X})) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \cdots \\
f \in C^2(\Gamma, \mathbb{R}) \arrow[r] \arrow[d, dashed] & C^2(\Gamma, \mathcal{E}^0(\widetilde{X})) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] \arrow[u, "P"] & C^2(\Gamma, \mathcal{E}^1(\widetilde{X})) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & C^2(\Gamma, \mathcal{E}^2(\widetilde{X})) \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

Une fois arrivé sur la première ligne, nous obtenons une 2-forme fermée (car exacte) $\alpha_2(f) \in \mathcal{E}^2(\widetilde{X})$ qui est invariante sous l'action de Γ et descend donc en une 2-forme sur X. La 2-forme ainsi obtenue est bien entendue encore fermée et définit donc une classe de degré 2

$$h_2(f) \in H^2(X, \mathbb{R}).$$

C'est l'image par le morphisme de Hopf h_2 de l'élément de $H^2(\Gamma, \mathbb{R})$ représenté par le cocyle f.

Pour constater que ce morphisme est injectif (en degré 2), on utilise le fait que le début de la deuxième ligne est exacte :

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{E}^0(\widetilde{X}) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\widetilde{X}) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(\widetilde{X}).$$

Sur la variété simplement connexe $\widetilde{X}$, une 1-forme fermée est exacte !

4 Interprétation en termes de fibrés en droites

4.1 Démonstration du théorème 1.2

Nous montrons ici comment associer à un élément de

$$\mathrm{Ker}\left(\pi^* : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\widetilde{X}, \mathbb{Z})\right)$$

un 2-cocycle pour Γ à valeurs entières, ce qui correspond à l'énoncé du théorème 1.2. Rappelons tout d'abord le fait suivant :

Lemme 4.1
Le groupe $H^2(X, \mathbb{Z})$ (resp. $H^2(\widetilde{X}, \mathbb{Z})$) est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathbb{C}$-fibrés en droites sur X (resp. sur $\widetilde{X}$), cette identification se faisant via *la classe de Chern $c_1(L)$.*

Démonstration :
L'ensemble des classes d'isomorphismes de fibré en droite n'est autre que $H^1(X, \mathcal{E}_X^*)$. On utilise alors la suite exponentielle (exacte au niveau des faisceaux) et les annulations $H^1(X, \mathcal{E}_X) = H^2(X, \mathcal{E}_X) = 0$ pour obtenir l'isomorphisme annoncé. □

Soit donc L un fibré en droites dont la classe de Chern $c_1(L)$ vérifie $\pi^*(c_1(L)) = 0$. Le fibré L devient donc trivial sur $\widetilde{X}$. Ceci signifie qu'il existe une application toujours non-nulle (sorte de section) $s : \widetilde{X} \longrightarrow L$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "p"] \\ \widetilde{X} \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

Comme $s(g^{-1}(x))$ et $s(x)$ (pour $g \in \Gamma$ et $x \in \widetilde{X}$) sont dans la même fibre $L_{\pi(x)}$, on peut former leur quotient et obtient ainsi $f_g : \widetilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}^*$. On vérifie immédiatement que famille de fonctions f_g satisfait aux relations :

$$\forall\,(g, h) \in \Gamma,\ f_{gh} = g^*(f_h) f_g,$$

i.e. $g \mapsto f_g$ est un 1-cocycle à valeurs $\mathcal{E}^*(\widetilde{X})$. Or, la suite longue induite par la suite courte[1]

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{E}(\widetilde{X}) \xrightarrow{\exp} \mathcal{E}^*(\widetilde{X}) \longrightarrow 1$$

et les annulations (lemme 2.1)

$$H^1(\Gamma, \mathcal{E}(\widetilde{X})) = H^2(\Gamma, \mathcal{E}(\widetilde{X})) = 0$$

fournissent l'isomorphisme

$$H^1(\Gamma, \mathcal{E}^*(\widetilde{X})) \xrightarrow{\sim} H^2(\Gamma, \mathbb{Z}). \tag{2}$$

Le 1-cocycle f_g construit ci-dessus correspond donc à un élément de $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$. On a donc bien vérifié :

Théorème [H. Hopf]
En degré 2, la cohomologie de Γ s'identifie avec le noyau de π^* :

$$H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathrm{Ker}\left(\pi^* : H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\widetilde{X}, \mathbb{Z})\right).$$

Remarque 4.1
Réciproquement, à un 1-cocyle f_g à valeurs dans $\mathcal{E}^*(\widetilde{X})$, on associe un fibré en droite sur X de la façon suivante. Le groupe Γ agit sur $\widetilde{X} \times \mathbb{C}$ par :

$$g \cdot (x, z) = (g(x), f_{g^{-1}}(x)z).$$

Le quotient $L = (\widetilde{X} \times \mathbb{C})/\Gamma$ est naturellement un fibré en droites sur X dont la classe de Chern coincide avec le cocycle f_g par l'isomorphisme (2).

