Le théorème de Hardy (Agreg 1975)

Partie I

Question 1.a.

L'application $z \mapsto e^{2i\pi z/\lambda}$ de $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}^*$ est un revêtement dont le groupe de transformation est engendré par la transformation de $\mathbb{H}$ donnée par $z \mapsto z+\lambda$. Une fonction f holomorphe sur $\mathbb{H}$ vérifiant $f(z+\lambda) = f(z)$ descend donc en une fonction holomorphe g sur $\mathbb{D}^*$:

$$f(z) = g(e^{2i\pi z/\lambda}) \text{ avec } g : \mathbb{D}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

Question 1.b.

En utilisant la fonction g, on a :

$$a_n = \frac{1}{\lambda}\int_{x_0}^{x_0+\lambda} g(e^{2i\pi(t+iy_0)/\lambda})e^{2i\pi n(t+iy_0)/\lambda}dt = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g(u)}{u^{n+1}}du$$

en posant $u = e^{2i\pi(t+iy_0)/\lambda}$ et en notant γ le cercle (orientée positivement) de centre 0 et de rayon $e^{-2\pi y_0/\lambda}$. Cette intégrale ne dépend pas du cercle choisi et ceci montre que a_n ne dépend pas de z_0. De plus, on reconnaît l'expression des coefficients du développement de g en série de Laurent :

$$g(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n \quad \text{pour } 0 < |q| < 1$$

avec convergence uniforme de la série sur tout compact de $\mathbb{D}^*$. En reportant dans l'expression de f, on obtient :

$$\forall\, z \in \mathbb{H},\ f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi nz/\lambda}$$

avec convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{H}$.
Les conditions d'être méromorphe et holomorphe à l'infini s'expriment respectivement de la façon suivante :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\, \forall n < k,\, a_n = 0 \quad \text{et} \quad \forall n < 0,\, a_n = 0.$$

Question 1.c.

En reportant l'estimation vérifiée par f dans l'intégrale définissant a_n, on obtient :

$$|a_n| \le \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda |f(t+iy)|\, e^{2n\pi y/\lambda}dt \le Cy^{-1-\rho}e^{2n\pi y/\lambda}$$

et ce pour tout $0 < y \leq 1$. En choisissant $y = 1/n$, cette inégalité devient :

$$|a_n| \leq Ce^{2\pi/\lambda} n^{1+\rho}.$$

Question 2.a.

Un calcul direct donne :

$$\begin{aligned}\log(\frac{u_{n+1}}{u_n}) &= \rho \log(1 + \frac{1}{n}) + \log(1 - \frac{\rho}{n+1+\rho}) \\ &= \frac{\rho}{n} - \frac{\rho}{n+1+\rho} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

et la série $\sum_n \log(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ est absolument convergente. Si on note S un majorant des sommes partielles, on obtient :

$$\log(u_n) - \log(u_1) = \sum_{k=1}^{n-1} \log(\frac{u_{n+1}}{u_n}) \leq S$$

d'où :

$$u_n \leq u_1 e^S = (1+\rho)e^S.$$

Question 2.b.

Si $|a_n| \leq Mn^\rho$ pour tout $n \geq 1$, la série définissant f converge normalement sur tout compact de $\mathbb{H}$. En effet, pour $\mathrm{Im}(z) \geq \delta > 0$, on a :

$$\left|a_n e^{2in\pi z/\lambda}\right| = |a_n|\, e^{-2n\pi \mathrm{Im}(z)/\lambda} \leq Mn^\rho \left(e^{-2\pi\delta/\lambda}\right)^n$$

et la série est bien convergente : f est holomorphe sur $\mathbb{H}$. De plus, cette même majoration donne :

$$\begin{aligned}|f(x+iy) - a_0| &\leq \sum_{n\geq 1} |a_n|\, e^{-2n\pi y/\lambda} \leq M \sum_{n\geq 1} n^\rho e^{-2n\pi y/\lambda} \\ &\leq MC_\rho \sum_{n\geq 0} \frac{(\rho+1)\dots(\rho+n)}{n!} \left(e^{-2\pi y/\lambda}\right)^n \\ &= MC_\rho \frac{1}{(1-e^{-2\pi y/\lambda})^{\rho+1}} = MC_\rho \left(\frac{y}{1-e^{-2\pi y/\lambda}}\right)^{\rho+1} \frac{1}{y^{\rho+1}}\end{aligned}$$

la troisième inégalité s'appuyant sur la question 2.a. Or, la fonction

$$y \mapsto \frac{y}{1-e^{-2\pi y/\lambda}}$$

est continue sur $[0,1]$ donc bornée. Finalement, il existe une constante $c = c(M,\rho,\lambda) > 0$ telle que :

$$\forall\, 0 < y \leq 1,\ |f(x+iy)| \leq cy^{-1-\rho}.$$

Si $\gamma > 0$, on obtient de même pour $t > 0$:

$$\begin{aligned}
t^\gamma \left|f(it) - a_0\right| &\leq t^\gamma \sum_{n\geq 1} |a_n|\, e^{-2n\pi t/\lambda} \\
&\leq t^\gamma C' \sum_{n\geq 1} \frac{(\rho+1)\dots(\rho+n)}{n!} \left(e^{-2\pi t/\lambda}\right)^n \\
&\leq t^\gamma C' (\frac{1}{(1-e^{-2\pi t/\lambda})^{\rho+1}} - 1).
\end{aligned}$$

