

Le groupe de HIGMAN

Benoît CLAUDON

16 octobre 2009

Résumé

Une courte étude du groupe de Higman suivie d'une discussion autour du théorème de Gromov-Schoen sur les groupes kählériens s'écrivant comme une somme amalgamée.

Table des matières

1	Groupes H_2 et H_3	2
2	Etude du groupe H_4	3
2.1	Représentation comme somme amalgamée	3
2.2	Quotients finis de H_4	4
3	Lien avec les groupes kählériens	5
3.1	Existence d'une application harmonique	6
3.2	Pluriharmonicité	7
3.3	Étude du feuilletage associé à f	7
4	Une approche alternative	10
4.1	Existence d'un cocycle	10
4.2	Intégration de c_T	12
4.3	Conclusion	12
A	Sommes amalgamées	13
B	Cohomologie des groupes	14
C	Deux lemmes	16
	Bibliographie	18

Nous nous intéressons ici aux groupes (dits de Higman) définis par les présentations (finies) suivantes :

$$H_i = \langle a_1, \dots, a_{i+1} \mid \forall 1 \leq k \leq i, a_k^{-1} a_{k+1} a_k = a_{k+1}^2 \text{ et } a_{i+1} = a_1 \rangle$$

et introduits dans [H51]. Nous allons en particulier étudier les cas $i \in \{2, 3, 4\}$.

1 Groupes H_2 et H_3

La situation est ici assez pauvre puisque nous allons constater que ces deux groupes sont triviaux. Le cas de H_2 est assez simple. En effet, on a :

$$H_2 = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2 \text{ et } b^{-1}ab = a^2 \rangle.$$

La combinaison des deux relations donne :

$$a = b^{-1}ab^2 = (b^{-1}ab)b = a^2b \text{ i.e. } ab = 1.$$

On en déduit alors immédiatement que $a = b = 1$ et donc que $H_2 = 1$.

En ce qui concerne la trivialité de H_3 , on s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 1.1

Le groupe $G = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2 \rangle$ est métabelien i.e. $G^{(2)} = 1$. De plus, les sous-groupes engendrés par a et b sont infinis (cycliques) et leur intersection est triviale : $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{1\}$.

Démonstration :

En effet, le sous-groupe **normal** engendré par b est abélien. Pour s'en assurer, il faut vérifier que b commutent avec tous ses conjugués, i.e. avec $a^{-1}ba = b^2$ et $x = aba^{-1}$; la relation $x^2 = b$ montre que c'est effectivement le cas. D'autre part, comme le quotient $G/\langle\langle b \rangle\rangle$ est abélien (et même cyclique, engendré par l'image de a), on en déduit $G' \leq \langle\langle b \rangle\rangle$ et ainsi $G^{(2)} = 1$.

Considérons alors le morphisme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} G \longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]) \\ a \mapsto A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b \mapsto B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Ce morphisme est bien défini puisque les matrices A et B vérifient la même relation et ceci montre simultanément que a et b ne sont pas d'ordre fini et que les groupes qu'ils engendrent s'intersectent trivialement. \square

Remarque 1.2

On peut en fait se convaincre assez facilement que le groupe G est isomorphe au sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\text{GL}_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}])$, qui est aussi le produit semi-direct

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rtimes \mathbb{Z}$$

(l'action de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ étant donnée par $(n, x) \mapsto 2^n x$).

Nous pouvons maintenant démontrer la

Proposition 1.1

Le groupe H_3 est le groupe trivial.

Démonstration :

Les deux premières relations de la présentation

$$H_3 = \langle a, b, c \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}ac = a^2 \rangle \quad (1)$$

peuvent se réécrire :

$$bab^{-1} = ab \quad \text{et} \quad c^{-1}bc = bc^{-1}. \quad (2)$$

En appliquant l'automorphisme intérieur $h \mapsto c^{-1}hc$ à la première relation de (2), on obtient la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} (c^{-1}bc)(c^{-1}ac)(c^{-1}b^{-1}c) &= (c^{-1}ac)(c^{-1}bc) \\ bc^{-1}a^2cb^{-1} &= a^2bc^{-1} \\ ba^4b^{-1} &= a^2bc^{-1}. \end{aligned}$$

Ceci nous montre en particulier que c appartient au sous-groupe engendré par a et b et donc que H_3 lui-même est engendré par a et b . Ainsi, H_3 est un quotient du groupe G introduit dans le lemme 1.1 et est donc également métabélien. Or, les relations de présentation (1) montrent que a , b et c sont des commutateurs. On a ainsi :

$$H_3 = H'_3 = H_3^{(2)} = 1.$$

□

2 Etude du groupe H_4

Contrairement à ce qu'il se passe pour $i = 2$ et $i = 3$, le groupe H_4 est loin d'être trivial. Nous allons en effet montrer :

Théorème 1

Le groupe H_4 est un groupe infini dont tous les quotients finis sont triviaux (en particulier, H_4 n'admet aucun sous-groupe d'indice fini et il n'est donc pas résiduellement fini).

2.1 Représentation comme somme amalgamée

Pour les notions de base sur les sommes amalgamées, on se reportera à [Se] (ou au modeste appendice A). Le groupe de Higman H_4 admet une telle représentation :

Proposition 2.1

Le groupe de Higman est un amalgame :

$$H_4 \simeq \Gamma_1 \underset{F_2}{*} \Gamma_2,$$

où F_2 est le groupe libre à deux éléments, plongés comme sous-groupe d'indice infini dans Γ_1 et Γ_2 .