4.2 Bonus homotopique

Pour finir, un peu d'homotopie ! En effet, en reprenant les notations du paragraphe ci-dessus, un fibré en droites $L \longrightarrow X$ induit naturellement un fibré en $\mathbb{C}^*$ sur X : il suffit de considérer $L^0 = L \backslash \{\text{section nulle}\}$. La suite exacte d'homotopie associée à cette fibration s'écrit :

$$\pi_2(X) \xrightarrow{\partial_L} \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{C}^*) \longrightarrow \pi_1(L^0) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1.$$

Le morphisme ∂_L définit un élément de

$$\mathrm{Hom}(\pi_2(X), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_2(\widetilde{X}), \mathbb{Z}) \simeq H^2(\widetilde{X}, \mathbb{Z}), \tag{3}$$

l'isomorphisme étant donné par les résultats ci-dessous.

Théorème 4.1 (W. Hurewicz, 1936 [Hur36])
Soit M un espace topologique connexe (ayant le type d'homotopie d'un CW complexe) et $n \geq 1$ un entier. Le morphisme naturel

$$w_n : \pi_n(M) \longrightarrow H_n(M, \mathbb{Z})$$

consistant à considérer une classe d'homotopie comme une classe d'homologie est :

[1] cette suite courte de Γ-module est exacte car $H^1(\widetilde{X}, \mathbb{Z}) = 0$

(i) le morphisme d'abélianisation si $n = 1$,

(ii) un isomorphisme si $\pi_k(M) = 0$ *pour tout* $k < n$.

Théorème 4.2 (voir [BT82], p. 194)
Pour tout espace topologique connexe M *et tout entier* $k \geq 1$,

$$H^k(M) \simeq \mathrm{Hom}\,(H_k(M), \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Ext}\,(H_{k-1}(M), \mathbb{Z})\,.$$

La combinaison des théorèmes 4.1 et 4.2 fournit en effet l'isomorphisme (3).

Proposition 4.1
Avec l'identification ci-dessus, on a :

$$\partial_L \simeq \pi^*(c_1(L))$$

(le morphisme ∂_L *consiste donc à évaluer la classe* $c_1(L)$ *sur les sphères représentant les éléments de* $\pi_2(X)$*). En particulier, la classe de Chern de* L *définit un élément de* $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ *si et seulement si le morphisme* ∂_L *est nul.*

On se convainc de ce fait en examinant la classe d'Euler du fibré L^0 (comme par exemple dans [BT82], p. 70 et suivantes).

Pour compléter cette étude, faisons une dernière remarque. Si le morphisme ∂_L ci-dessus est identiquement nul, la suite exacte d'homotopie devient une suite courte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(L^0) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1.$$

Il n'est pas difficile de constater que cette suite définit en fait une extension centrale de Γ par $\mathbb{Z}$. Or, d'après la proposition 2.1, cette extension correspond à un élément de $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$. Fort des résultats des paragraphes précédents, nous pouvons affirmer que cette classe n'est autre que $c_1(L)$. Résumons tout ceci dans un dernier théorème.

Théorème 4.3
Soit $L \longrightarrow X$ *un fibré en droites et considérons la suite d'homotopie du* $\mathbb{C}^*$*-fibré correspondant :*

$$\pi_2(X) \xrightarrow{\partial_L} \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(L^0) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1.$$

Alors, $\partial_L = 0$ *si et seulement si* $c_1(L) \in H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ *; dans ce cas, la suite devient une extension* centrale

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(L^0) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

dont la classe n'est autre que $c_1(L)$.

Références

[Bro94] K. S. Brown – *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1994, Corrected reprint of the 1982 original.

[BT82] R. Bott et L. W. Tu – *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 82, Springer-Verlag, New York, 1982.

[Hop42] H. Hopf – « Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe », *Comment. Math. Helv.* **14** (1942), p. 257–309.

[Hur36] W. Hurewicz – « Beiträge zur Topologie der Deformationen iii, iv », *Proc. KoninK. Nederl. Akad. Wetensch.* (1936).