Or, on montre facilement l'existence d'une constante $C'' > 0$ telle que :

$$\forall\, x \in [0, 1/2],\ \left|\frac{1}{(1-x)^{\rho+1}} - 1\right| \leq C'' x.$$

On en déduit donc :

$$t^\gamma \left|f(it) - a_0\right| \leq C'C'' t^\gamma e^{-2\pi t/\lambda}$$

pour $t >> 1$, ce qui montre bien :

$$\forall\, \gamma > 0,\ \lim_{t\to+\infty} t^\gamma \left|f(it) - a_0\right| = 0.$$

Partie II

Question 1.a.

Le terme général de la série définissant $\varphi(s)$ est majoré par :

$$\left|\frac{a_n}{n^s}\right| \leq C \frac{n^\rho}{n^{\mathrm{Re}(s)}}$$

et cette série converge donc absolument dès que $\mathrm{Re}(s) > \rho + 1$.

Question 1.b.

Tout d'abord, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1}(f(it) - a_0)dt$$

est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > \rho + 1$ d'après la question 2.b. En remplaçant f par la série la définissant et en procédant à un calcul formel, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} t^{s-1}(f(it)-a_0)dt &= \int_0^{+\infty} t^{s-1}\left(\sum_{n\geq 1} a_n e^{-2n\pi t/\lambda}\right)dt \\
&= \sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-2npit/\lambda}dt \\
&= \sum_{n\geq 1} a_n \int_0^{+\infty} \left(\frac{\lambda u}{2n\pi}\right)^{s-1} e^{-u}\frac{\lambda du}{2n\pi} \\
&= \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{s}\Gamma(s)\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s} = \Phi(s)
\end{aligned}$$

où, à la troisième ligne, on a posé $2n\pi t = \lambda u$. Pour justifier l'interversion série-intégrale de la deuxième intégrale, on peut par exemple invoquer le théorème de Lebesgue pour les séries.
Réciproquement, on écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} y^{-s}\Phi(s)ds &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=\alpha} y^{-s}(\frac{\lambda}{2\pi})^s\Gamma(s)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}\right)ds \\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{2i\pi}\int_{\mathrm{Re}(s)=\alpha}(\frac{2n\pi y}{\lambda})^{-s}\Gamma(s)ds \\
&= \sum_{n\geq 1} a_n e^{-2n\pi y/\lambda} = f(iy)-a_0
\end{aligned}$$

(en utilisant la formule d'inversion de Mellin). A nouveau, on justifie aisément ce calcul formel.

Question 1.c.

Pour $s = \sigma + it$ avec $\sigma > \rho + 1$ fixé, on a :

$$\left|s^2\Phi(s)\right| \leq |s|^2\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^{-\sigma}|\Gamma(s)|\sum_{n\geq 1}\frac{|a_n|}{n^\sigma}$$

d'où :

$$\left|s^2\Phi(s)\right| \leq M\,|s|^2\,|\Gamma(s)|\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\sigma-\rho}} \leq Ct^2\,|\Gamma(\sigma+it)|\,.$$

La fonction majorante tend vers 0 quand $|t|$ tend vers $+\infty$; la fonction $s^2\Phi(s)$ est *a fortiori* bornée sur toute droite verticale du demi-plan $\{\mathrm{Re}(s) > \rho+1\}$.

Avant de continuer, énonçons et démontrons une variante du principe du maximum :

Proposition 1

Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'une bande verticale de la forme :

$$\{a \leq \mathrm{Re}(s) \leq b, \, \mathrm{Im}(s) \geq 1\}.$$

Si f est bornée sur le bord de la bande et si f est à croissance exponentielle

$$\big(i.e.\ |f(x+iy)| \leq Ce^{Ay} \text{ pour } y >> 1\big),$$

f est bornée sur la bande en question.