Démonstration :

Soit $G_i = \langle a_i, b_i \mid a_i^{-1} b_i a_i = b_i^2 \rangle$ ($i = 1, 2, 3, 4$) des copies du groupe G introduit au lemme 1.1. Considérons alors le groupe :

$$\Gamma_1 = G_1 *_Z G_2,$$

amalgame de G_1 et G_2 le long de $\mathbb{Z} = \langle a_2 \rangle = \langle b_1 \rangle$ (ce qui est légitime grâce au lemme 1.1). A nouveau d'après le lemme 1.1, on constate que le groupe engendré par a_1 et b_2 (dans Γ_1) est libre. En procédant de la même façon avec G_3 et G_4 , on construit Γ_2 qui contient le groupe libre engendré par a_3 et b_4 . On identifie alors ces groupes libres par les relations $a_3 = b_2$ et $b_4 = a_1$ et, en amalgamant Γ_1 et Γ_2 le long de ce groupe libre F_2 , on retrouve bien le groupe

$$H_4 \simeq \Gamma_1 *_F_2 \Gamma_2$$

car les amalgames successifs permettent d'éliminer les b_i dans les relations. \square
 Cette écriture montre en particulier que le groupe H_4 est infini.

2.2 Quotients finis de H_4

Il nous reste à montrer que le groupe H_4 ne possède pas de quotient fini non trivial.

Proposition 2.2

Les quotients finis de H_4 sont triviaux.

Le point clé est un lemme d'arithmétique.

Lemme 2.1

Si n est un entier, on note $\omega(n)$ le plus petit facteur premier de n . On a alors :

$$\forall n \geq 2, \omega(n) < \omega(2^n - 1).$$

Démonstration du lemme 2.1 :

Notons $p = \omega(n)$ et $q = \omega(2^n - 1)$. Ceci signifie que l'ordre de 2 dans \mathbb{F}_q divise n (comme q est nécessairement impair, cet ordre n'est pas égal à 1). Cet ordre est donc composé de facteurs de n et on a donc :

$$p \leq \text{Ord}_{\mathbb{F}_q}(2) \leq q - 1 < q.$$

\square

Démonstration de la proposition 2.2 :

Supposons que les relations définissant H_4 aient lieu dans un groupe fini Q . En particulier, les éléments a_i sont d'ordres finis n_i . Remarquons que si l'un de n_i est 1, le caractère cyclique des relations entraîne tout de suite $Q = 1$. Supposons donc tous les $n_i > 1$ et considérons le plus petit facteur premier p apparaissant dans les n_i . Pour simplifier, supposons que p soit un facteur de n_2 . La relation $a_1^{-1} a_2 a_1 = a_2^2$ donne en particulier :

$$a_2 = a_1^{-n_1} a_2 a_1^{n_1} = a_2^{2^{n_1}}.$$

On en déduit que n_2 divise $2^{n_1} - 1$ et le lemme 2.1 montre qu'il existe un facteur premier de n_1 qui est strictement inférieur à p . Ceci contredit la minimalité de

p et montre la proposition 2.2. \square

Le fait que H_4 ne possède pas de quotient fini montre qu'il n'admet également aucun sous-groupe d'indice fini (autre que lui-même). En effet, un sous-groupe d'indice fini n'ayant qu'un nombre fini de conjugués, leur intersection forme un sous-groupe d'indice fini dans H_4 qui est maintenant normal dans H_4 ; ce groupe doit donc être H_4 tout entier d'après la proposition 2.2.

Dans [H51], G. Higman introduit le groupe H_4 pour produire un exemple de groupe infini simple de type fini; en effet, comme H_4 est de type fini, il admet un quotient simple (quotient par un sous-groupe normal maximal) et ce quotient est nécessairement infini en vertu de la proposition 2.2.

3 Lien avec les groupes kählériens

La question suivante est explicitement posée dans [Se] :

Question : *le groupe H_4 est-il un groupe projectif ?*

En d'autres termes, existe-t-il une variété projective lisse X telle que $\pi_1(X) = H_4$? On peut plus généralement se demander si H_4 peut se réaliser comme le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte. Les restrictions usuelles connues sur les groupes kählériens ne permettent pas de répondre immédiatement à cette question (par exemple, l'abélianisé de H_4 est trivial). Nous allons cependant montrer que la réponse à la question est négative.

Théorème 2

Le groupe H_4 n'est pas kählérien.

La démonstration de ceci passe par le résultat bien plus général suivant.

Théorème 3 (Gromov, Schoen, 1992)

Soit X une variété kählérienne compacte dont le groupe fondamental admet une représentation en somme amalgamée

$$\pi_1(X) = G_1 \underset{\Delta}{*} G_2$$

telle que Δ soit d'indice au moins 2 dans G_1 (resp. au moins 3 dans G_2). Il existe alors une représentation

$$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$$

dont l'image est cocompacte et discrète.

En particulier, quitte à considérer un revêtement étale fini, X admet une fibration (application holomorphe surjective à fibres connexes) sur une courbe hyperbolique C .

Démonstration du théorème 2 :

La proposition 2.1 montre que H_4 admet une décomposition en somme amalgamée, décomposition à laquelle nous pouvons appliquer le théorème 3 (en supposant que H_4 est kählérien) : H_4 admet donc une représentation d'image cocompacte dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Nous obtenons immédiatement une contradiction

puisque toute représentation de H_4 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est triviale d'après la proposition 2.2 (un groupe linéaire de type fini est résiduellement fini d'après un résultat bien connu de Malčev). \square

Remarque 3.1

Les groupes de surfaces (groupes fondamentaux des courbes) sont effectivement des amalgames non triviales. Par suite, tous les groupes qui admettent pour quotient un groupe de surface sont aussi des amalgames non triviales. En effet, si

$$\varphi : G \longrightarrow G_1 *_A G_2$$

est un morphisme surjectif, alors

$$G \simeq \varphi^{-1}(G_1) *_A \varphi^{-1}(G_2).$$

La démonstration du théorème 3 est difficile et repose sur la théorie des applications harmoniques vers les arbres. Nous allons donner une esquisse de celle-ci (en essayant de donner les détails lorsque c'est possible). Les grandes étapes de cette démonstration sont :

1. Une variété compacte dont le groupe fondamental s'écrit comme une somme amalgamée admet une application harmonique f (équivariante) vers un arbre.
2. Dans le cas kählérien, f est en fait pluriharmonique.
3. Le feuilletage associé à la (partie de type (1,0) de la) différentielle complexifiée de f permet de factoriser f par un morphisme vers une courbe.