Démonstration :

Quitte à translater, on peut supposer $a = -\pi/2$ et $b = \pi/2$. On considère alors la fonction auxiliaire

$$h_\epsilon(s) = \exp(-\epsilon e^{-is/2}).$$

Comme, pour $s = x + iy$ avec $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, on a :

$$\mathrm{Re}(e^{-is/2}) = \mathrm{Re}(e^{(-ix+y)/2}) = \cos(x/2)e^{y/2} \geq \frac{e^{y/2}}{\sqrt{2}}$$

et on en déduit la majoration suivante :

$$|f(s)h_\epsilon(s)| \leq C\exp(Ay - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}e^{y/2}).$$

Pour $\epsilon > 0$, on constate que cette quantité tend vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$. Si M désigne un majorant de f sur le bord de la bande, on en déduit en particulier que :

$$\forall\, y \geq y_0, \, |f(s)h_\epsilon(s)| \leq M \quad (\text{avec } s = x + iy).$$

Le maximum de la fonction fh_ϵ est donc atteint sur le compact

$$\{-\pi/2 \leq \mathrm{Re}(s) \leq \pi/2, \, 1 \leq \mathrm{Im}(s) \leq y_0\};$$

le principe du maximum nous permet alors d'affirmer que ce supremum est atteint sur le bord de ce rectangle. Or, sur le segment horizontal supérieur, le module de la fonction fh_ϵ est majoré par M. De plus, sur le bord de la bande, on vérifie facilement que la fonction h_ϵ vérifie $|h_\epsilon(s)| \leq 1$ pour $\epsilon > 0$. Finalement, on a montré :

$$|f(s)h_\epsilon(s)| \leq M$$

pour tout s dans la bande et pour tout $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers 0 dans l'inégalité ci-dessus, on en déduit que f est bornée dans la bande $\{a \leq \mathrm{Re}(s) \leq b,\, \mathrm{Im}(s) \geq 1\}$.$\square$

Question 2.a.

La fonction $s^2\Phi(s)$ est bornée sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \alpha$ (question précédente) et donc également sur la droite $\mathrm{Re}(s) = k - \alpha$ grâce à l'équation fonctionnelle vérifiée par Φ. De plus, comme les pôles de Φ sont situés en 0 et k, celle-ci est bornée sur les segments horizontaux de la frontière de U (c'est-à-dire $\{k - \alpha \leq \mathrm{Re}(s) \leq \alpha,\, |\mathrm{Im}(s)| = 1\}$). Enfin, on a supposé la fonction $\Phi(s) + a_0(1/s + \epsilon/(k - s))$ bornée dans toute bande verticale et on a donc :

$$\forall\, s \in U,\ \left|s^2\Phi(s)\right| \leq M\,|s|^2\,.$$

La fonction $s^2\Phi(s)$ est donc bornée sur le bord de U et à croissance sous-exponentielle dans U ; on peut appliquer la proposition 1 : $s^2\Phi(s)$ est bornée sur U.

Question 2.b.

Le changement de variable $s = k - u$ dans l'intégrale définissant I donne :

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_{\mathrm{Re}(s)=k-\alpha} y^{-s}\Phi(s)ds = \int_{\mathrm{Re}(u)=\alpha} y^{u-k}\Phi(k-u)du \\ &= \frac{\epsilon}{y^k}\int_{\mathrm{Re}(u)=\alpha} (1/y)^{-u}\Phi(u)du \end{aligned}$$

(le changement de variable renverse l'orientation des droites en question, ce qui explique le double changement de signe dans la deuxième égalité). On a donc :

$$\forall\, y > 0,\ I(y) = \frac{\epsilon}{y^k}J(\frac{1}{y}).$$

D'autre part, le théorème des résidus montre que :

$$J(y) - I(y) = 2i\pi \sum \mathrm{Res}(y^{-s}\Phi(s).$$

En effet, si on intègre sur le rectangle bord de

$$\{k - \alpha \leq \mathrm{Re}(s) \leq \alpha,\, -n \leq \mathrm{Im}(s) \leq n\}\,,$$

on constate avec la question précédente que l'intégrale sur les segments horizontaux tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Or, les seuls pôles de $y^{-s}\Phi(s)$ sont situés en 0 et en k avec pour résidu respectif $-a_0$ et $\epsilon a_0 y^{-k}$. On en déduit la relation :

$$\forall\, y > 0,\ J(y) - I(y) = \epsilon a_0 y^{-k} - a_0.$$

Question 2.c.

La question II.1.b montre que $J(y) = 2i\pi(f(iy) - a_0)$. On constate donc que la relation obtenue à la question précédente s'écrit aussi :

$$f(iy) = \epsilon y^{-k} f(\frac{i}{y}).$$

Comme les deux membres de l'égalité sont holomorphes, le principe du prolongement analytique s'applique et donne :

$$\boxed{\text{C}} \quad \forall\, z \in \mathbb{H},\ f(z) = \epsilon \left(\frac{z}{i}\right)^{-k} f(-\frac{1}{z}).$$

Question 3.

En utilisant la question II.1.b et en faisant intervenir le point 1 de l'intervalle d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \int_0^1 t^{s-1} f(it)dt - \frac{a_0}{s} + \int_1^{+\infty} t^{s-1}(f(it) - a_0)dt \\
&= \int_1^{+\infty} \epsilon u^{k-s-1} f(iu)du - \frac{a_0}{s} + \int_1^{+\infty} t^{s-1}(f(it) - a_0)dt \\
&= \epsilon\psi(k-s) - \frac{\epsilon a_0}{k-s} - \frac{a_0}{s} + \psi(s)
\end{aligned}$$

où on a posé

$$\psi(s) = \int_1^{+\infty} t^{s-1}(f(it) - a_0)dt$$

(la deuxième égalité résulte du changement de variable $u = 1/t$ et de l'équation fonctionnelle $\boxed{\text{C}}$ vérifiée par f). La fonction ψ est entière car

$$f(it) - a_0 = \underset{+\infty}{o}(t^{-n})$$

pour tout n (question I.2.b) et cette même estimation montre que ψ est bornée dans toute bande verticale. On en déduit donc que la fonction $\Phi(s) + a_0(\frac{1}{s} + \frac{\epsilon}{k-s})$ se prolonge en une fonction entière, bornée dans toute bande verticale et que :

$$\forall\, s \in \mathbb{C} \setminus \{0, k\}\,,\ \Phi(k-s) = \epsilon\Phi(s)$$

Question 4.a.

Pour $t > 0$ fixé, la fonction

$$F(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t} e^{2i\pi xy} dx$$

est dérivable et, après dérivation et intégration par parties, on obtient :

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ F'(y) = -\frac{2\pi y}{t} F(y).$$

En intégrant, on en déduit $F(y) = F(0)e^{-\pi y^2/t}$. On calcule facilement $F(0)$:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t} dx = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et finalement :

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, t > 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2 t} e^{2i\pi xy} dx = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi y^2}{t}}.$$

Question 4.b.

Les coefficients de Fourier de ψ sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(n) &= \int_0^1 \psi(x) e^{2i\pi nx} dx \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-\pi(x+m)^2 t} e^{-2i\pi nx} dx \text{ (convergence normale sur [0,1])} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_m^{m+1} e^{-\pi u^2 t} e^{-2i\pi nu} du \text{ (en posant } x+m=u) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2 t} e^{-2i\pi nu} du = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}}.
\end{aligned}$$

Comme la convergence est normale, on en déduit :

$$\forall\ \in t,\ > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(x+n)^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} e^{2i\pi nx}.$$

En particulier, en $x = 0$, on obtient :

$$\forall\, t > 0,\ \theta(it) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta(-\frac{1}{it}).$$

Question 4.c.

La fonction θ est 2-périodique et vérifie, par prolongement analytique, la relation :

$$\forall\, z \in \mathbb{H},\ \theta(z) = \left(\frac{z}{i}\right)^{-1/2} \theta(-\frac{1}{z}).$$

Ceci correspond à la propriété $\boxed{\text{C}}$ avec $\lambda = 2$, $\epsilon = 1$ et $k = \frac{1}{2}$.

Question 4.d.

En regroupant les termes correspondants à n et $-n$, on constate que les coefficients de Fourier de θ sont donnés par $a_0 = 1$, $a_n = 2$ si n est un carré et 0 sinon. On en déduit :

$$\varphi(s) = 2\zeta(2s) \quad \text{et} \quad \Phi(s) = 2\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s).$$

Du prolongement méromorphe de Φ, on déduit que la fonction ζ a un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1, que $\zeta(0) = -1$, qu'elle s'annule sur les entiers pairs négatifs ($\zeta(-2n) = 0$) et que la fonction $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall\, s \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}\,,\ \xi(1-s) = \xi(s).$$

Partie III

Question 1.

Comme $U = V \cup \overline{V}$, si on sait montrer la majoration pour h sur V, on obtient la même majoration sur $\overline{V}$ en considérant $s \mapsto \overline{h(\overline{s})}$ sur V. De plus, en posant

$$m(s) = \left(\frac{s}{i}\right)^{-L(s)} l(s),$$

on constate qu'on se ramène à la situation $\beta_1 = \beta_2 = 0$. La fonction l est donc à croissance au plus exponentielle dans V et elle est bornée sur le bord de V (sur le segment horizontal, elle est bornée car continue). On peut appliquer la proposition 1 : la fonction l est bornée sur V.

Question 2.

La fonction Φ est bornée sur V et, comme $\varphi(s) = (\frac{2\pi}{\lambda})^s\Phi(s)\Gamma(s)^{-1}$, on en déduit :

$$\left|s^{\frac{k-1}{2}} m^s \varphi(s)\right| \leq Ct^{\frac{k-1}{2}}\,|\Gamma(s)|^{-1} \leq C' t^{k/2-\sigma} e^{\pi t/2}$$

et ainsi, pour tout $\alpha > \pi/2$, la fonction $s \mapsto e^{-\alpha|s|}Z(s)$ est bornée sur V.