3.1 Existence d'une application harmonique

Proposition 3.1

Soit M une variété compacte dont le groupe fondamental s'écrit comme une somme amalgamée non-triviale. Il existe alors un arbre T et une application harmonique équivariante $f : \tilde{M} \longrightarrow T$ (avec \tilde{M} le revêtement universel de M).

Démonstration :

D'après l'appendice A, nous savons que le groupe $\pi_1(M)$ agit naturellement sur un arbre T et que, pour cette action, G opère sans point fixe sur T ; il s'avère également que G ne fixe aucun point du bord¹ de T . En effet, si G fixe un bout de T , prenons un rayon r basé en p et représentant ce bout. Comme on a supposée la somme amalgamée non-triviale, il existe un élément $g \in G$ qui stabilise q mais pas p . Considérons alors le rayon r' basé en q obtenu en ajoutant $[q, p]$ à r ; le rayon $g(r')$ est alors basé en q (puisque g stabilise q) et est équivalent à r' (puisque G tout entier stabilise le bout correspondant). Comme un arbre est sans cycle, on a nécessairement $g(r') = r'$ ce qui est absurde puisque g ne stabilise pas q .

Comme $\pi_1(M)$ agit sur T et qu'il ne fixe pas de point à l'infini de T , on peut appliquer le corollaire 2.3.2 de [KS97] et obtenir une application harmonique équivariante :

$$f : \tilde{M} \longrightarrow T.$$

¹rappelons que le bord d'un arbre est constitué des classes d'équivalences de rayons, deux rayons étant équivalents si leur intersection est encore un rayon

□

3.2 Pluriharmonicité

Proposition 3.2

Soit X une variété kählérienne compacte dont le groupe fondamental s'écrit comme une somme amalgamée non-triviale et soit $f : \tilde{X} \rightarrow T$ l'application harmonique construite à la proposition 3.1. L'application f est alors pluriharmonique.

Au voisinage d'un point régulier², l'application f peut en effet être vue comme une fonction à valeurs réelles et l'assertion de la proposition ci-dessus revient à dire : $\partial\bar{\partial}f = 0$.

Démonstration :

C'est en substance le théorème 7.3 de [GS92]. Il faut faire cependant attention à la chose suivante : le résultat de [GS92] est énoncé pour les applications harmoniques à valeurs dans espaces localement compacts (ce qui n'est *a priori* pas le cas de l'arbre T). Dans la situation considérée, l'application f se factorise localement à travers un arbre fini $T' \subset T$ (c'est-à-dire un arbre dont la valence de chaque sommet est finie) : $f : \tilde{X} \rightarrow T' \hookrightarrow T$. On peut alors appliquer le théorème 7.3 de [GS92] à l'application $f : \tilde{X} \rightarrow T'$. Plus généralement, la régularité des applications harmoniques à valeurs dans les arbres non localement compacts est étudiée dans [S03]. □

3.3 Étude du feuilletage associé à f

Pour finir, il nous reste à étudier l'application (pluri)harmonique $f : \tilde{X} \rightarrow T$ que nous venons de construire. L'étude se divise en deux cas, selon les singularités de l'application f . Dans la suite, nous noterons $R(f)$ (respectivement $S(f)$) le lieu régulier (respectivement singulier) de f .

Commençons par quelques remarques générales. Le contenu de la proposition 3.2, à savoir $\partial\bar{\partial}f = 0$ sur $R(f)$, peut se traduire de la façon suivante : au voisinage U de tout point $x \in R(f)$, l'application f se réduit à une fonction pluriharmonique réelle $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Cela signifie que la partie de type $(1, 0)$ de la différentielle complexifiée est une 1-forme holomorphe :

$$\bar{\partial} \left((d^{\mathbb{C}}f)^{(1,0)} \right) = 0.$$

Pour être exact, la forme $\tilde{\alpha} = (d^{\mathbb{C}}f)^{(1,0)}$ n'est bien définie qu'à un signe près (choix d'une orientation de \mathbb{R}). En revanche, le tenseur

$$\tilde{\beta} = (d^{\mathbb{C}}f)^{(1,0)} \otimes (d^{\mathbb{C}}f)^{(1,0)}$$

est bien défini sur $R(f)$. D'autre part, en coordonnées locales, $\tilde{\beta}$ est représentée par des fonctions holomorphes bornées (régularité Lipschitz des applications

²un point est dit régulier s'il admet un voisinage dont l'image par f est entièrement contenue dans un plat (ici un morceau de géoédésique).

harmoniques [GS92, th. 2.3, p. 195]). Comme le lieu $S(f)$ est de codimension (de Hausdorff) au moins 2, on déduit que $\tilde{\beta}$ se prolonge à \tilde{X} tout entier :

$$\tilde{\beta} \in H^0\left(\tilde{X}, \text{Sym}^2(\Omega_{\tilde{X}}^1)\right).$$

Par équivariance, $\tilde{\beta}$ descend sur $X = \tilde{X}/\Gamma$ en une section $\beta \in \text{Sym}^2(\Omega_X^1)$ et, comme le tenseur β est partout de rang ≤ 1 , il existe donc un revêtement³ double ramifié

$$r_{sp} : X_{sp} \xrightarrow{2:1} X$$

tel que $\alpha_{sp} = r_{sp}^*(\beta)$ devienne une honnête 1-forme holomorphe sur X_{sp} . Le revêtement X_{sp} est construit selon le procédé habituel (comme sous-variété de l'espace total du fibré cotangent) :

$$X_{sp} = \{(x, \xi) \in \Omega_X^1 \mid \xi \otimes \xi = \beta(x)\}.$$

C'est ici que l'étude se subdivise en deux cas.