Question 3.

On pose $b = \frac{k-1}{2}$. Sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \rho+1$, la convergence normale nous permet de remplacer φ par la somme et d'intervertir les symboles somme et intégrale :

$$\begin{aligned}
Z(s) &= \int s^b m^s \varphi(s) ds = \sum_{n\geq 1} a_n \int s^b (\frac{m}{n})^s ds \\
&= a_m \int s^b ds + \sum_{m\neq n} a_n \int s^b (\frac{m}{n})^s ds \\
&= \frac{a_m}{b+1} s^{b+1} + \sum_{m\neq n} a_n \int s^b (\frac{m}{n})^s ds
\end{aligned}$$

(l'égalité étant à une constante près et l'intégrale calculée par exemple sur un segment verticale de $\sigma + i$ à $\sigma + it$). Or, avec une intégration par partie, les termes avec $m \neq n$ donnent :

$$\int s^b (\frac{m}{n})^s ds = \frac{s^b}{\log(m/n)} (\frac{m}{n})^s - \frac{b}{\log(m/n)} \int s^{b-1} (\frac{m}{n})^s ds$$

ce qui montre que :

$$Z(s) = \frac{a_m}{b+1} (\sigma + it)^{b+1} + O(t^b).$$

Finalement, on a bien :

$$\sup_{t\geq 1} \left(t^{-a} \left| Z(\sigma + it) \right| \right) < +\infty \Longleftrightarrow a \geq \frac{k+1}{2}.$$

Question 4.a.

Soit $\sigma \in \mathbb{R}$; on choisit $\sigma_2 > \max(\sigma, \rho+1)$ de telle sorte que $k-\sigma_2 < \sigma < \sigma_2$ et on pose alors $\sigma_1 = k-\sigma_2$. Sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \sigma_2$, la fonction φ est bornée. D'autre part, en utilisant l'équation fonctionnelle $\boxed{\mathrm{A}}$, on obtient :

$$\varphi(k-s) = \epsilon(\frac{2\pi}{\lambda})^{-k} \varphi(s) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(k-s)}$$

ou encore :

$$|\varphi(\sigma_1 + it)| \leq C \frac{|\Gamma(\sigma_2 - it)|}{|\Gamma(\sigma_1 + it)|}.$$

Le comportement asymptotique de la fonction Γ dans une bande verticale étant rappelé, on en déduit :

$$|\varphi(\sigma_1 + it)| \leq C t^k.$$

On a de plus montré à la question III.2. que $\varphi(s)e^{-\alpha|s|}$ est bornée dans toute bande verticale pour $\alpha > \pi/2$. On peut ainsi appliquer la question III.1. avec $\beta_1 = k$, $\beta_2 = 0$: pour tout $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, on a

$$\sup_{|t|\geq 1} \left(|t|^{-L(\sigma)} \, |\varphi(\sigma + it)| \right) < +\infty$$

et $a = L(\sigma)$ répond donc à la question.

Question 4.b.

La relation :

$$\forall\, z \in \mathbb{H},\; f(z) - a_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s) ds$$

n'est rien d'autre que le prolongement analytique de la relation établie à la question II.1.b.

Question 4.c.

Si on intègre sur le bord du rectangle

$$\left\{ \frac{k}{2} \leq \mathrm{Re}(s) \leq \sigma,\; -n \leq \mathrm{Im}(s) \leq n \right\}$$

avec $\sigma > \rho + 1$, les contributions sur les côtés horizontaux tendent vers 0 quand $n \to +\infty$ et on a donc :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=k/2} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s) ds = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=\sigma} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s) ds + \mathrm{Res}_k \left((\frac{z}{i})^{-s} \Phi(s) \right)$$

et finalement :

$$\forall\, s \in \mathbb{H},\; \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathrm{Re}(s)=k/2} \left(\frac{z}{i}\right)^{-s} \Phi(s) ds = f(z) - a_0 + \epsilon a_0 (\frac{z}{i})^{-k}.$$

Question 5.a.