Premier cas : r_{sp} ramifie

La forme α_{sp} s'annule au moins sur le lieu de ramification de r_{sp} qui est un diviseur (pureté du lieu de ramification). On peut alors appliquer le lemme 3.2 ci-dessous. Le feuilletage induit par α_{sp} sur X_{sp} correspond donc à une fibration sur une courbe $X_{sp} \rightarrow C$. Comme ce feuilletage est invariant par l'involution du revêtement r_{sp} , la fibration ci-dessus se factorise et on a bien construit une fibration

$$X \rightarrow C$$

vers une courbe. Enfin, comme l'action de $\pi_1(X)$ sur l'arbre T se factorise par $\pi_1(C)$, on ne peut pas avoir $g(C) = 1$; en effet, si \mathbb{Z}^2 agit sur un arbre, il fixe nécessairement un sommet ou une droite de l'arbre (voir [Se]).

Lemme 3.2

Soit Y une variété kählérienne compacte munie d'une 1-forme holomorphe α (non nulle). Si α s'annule le long d'une hypersurface (irréductible) compacte S de Y , Y admet une fibration sur une courbe $Y \rightarrow C$ avec $g(C) \geq 1$ (et α provient de C).

Démonstration du lemme 3.2 :

Montrons tout d'abord que, dans cette situation, toutes les feuilles du feuilletage \mathcal{F}_α induit par α sont compactes. En écrivant $\alpha = df$ localement, on en déduit que f est constante le long de S et (pour des raisons de dimension) S est donc une (réunion de) feuille de \mathcal{F}_α . Soit alors U un voisinage ouvert de S qui lui est homotope. Comme $\alpha|_S = 0$ et comme $H^1(S, \mathbb{C}) = H^1(U, \mathbb{C})$, on en déduit que $\alpha = df$ sur U tout entier. Comme f a une fibre compacte, on en déduit que toutes ses fibres sont compactes (quitte à rétrécir U). Or, les fibres de f sont aussi des feuilles de \mathcal{F}_α : les feuilles voisines de S sont donc compactes. Comme le volume kählérien est borné sur les feuilles, on en déduit que toutes les feuilles de \mathcal{F}_α sont compactes.

³ce revêtement est communément appelé *revêtement spectral* dans la littérature.

Nous pouvons maintenant conclure. En effet, on sait que α est induite par l'application d'Albanese de Y

$$\text{alb}_Y : Y \longrightarrow \text{Alb}(Y),$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = \text{alb}_Y^*(\lambda).$$

En quotientant $\text{Alb}(Y)$ par le plus grand sous-tore sur lequel λ est nulle, on obtient une application holomorphe vers un tore

$$\text{alb}_\alpha : Y \longrightarrow N$$

et une 1-forme holomorphe sur N , encore notée λ , telle que

$$\alpha = \text{alb}_\alpha^*(\lambda).$$

De plus, par construction, les feuilles de \mathcal{F}_λ ne contiennent aucun sous-ensemble analytique compact de N . Comme alb_α envoie les feuilles de \mathcal{F}_α (compactes) dans celles de \mathcal{F}_λ , leurs images par alb_α sont donc réduites à des points. Ce raisonnement montre que l'image de Y par alb_α est une courbe. La factorisation de Stein de

$$Y \longrightarrow \text{alb}_\alpha(Y)$$

fournit alors la fibration cherchée. \square

Remarque 3.3

Dans la situation où le revêtement spectral est ramifié, X_{sp} peut éventuellement devenir singulière. Pour appliquer la discussion ci-dessus, il faut donc considérer

$$\hat{X}_{sp} \longrightarrow X_{sp}$$

une désingularisation de X_{sp} .

Deuxième cas : r_{sp} est étale

Cette hypothèse signifie que la 1-forme $\tilde{\beta}$ est bien définie sur \tilde{X} et est invariante par (un sous-groupe d'indice 2 de) $\pi_1(X)$. Comme cette forme est évidemment fermée, elle est exacte (simple connexité de \tilde{X}) et elle s'écrit donc $\tilde{\beta} = dF$ avec $F : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. La fin de la démonstration consiste alors à considérer la factorisation de Stein de F

$$\tilde{X} \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} \mathbb{C}$$

(avec g connexe et h à fibres discrètes). On a donc obtenu une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow g & \nearrow \\ & Y & \end{array}$$

de l'application harmonique f par une application holomorphe vers une courbe (simplement connexe), cette factorisation étant bien entendu équivariante pour les actions naturelles de $\pi_1(X)$. On conclut alors en observant que l'action de $\pi_1(X)$ sur Y est nécessairement discrète et que Y doit être le disque unité. Pour plus de détails, nous renvoyons à l'article [GS92]. \square

4 Une approche alternative

Pour démontrer le théorème 3, on peut également faire appel⁴ à un peu de cohomologie des groupes afin de produire une application holomorphe vers une courbe. On reprend les notations des paragraphes ci-dessus.

4.1 Existence d'un cocycle

Le fait d'agir sur un arbre force un groupe à posséder un cocycle dans une certaine représentation (la représentation unitaire de G sur les fonctions L^2 définies sur l'ensemble des arêtes de l'arbre).

Proposition 4.1

Soit G un groupe agissant (sans inversion) sur un arbre $T = (S, \mathbb{A})^5$ et soit π la représentation unitaire de G sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{A})$ des fonctions L^2 sur les arêtes. Si G agit sans point fixe sur T alors G admet un cocycle non trivial à valeurs dans π :

$$\exists 0 \neq c_T \in H^1(G, \pi).$$

Démonstration :