Comme les coefficients a_n sont réels, en utilisant la relation

$$\Phi(s) = (\frac{2\pi}{\lambda})^{-s} \Gamma(s) \varphi(s),$$

on constate facilement que $\overline{\Phi(\overline{s})} = \Phi(s)$ pour $\mathrm{Re}(s) > \rho + 1$; ces deux fonctions étant holomorphes, on en déduit que cette dernière égalité est vérifiée sur $\mathbb{C} \setminus \{0, k\}$. En particulier, on a donc :

$$\Phi(\frac{k}{2} + it) = \overline{\Phi(\frac{k}{2} - it)}.$$

Or, l'équation fonctionnelle $\boxed{\text{A}}$ prend, sur la droite $\text{Re}(s) = \frac{k}{2}$, la forme suivante :

$$\Phi(\frac{k}{2} + it) = \epsilon\Phi(\frac{k}{2} - it).$$

En comparant les deux dernières égalités, on obtient :

$$\Phi(\frac{k}{2} + it) = \epsilon\overline{\Phi(\frac{k}{2} + it)},$$

ce qui signifie exactement que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ i^{\frac{1-\epsilon}{2}}\Phi(\frac{k}{2} + it) \in \mathbb{R}.$$

Si on écrit l'égalité obtenue à la question précédente avec $z = e^{iu}$ (pour $0 < u << 1$), on obtient :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u-\pi/2)(k/2+it)}\Phi(\frac{k}{2} + it)dt = f(e^{iu}) - a_0 + \epsilon a_0 e^{i(\pi/2-u)k}$$

ou encore :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(u-\pi/2)t}\Phi(\frac{k}{2} + it)dt = \left(f(e^{iu}) - a_0 + \epsilon a_0 e^{i(\pi/2-u)k}\right) e^{ik(u-\pi/2)/2}.$$

En utilisant l'hypothèse faite dans l'énoncé, on en déduit que

$$u^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(u-\pi/2)t}\Phi(\frac{k}{2} + it)dt$$

reste bornée lorsque u tend vers 0. D'autre part, comme la fonction (φ donc) Φ n'a qu'un nombre fini de zéros sur la droite $\text{Re}(s) = k/2$, elle de "signe" constant en dehors d'un compact de cette droite (cf ci-dessus). Cette remarque nous garantit que

$$u^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(u-\pi/2)t}\left|\Phi(\frac{k}{2} + it)\right| dt$$

reste également bornée lorsque u tend vers 0. Comme $\Phi(k/2+it) = \overline{\Phi(k/2 - it)}$, on peut changer t en $-t$ dans l'intégrale ci-dessus : la quantité

$$u^\beta \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\pi/2-u)t}\left|\Phi(\frac{k}{2} + it)\right| dt$$

reste donc bornée lorsque u tend vers 0.

Question 5.b.

Comme l'intégrande est positif, la quantité :

$$u^{\beta}\int_0^{+\infty} e^{(\pi/2-u)t}\left|\Phi(\frac{k}{2}+it)\right| dt$$

est également bornée. En remplaçant Φ dans l'intégrale ci-dessus, on a :

$$u^{\beta}\int_0^{+\infty} e^{(\pi/2-u)t}\left|(\frac{2\pi}{\lambda})^{-(k/2+it)}\Gamma(\frac{k}{2}+it)\varphi(\frac{k}{2}+it)\right| dt = \underset{u\to 0}{O}(1)$$

et donc, d'après le comportement asymptotique de Γ, on en déduit :

$$u^{\beta}\int_0^{+\infty} e^{-ut}t^{\frac{k-1}{2}}\left|\varphi(\frac{k}{2}+it)\right| dt = \underset{u\to 0}{O}(1).$$

Si on coupe l'intégrale à $T >> 1$ et en posant $u = \frac{1}{T}$, on en conclut que

$$T^{-\beta}\int_0^{T} t^{\frac{k-1}{2}}\left|\varphi(\frac{k}{2}+it)\right| dt = \underset{T\to\infty}{O}(1)$$

car sur $[0, T]$, $e^{-t/T} \geq e^{-1}$.

Question 5.c.

La question précédente donne directement la majoration attendue puisque :

$$\begin{aligned}
T^{-\beta}\left|Z(\frac{k}{2}+iT)\right| &= T^{-\beta}\left|\int_{k/2+i}^{k/2+iT} s^{\frac{k-1}{2}}m^{s}\varphi(s)ds + cste\right| \\
&\leq CT^{-\beta}\int_1^{T} t^{\frac{k-1}{2}}\left|\varphi(\frac{k}{2}+it)\right| dt + C'T^{-\beta} \\
&\leq \underset{T\to\infty}{O}(1).
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\sup_{t\geq 1}\left(t^{-\beta}\left|Z(\frac{k}{2}+it)\right|\right) < +\infty.$$