Si x et y sont deux sommets de T , on note $[x \rightarrow y]$ le segment orienté de x vers y et, si a est une arête de T , on note \bar{a} son inverse. Fixons alors s un sommet de T et considérons l'application $c_T : G \rightarrow \mathcal{H}$ définie par :

$$c_T(g)(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in [x \rightarrow y] \\ -1 & \text{si } \bar{a} \in [x \rightarrow y] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que c_T satisfait la relation :

$$\forall (g, h) \in G, c_T(gh) = g \cdot c_T(h) + c_T(h),$$

c_T est donc bien un cocycle⁶. Reste à vérifier que ce cocycle n'est pas trivial. Pour cela, on remarque que la norme de c_T vérifie (d désigne la distance dans l'arbre) :

$$\forall g \in G, \|c_T(g)\|^2 = 2d(g(s), s).$$

Si c_T était un cobord ($c_T(g) = v - g \cdot v$ pour un certain $v \in \mathcal{H}$), sa norme serait bornée et l'orbite de s serait donc bornée dans T . Or, un groupe agissant (sans inversion) dans un arbre avec une orbite bornée admet nécessairement un point fixe : le "centre" de cette orbite doit être fixé par G . Pour plus de détails sur ce dernier point, on pourra se reporter à [Se]. \square

Dans la situation qui nous intéresse (groupe s'écrivant comme une somme amalgamée non triviale), nous avons vu que le groupe G agit naturellement sur un arbre T et que cette action ne fixe aucun point de T et de ∂T (voir la démonstration du lemme 3.1). La proposition précédente nous fournit donc un cocycle non trivial à valeurs dans une certaine représentation unitaire.

⁴cette approche nous a été suggérée par Thomas Delzant.

⁵ S désigne l'ensemble des sommets et \mathbb{A} l'ensemble des arêtes de l'arbre.

⁶le choix de s importe peu : si on change le point base, on change le cocycle par un cobord

Proposition 4.2

Si G est comme dans le théorème 3, le cocycle c_T est en fait réduit :

$$0 \neq c_T \in \overline{H}^1(G, \pi).$$

Pour démontrer la proposition 4.2, nous nous appuyerons sur le lemme suivant :

Lemme 4.1

Soit G un groupe non moyennable agissant proprement sur un arbre et soit π la représentation linéaire associée. Toute la cohomologie est alors réduite :

$$H^1(G, \pi) = \overline{H}^1(G, \pi).$$

Démonstration :

Si \mathbb{A} désigne l'ensemble des arêtes orientées de l'arbre, la représentation de G sur $l^2(\mathbb{A})$ se décompose de la façon suivante :

$$l^2(\mathbb{A}) = \bigoplus l^2(G/G_a),$$

la somme portant sur les orbites et G_a désignant le stabilisateur de l'arête a . Comme l'action est propre, G_a est un sous-groupe fini de G et, en particulier, $l^2(G/G_a)$ s'identifie⁷ à une sous-représentation de la représentation régulière de G . Ainsi, la représentation $l^2(\mathbb{A})$ est contenue dans un multiple de la représentation régulière ; comme nous avons supposé G non moyennable, ceci entraîne que la représentation triviale n'est pas faiblement contenue dans $l^2(\mathbb{A})$. Le fait que $l^2(\mathbb{A})$ ne possède pas de vecteur presque invariant permet d'appliquer le lemme de Guichardet (lemme B.1) : la cohomologie de la représentation est entièrement réduite. \square

Démonstration de la proposition 4.2 :

Le groupe G s'écrit donc comme une somme amalgamée

$$G = G_1 \underset{\Delta}{*} G_2$$

avec Δ d'indice au moins 2 dans G_1 et au moins 3 dans G_2 . Soit donc $a \in G_1 \setminus \Delta$ et $b, c \in G_2 \setminus \Delta$ avec de plus $b\Delta \neq c\Delta$ et considérons les éléments de G :

$$x = ab \quad \text{et} \quad y = ac.$$

Le théorème sur la forme normale des éléments d'une somme amalgamée (théorème 5) montre immédiatement que

- (i) x et y engendrent un groupe libre F_2 dans G
- (ii) F_2 agit proprement (et librement) sur l'arbre T associé à G .

On peut donc appliquer le lemme 4.1 au sous-groupe F_2 (hautement non moyennable) : le cocycle c_T restreint à F_2 est non trivial donc également non nul en cohomologie réduite (puisque toute la cohomologie est réduite) ; il ne peut donc pas être nul dans $\overline{H}^1(G, \pi)$. \square

⁷l'application $\varphi : l^2(G/G_a) \rightarrow l^2(G)$ définie par

$$\varphi(u)_g = \frac{1}{|G_a|^{1/2}} u_{\bar{g}}$$

est une isométrie G -équivariante.

4.2 Intégration de c_T

La représentation $\pi : G = \pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{U}(\mathcal{H})$ permet de construire un fibré hermitien plat E_π sur X (dont les fibres sont isomorphes à \mathcal{H}). Comme ce fibré est plat, on peut définir l'opérateur d sur les formes à valeurs dans E_π et de même pour l'opérateur d^* ; on a donc une notion de formes harmoniques à valeurs E_π . D'autre part, l'intégration des 1-formes fournit un isomorphisme

$$H^1(X, E_\pi) \xrightarrow{\sim} H^1(G, \pi)$$

mais (à la différence du cas de la dimension finie), ces classes n'admettent pas nécessairement de représentants harmoniques. En effet, on a dans cette situation :

Théorème 4 (Hodge-de Rham)

Les formes harmoniques représentent la cohomologie réduite :

$$\overline{H}^1(X, E_\pi) \simeq \overline{H}^1(G, \pi) \simeq \mathrm{Harm}^1(X, E_\pi).$$

D'après le lemme 4.2, on peut appliquer le théorème précédent au cocycle c_T : ce cocycle est représenté par une 1-forme harmonique à valeurs dans E_π . De plus, sur une variété kählérienne compacte, une 1-forme harmonique est la partie réelle d'une 1-forme holomorphe. En considérant une primitive de c_T sur \tilde{X} , on obtient donc :

Proposition 4.3

Il existe une application holomorphe ρ_T -équivariante

$$F : \tilde{X} \longrightarrow \mathcal{H},$$

où ρ_T désigne la représentation (isométrique) **affine**

$$\rho_T(g)v = \pi(g)v + c_T(g)$$

de G sur \mathcal{H} .

4.3 Conclusion

Comme le cocycle c_T vient d'un arbre, il est de rang 1 ; c'est-à-dire que la différentielle de l'application f est de rang 1 (et f n'est pas constante car c_T n'est pas un cobord) : localement, c_T est induit par une fonction réelle et donc df est bien de rang au plus 1. On en déduit donc que l'image de f est une courbe que l'on notera \mathcal{C} . Le groupe $G = \pi_1(X)$ agit donc sur \mathcal{C} via un quotient Γ et l'action de Γ est cocompacte. De plus, comme le cocycle c_T tend vers l'infini à l'infini dans le sous-groupe libre F_2 (introduit dans la démonstration de la proposition 4.2), on en déduit que ce sous-groupe agit fidèlement sur \mathcal{C} . Ceci montre en particulier que \mathcal{C} est une courbe hyperbolique : en effet, le groupe d'automorphisme d'une courbe revêtue par \mathcal{C} est virtuellement résoluble. Le revêtement universel de la courbe \mathcal{C} est donc à nouveau \mathbb{D} et, grâce au lemme C.1, on peut remplacer \mathcal{C} par \mathbb{D} et le groupe $\overline{\Gamma}$ relevant l'action de Γ sur \mathbb{D} contient toujours un groupe libre (propriété universelle des groupes libres). Ceci nous montre que $\overline{\Gamma}$ est Zariski-dense dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$: en effet, les sous-groupes algébriques stricts de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont résolubles. D'après le lemme C.2,

$\bar{\Gamma}$ est soit discret soit dense. Si il était dense, l'application f serait constante, ce qui n'est pas le cas. On a donc une application holomorphe

$$f : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{D}$$

équivariante pour une représentation

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

dont l'image est un sous-groupe discret et cocompact. Il est bien connu qu'un sous-groupe discret et cocompact de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ contient un sous-groupe d'indice fini sans torsion : ceci fournit alors une fibration sur une courbe de genre $g \geq 2$ sur un revêtement étale fini de X et conclut la démonstration du théorème 3.

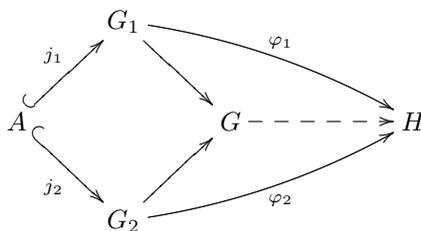
Appendices

A Sommes amalgamées

Soit G_1 et G_2 deux groupes possédant un sous-groupe commun A identifié au moyen de morphismes injectifs

$$j_i : A \hookrightarrow G_i.$$

La somme amalgamée de G_1 et G_2 sur A est le groupe G réalisant le problème universel suivant : tout couple de morphisme $\varphi_i : G_i \longrightarrow H$ (H un groupe arbitraire) coïncidant sur A (i.e. tel que $\varphi_1 \circ j_1 = \varphi_2 \circ j_2$) se factorise par G . On peut résumer ceci dans le diagramme :



Définition 1

On note le groupe ainsi obtenu :

$$G = G_1 *_A G_2.$$

On peut définir G par générateurs et relations en posant⁸ :

$$G = \langle G_1, G_2 \mid j_1(a)j_2(a)^{-1} (a \in A) \rangle.$$

Le groupe G est donc naturellement doté de trois morphismes $f_i : G_i \longrightarrow G$ et $f : A \longrightarrow G$ (avec bien sûr $f = f_i \circ j_i$). Nous allons décrire la forme des éléments de ce groupe grâce à ces trois applications. Pour ce faire, considérons S_i un système de représentants de G_i/A et supposons que $1 \in S_i$. Si (i_1, \dots, i_n) est une suite d'indices avec $i_k \in \{1, 2\}$, on dit qu'elle est réduite si

$$\forall k = 1..n-1, i_k \neq i_{k+1}.$$

⁸et sans oublier les relations qui viennent des structures de G_1 et G_2 !

Théorème 5 (forme normale des éléments d'une somme amalgamée)
Pour tout élément $g \in G$ ($g \neq 1$), il existe un élément $a \in A$, une suite réduite (i_1, \dots, i_n) et des éléments $s_k \in S_{i_k} \setminus \{1\}$ tels que :

$$g = f(a)f_{i_1}(s_{i_1}) \dots f_{i_n}(s_{i_n}).$$

De plus, ces éléments sont uniquement déterminés par g . En particulier, les morphismes f , f_1 et f_2 sont injectifs.

Un groupe s'écrivant comme une somme amalgamée (non triviale) agit naturellement sur un arbre; rappelons en brièvement la construction. Avec les notations ci-dessus, on considère :

$$|T| = G/G_1 \amalg G_2 \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(T) = G/A.$$

Comme A est à la fois un sous-groupe de G_1 et de G_2 , $\mathbb{A}(T)$ est muni de deux applications

$$\mathbb{A}(T) \xrightarrow{e_i} G/G_i \subset |T|.$$

La donnée de $T = (|T|, \mathbb{A}(T))$ et des applications e_i est un arbre (les applications e_i fournissant les extrémités d'une arête $a \in \mathbb{A}(T)$). D'autre part, d'après la description de l'arbre T , il est absolument clair que T est muni d'une action sans point fixe (et sans inversion) de G . Pour cette action, T possède une arête $a = [p, q]$ qui est un domaine fondamental de l'action et les stabilisateurs de p , q et a sont respectivement G_1 , G_2 et A .

Enfin, rappelons le lien qu'entretiennent les sommes amalgamées avec la propriété (FA) de Serre.

Définition 2

Un groupe G a la propriété (FA) si toute action (sans inversion) de G sur un arbre fixe un sommet.

Pour un groupe, le fait d'être une somme amalgamée constitue quasiment la négation de la propriété (FA).

Théorème 6 (J.-P. Serre)

Un groupe dénombrable G a la propriété (FA) si et seulement il vérifie les propriétés suivantes :

- (i) G est de type fini,
- (ii) \mathbb{Z} n'est pas un quotient de G ,
- (iii) G ne peut pas s'écrire comme une somme amalgamée non triviale.