Posons alors $a = \frac{k+1}{2}$ et choisissons $\sigma_0 > \max(\rho+1, \frac{k}{2})$. On sait que

$$t \mapsto t^{-a}Z(\sigma_0+it)$$

est bornée pour $t \geq 1$ (question III.3) et on vient de montrer que

$$t \mapsto t^{-\beta}Z(\frac{k}{2}+it)$$

est également bornée pour $t \geq 1$. De plus, dans la bande

$$\left\{\frac{k}{2} \leq \mathrm{Re}(s) \leq \sigma_0,\ \mathrm{Im}(s) \geq 1\right\},$$

la fonction Z est à croissance au plus exponentielle (III.3). On peut donc appliquer la question III.1 : pour tout $\sigma \in [\frac{k}{2}, \sigma_0]$, la fonction

$$t \mapsto t^{-L(\sigma)} Z(\sigma + it)$$

est bornée pour $t \geq 1$, où L est la fonction affine telle que $L(\frac{k}{2}) = \beta$ et $L(\sigma_0) = a$. Comme $\beta < a$, la fonction L est strictement croissante et, pour σ proche de σ_0 avec $\rho + 1 < \sigma < \sigma_0$, on a :

$$\sup_{t \geq 1} \left(t^{-L(\sigma)} \left|Z(\sigma + it)\right|\right) < +\infty$$

avec $L(\sigma) < L(\sigma_0) = a$. Ceci contredit la question III.3. et la fonction φ a donc une infinité de zéros sur la droite $\mathrm{Re}(s) = \frac{k}{2}$.

Question 6.a.

Soit $t > 0$; on considère la fonction :

$$\chi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+x+\frac{1}{2})^2 t}.$$

Cette fonction est 1-périodique avec convergence normale de la série et ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\hat{\chi}(n) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{t}} e^{-\pi n^2/t}.$$

En écrivant que χ est somme de sa série de Fourier en $x = 0$, on obtient alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi(n+\frac{1}{2})^2 t} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in^2\pi} e^{-\pi n^2/t}$$

(car $(-1)^n = (-1)^{n^2} = e^{i\pi n^2}$ car n et n^2 ont même parité). On peut reformuler cette égalité de la façon suivante :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2(1-\frac{1}{it})} = \sqrt{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n+\frac{1}{2})^2 it}.$$

Par prolongement analytique, on a bien :

$$\forall\, z \in \mathbb{H},\ \theta(1 - \frac{1}{z}) = \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi(n+\frac{1}{2})^2 z}.$$

Question 6.b.

Si on pose $e^{iu} = 1 - \frac{1}{z}$, on a $z = \frac{1}{1-e^{iu}} \sim \frac{i}{u}$ quand $u \to 0$. De la question précédente, on tire :

$$\theta(e^{iu}) = (z/i)^{1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(n+\frac{1}{2})^2 z} \leq Cu^{-1/2}.$$

Comme $1/2 = \beta < (k+1)/2 = 3/4$ et comme $\varphi(s) = 2\zeta(2s)$, on peut donc appliquer la question précédente :

$$\boxed{\text{la fonction } \zeta \text{ a une infinité de zéros sur la droite } \mathrm{Re}(s) = \tfrac{1}{2}.}$$

Appendice : comportement de la fonction Γ sur les droites verticales.

Pour simplifier, plaçons nous dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 0$. On va tout d'abord trouver une représentation intégrale de la dérivée de $\log(\Gamma)$.

Proposition 2

La dérivée logarithmique de la fonction Γ vérifie :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt.$$

Démonstration :

On part de

$$\Gamma'(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} \log(t) e^{-t} dt$$

et on remplace $\log(t)$ par la représentation intégrale :

$$\forall\, t > 0,\ \log(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx. \tag{1}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\Gamma'(z) &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_0^{+\infty} (e^{-x} - e^{-xt}) t^{z-1} e^{-t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \left(e^{-x}\Gamma(z) - \int_0^{+\infty} e^{-t(x+1)} t^{z-1} dt \right) \\
&= \Gamma(z) \int_0^{+\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right) \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

En séparant les deux intégrales (ce que l'on peut faire à condition de s'écarter de 0 puis de repasser à la limite), on pose $x+1=e^t$ dans la deuxième :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\log(1+\epsilon)}^{+\infty} \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt \right).$$

Quand $\epsilon \to 0$, on obtient la représentation intégrale ci-dessus.$\square$

Si on écrit cette relation en $z+1$, on obtient :

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^t-1} \right) dt.$$

Relation que l'on peut arranger sous la forme :

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-e^{-tz}}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-tz} dt - \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt$$

où on a posé :

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} = \frac{t}{12} + O(t^2).$$

La première intégrale correspond à la représentation du logarithme utilisée dans la démonstration de la proposition 2 d'où :

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \log(z) + \frac{1}{2z} - \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tz} dt.$$

En intégrant et en utilisant l'équation fonctionnelle $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on obtient :

$$\log(\Gamma(z)) = (z - \frac{1}{2}) \log(z) - z + 1 + \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-tz} - e^{-t}}{t} dt. \qquad (2)$$

On pose alors $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ qui est lisse en $t=0$ (avec $g(0) = 1/12$). Or, un calcul astucieux montre que

Lemme 1

$$I = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{2} \log(2\pi).$$

Démonstration :