Bien entendu, la lecture (ou la relecture) de [Se] doit être une suite logique de celle de ces quelques rappels.

B Cohomologie des groupes

Pour une étude systématique des représentations unitaires des groupes localement compacts, on pourra se reporter à [BHV08]. Soit G un groupe (discret)

et $\pi : G \longrightarrow U(\mathcal{H})$ une représentation unitaire de G . On définit les cocycles (et les cobords) à valeur dans π par :

$$Z^1(G, \pi) = \{b : G \rightarrow \mathcal{H} \mid \forall (g, h) \in G, b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g)\} \text{ et}$$

$$B^1(G, \pi) = \{b : G \rightarrow \mathcal{H} \mid \exists \xi \in \mathcal{H}, \forall g \in G, b(g) = \xi - \pi(g)\xi\}.$$

Définition 3

La cohomologie (et la cohomologie réduite) de G à valeur dans π est définie par :

$$H^1(G, \pi) = Z^1(G, \pi)/B^1(G, \pi) \text{ et } \overline{H}^1(G, \pi) = Z^1(G, \pi)/\overline{B^1(G, \pi)}$$

où Z^1 est munie de la topologie de la convergence simple.

Il est bien immédiat de vérifier que la formule

$$\alpha(g)v = \pi(g)v + b(g)$$

définit une action par isométrie affine si et seulement si b est un cocycle. On a alors la caractérisation suivante du fait que b soit un cobord.

Proposition B.1

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) b est un cobord
- (2) b est borné sur G
- (3) l'action de G par α admet un point fixe
- (4) α est conjuguée à π par une translation.

Démonstration :

Seule l'implication (2) \Rightarrow (3) mérite qu'on s'y attarde. Si b est borné, toute orbite de G par α est bornée dans \mathcal{H} . Considérons une de ces orbites : il s'agit d'une partie G -invariante et bornée de \mathcal{H} et son centre (le centre de la boule fermée de plus petit rayon la contenant) est alors un point fixe de G . \square

Nous allons pour finir énoncer un critère assurant que la cohomologie d'une représentation est entièrement réduite. Pour cela, rappelons la définition suivante.

Définition 4

Une représentation a des vecteurs presque invariants si pour toute partie finie Q de G et tout $\epsilon > 0$, il existe un vecteur non nul $\xi \in \mathcal{H}$ tel que :

$$\sup_{g \in Q} (\|\pi(g)\xi - \xi\|) \leq \epsilon.$$

Avec cette terminologie, la moyennabilité d'un groupe peut s'exprimer par le fait que la représentation régulière possède des vecteurs presque invariants.

Nous pouvons maintenant énoncer le critère annoncé plus haut.

Lemme B.1 (Guichardet)

Soit (\mathcal{H}, π) une représentation unitaire de G ne possédant pas de vecteur presque invariant. Toute la cohomologie est alors réduite :

$$H^1(G, \pi) = \overline{H}^1(G, \pi).$$

Démonstration :

Il nous faut montrer que $B^1(G, \pi)$ est fermé dans $Z^1(G, \pi)$. Pour cela, considérons l'application (surjective)

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{H} & \longrightarrow & B^1(G, \pi) \\ \xi & \longmapsto & b(g) = \xi - \pi(g)\xi \end{cases}$$

qui est bien évidemment continue. Exprimons maintenant le fait que π ne possède pas de vecteur presque invariant : il existe une partie finie (non vide) Q de G et $\epsilon > 0$ tels que

$$\forall \xi \in \mathcal{H}, \sup_{g \in Q} (\|\Phi(\xi)(g)\|) \geq \epsilon \|\xi\|.$$

Soit alors une suite $(\xi_n)_{n \geq 1}$ de vecteur de \mathcal{H} telle que $(\Phi(\xi_n))_{n \geq 1}$ converge vers $b \in Z^1$. En utilisant l'ingalité ci-dessus (pour un $g \in Q$), on déduit :

$$\|\xi_n - \xi_m\| \leq \frac{1}{\epsilon} \|\Phi(\xi_n)(g) - \Phi(\xi_m)(g)\|.$$

En particulier, $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans \mathcal{H} et donc converge vers un élément ξ ; par continuité de Φ , on en déduit que $b = \Phi(\xi)$ et $B^1(G, \pi)$ est bien fermé dans $Z^1(G, \pi)$. \square

C Deux lemmes

Lemme C.1

Soit X et Y deux variétés (topologiques, connexes...) et $f : \tilde{X} \longrightarrow Y$ une application continue du revêtement universel de X vers Y qui est de plus ρ -équivariante pour une certaine représentation

$$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \text{Aut}(Y).$$

Il existe alors un relèvement

$$\tilde{f} : \tilde{X} \longrightarrow Y$$

qui est $\tilde{\rho}$ -équivariant pour une certaine représentation de $\pi_1(X)$ dans $\text{Aut}(\tilde{Y})$.

Démonstration :

Commençons par la remarque suivante : il existe un sous-groupe $\text{Aut}(\tilde{Y}/Y)$ de $\text{Aut}(\tilde{Y})$ qui est une extension

$$1 \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \text{Aut}(\tilde{Y}/Y) \longrightarrow \text{Aut}(Y) \longrightarrow 1.$$

Il suffit en effet de considérer :

$$\text{Aut}(\tilde{Y}/Y) = \left\{ g \in \text{Aut}(\tilde{Y}) \mid \exists h \in \text{Aut}(Y), \pi \circ g = h \circ \pi \right\}$$

où $\pi : \tilde{Y} \longrightarrow Y$ désigne la projection naturelle. On vérifie aisément que $\text{Aut}(\tilde{Y}/Y)$ est un groupe. De plus, si $g \in \text{Aut}(\tilde{Y}/Y)$, l'automorphisme h apparaissant dans la définition ci-dessus est unique (surjectivité de π) ; $\text{Aut}(\tilde{Y}/Y)$ est donc naturellement muni d'un morphisme (surjectif)

$$\text{Aut}(\tilde{Y}/Y) \longrightarrow \text{Aut}(Y)$$

dont le noyau n'est autre que $\pi_1(Y)$.

Il nous reste à montrer que l'on peut relever f et la représentation. Pour cela, choisissons $x \in \tilde{X}$ un point base et considérons $y = f(x)$ et \tilde{y} un point de la fibre $\pi^{-1}(y)$. Comme \tilde{X} est simplement connexe, il existe un (unique) relèvement \tilde{f} de f tel que $\tilde{f}(x) = \tilde{y}$:

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{Y}, \tilde{y}) \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ (\tilde{X}, x) & \xrightarrow{f} & (Y, y) \end{array}$$

A l'aide de ce relèvement, on peut construire l'application

$$\tilde{\rho} : \pi_1(X) \longrightarrow \text{Aut}(\tilde{Y}/Y)$$

définie de la façon suivante : $\tilde{\rho}(\gamma)$ (pour $\gamma \in \pi_1(X)$) est l'*unique* automorphisme de \tilde{Y} vérifiant

$$\begin{cases} \pi \circ \tilde{\rho}(\gamma) &= \rho(\gamma) \circ \pi \\ \tilde{\rho}(\gamma)(\tilde{y}) &= \tilde{f}(\gamma(x)). \end{cases}$$

Les deux applications $\tilde{f} \circ \gamma$ et $\tilde{\rho}(\gamma) \circ \tilde{f}$ sont alors deux relèvements de $f \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ f$ et ils coïncident au point x ; par unicité, on en déduit :

$$\forall \gamma \in \pi_1(X), \tilde{f} \circ \gamma = \tilde{\rho}(\gamma) \circ \tilde{f}. \quad (3)$$

Soit alors γ_1 et γ_2 et considérons l'élément

$$g = \tilde{\rho}((\gamma_1\gamma_2)^{-1}) \circ \tilde{\rho}(\gamma_1) \circ \tilde{\rho}(\gamma_2).$$

En appliquant plusieurs fois la propriété définissant $\tilde{\rho}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \pi \circ g &= \pi \circ \tilde{\rho}((\gamma_1\gamma_2)^{-1}) \circ \tilde{\rho}(\gamma_1) \circ \tilde{\rho}(\gamma_2) \\ &= \rho((\gamma_1\gamma_2)^{-1}) \circ \pi \circ \tilde{\rho}(\gamma_1) \circ \tilde{\rho}(\gamma_2) \\ &= \rho((\gamma_1\gamma_2)^{-1}) \circ \rho(\gamma_1) \circ \pi \circ \tilde{\rho}(\gamma_2) \\ &= \rho((\gamma_1\gamma_2)^{-1}) \circ \rho(\gamma_1) \circ \rho(\gamma_2) \circ \pi = \pi \end{aligned}$$

car ρ est un morphisme; l'élément g est donc dans $\pi_1(Y)$. De même, en appliquant plusieurs fois la relation (3), on vérifie que :

$$g \circ \tilde{f} = \tilde{f}.$$

En évaluant cette dernière égalité au point x , on en déduit que g est un élément de $\pi_1(Y)$ qui fixe \tilde{y} et donc $g = 1$. On a donc obtenu :

$$\forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \pi_1(X), \tilde{\rho}(\gamma_1) \circ \tilde{\rho}(\gamma_2) = \tilde{\rho}((\gamma_1\gamma_2)^{-1})^{-1}.$$

En effectuant le même jeu que ci-dessus avec l'élément

$$h = \tilde{\rho}(\gamma) \circ \tilde{\rho}(\gamma^{-1}),$$

on obtiendrait également :

$$\forall \gamma \in \pi_1(X), \tilde{\rho}(\gamma^{-1}) = \tilde{\rho}(\gamma)^{-1}.$$

En conclusion, $\tilde{\rho}$ est bien un morphisme pour lequel \tilde{f} est équivariante. \square

Lemme C.2

Soit G un groupe de Lie connexe simple (à centre trivial) et H un sous-groupe de G . Si H est Zariski-dense dans G alors H est soit discret soit dense dans G .

Démonstration :

Les hypothèses faites sur G nous assurent que G s'identifie à un groupe linéaire algébrique (*via* la représentation adjointe). Considérons alors \overline{H} l'adhérence topologique de H ; c'est un sous-groupe de Lie de G et nous noterons son algèbre de Lie

$$\mathfrak{h} = \text{Lie}(\overline{H}).$$

Le normalisateur de \mathfrak{h} dans G est un sous-groupe algébrique de G (la condition de normaliser \mathfrak{h} s'exprime algébriquement en termes matriciels) et, comme il contient H qui est Zariski-dense dans G , on en déduit :

$$N_{\mathfrak{h}|G} = G.$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{h} est donc un idéal de $\text{Lie}(G)$ et on a donc

$$\mathfrak{h} = 0 \text{ ou } \text{Lie}(G)$$

puisque G est simple. La première égalité correspond au cas où $H = \overline{H}$ est discret alors que la deuxième se produit lorsque $\overline{H} = G$. \square

Références

- [BHV08] B. Bekka, P. de la Harpe et A. Valette, *Kazhdan's property (T)*, Cambridge University Press, New Mathematical Monographs **11** (2008).
- [GS92] M. Gromov et R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p -adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Publ. Math. I.H.E.S. **76** (1992), 165-246.
- [H51] G. Higman, *A finitely generated infinite simple group*, J. London Maths. Soc. **26** (1951) 59-61.
- [KS97] N. Korevaar et R. Schoen, *Global existence Theorems for Harmonic Maps to non-locally compact Spaces*, Comm. Anal. Geom **5** (1997), no. 2, 333-387.
- [Se] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames et SL_2* , Astérisque, SMF (1977).
- [S03] X. Sun, *Regularity of harmonic maps to trees*, Amer. J. Math., **125** (2003), no. 4, 737-771