Considérons la deuxième intégrale :

$$J = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-t/2}dt.$$

En évaluant (2) en $z = 1/2$, on obtient l'égalité :

$$J - I = \frac{1}{2}\log(\pi) - \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Or, on peut expliciter l'intégrale $J - I$:

$$\begin{aligned} J - I &= \int_0^{+\infty} e^{-t/2}\left(g(t) - \frac{g(t/2)}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{t}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{t} + \frac{1}{e^{t/2} - 1}\right)\right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t - 1}\right)\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} J = (J - I) + I = \int_0^{+\infty} \left[\frac{e^{-t/2}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} - e^{-t}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1}\right)\right]\frac{dt}{t} \\ = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2}\right)\frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

On remarque enfin que :

$$\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t^2} - \frac{e^{-t}}{2t} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t}\right) + \frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{2t},$$

ce qui donne (en utilisant (1) en $t = 1/2$) :

$$J = \left[\frac{e^{-t/2} - e^{-t}}{t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t} - e^{-t/2}}{t}\right) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log(2).$$

En reportant cette valeur de J dans (3), on en déduit $I = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi)$.□

On en déduit donc :

$$\log(\Gamma(z)) = (z - \frac{1}{2})\log(z) - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \int_0^{+\infty} g(t)e^{-tz}dt.$$

Comme $g'(t) \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$, une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} g(t)e^{-tz}dt\right| &= \left|\frac{1}{z}\left(g(0) - \int_0^{+\infty} g'(t)e^{-tz}dt\right)\right| \\ &\leq \frac{1}{|z|}\left(g(0) - \int_0^{+\infty} g'(t)dt\right) \\ &\leq \frac{2g(0)}{|z|} = \frac{1}{6\,|z|}.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\Gamma(z) = e^{(z-\frac{1}{2})\log(z) - z + \frac{1}{2}\log(2\pi)}(1 + \epsilon(z)) \tag{4}$$

avec $\epsilon(z) \to 0$ quand $|z| \to +\infty$ (dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$). Si maintenant, on cherche le comportement asymptotique de $|\Gamma|$ sur une droite $z = \sigma + it$ avec $t \to +\infty$, on doit estimer :

$$\mathrm{Re}((z - \frac{1}{2})\log(z) - z) = \mathrm{Re}((\sigma - 1/2 + it)\log(\sigma + it)) - \sigma.$$

En écrivant $\sigma + it = re^{i\theta}$ avec $r = \sqrt{\sigma^2 + t^2}$ et $\theta = \mathrm{Arctan}(t/\sigma)$, on a :

$$\log(\sigma + it) = \log(r) + i\theta = \log(t) + i(\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{t}) + O(\frac{1}{t^2})$$

et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}((z - \frac{1}{2})\log(z) - z) &= (\sigma - \frac{1}{2})\log(t) - t(\frac{\pi}{2} - \frac{\sigma}{t}) - \sigma + O(\frac{1}{t}) \\ &= (\sigma - \frac{1}{2})\log(t) - \frac{\pi}{2}t + O(\frac{1}{t}).\end{aligned}$$

Finalement, on a bien :

$$|\Gamma(\sigma + it)| \underset{t \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\sigma - \frac{1}{2}}.$$

Comme $\overline{\Gamma(\sigma + it)} = \Gamma(\sigma - it)$, on en déduit :

$$\boxed{\forall\, \sigma \in \mathbb{R},\ |\Gamma(\sigma + it)| \underset{|t| \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{\sigma - \frac{1}{2}}} \tag{5}$$

(en utilisant l'équation fonctionnelle de Γ, on se ramène facilement à $\sigma > 0$).

Remarque 1
En examinant un peux mieux les majorations, on constate facilement que l'équivalent (5) est en fait uniforme lorsque σ reste dans un compact de $\mathbb{R}$.

Remarque 2
La formule (4) permet d'étudier les asymptotiques de Γ *dans de nombreuses directions (contenues dans le demi-plan* $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$*) ; en particulier, elle permet de retrouver le développement de Stirling.*

Remarque 3
On peut aussi procéder de la façon suivante pour calculer I*. En posant* $C = e^{1-I}$*, on obtient l'équivalent*

$$|\Gamma(\sigma + it)| \underset{t\to+\infty}{\sim} Ce^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\sigma-\frac{1}{2}}$$

qui, pour $\sigma = 1/2$ *devient*

$$|\Gamma(1/2 + it)| \underset{t\to+\infty}{\sim} Ce^{-\frac{\pi}{2}t}.$$

Or, la formule des compléments sur la droite $\sigma = 1/2$ *s'écrit :*

$$\begin{aligned}|\Gamma(1/2 + it)|^2 &= \Gamma(1/2 + it)\Gamma(1/2 - it)\\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi(1/2 + it))} = \frac{\pi}{\cosh(\pi t)} \sim 2\pi e^{-\pi t}.\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$C = \sqrt{2\pi} \text{ et } I = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi).$$