Groupes d'automorphismes des variétés canoniquement polarisées (d'après Nadel et Frankel)

Benoît Claudon

Résumé

Dans cette note, nous donnons un aperçu des résultats de A. Nadel [Nad90] et S. Frankel [Fra95] autour de l'étude du revêtement universel d'une variété canoniquement polarisée (en particulier de son groupe d'automorphismes).

1 Introduction

Dans son article [Gri71], P. Griffiths parle de l'uniformisation en géométrie complexe comme l'un des "phénomènes les plus mystérieux et les plus profonds". Pour tenter de démystifier ce phénomène et de comprendre la géométrie du revêtement universel d'une variété complexe compacte (au moins kählérienne!), la première étape est certainement d'étudier les objets intrinséquement attachés à celui-ci. Ainsi, si $\tilde{X}$ désigne le revêtement universel d'une variété X , nous allons nous intéresser ici au groupe d'automorphismes $\text{Aut}(\tilde{X})$ de $\tilde{X}$.

Remarque 1.1

Pour espérer obtenir une structure raisonnable (par exemple celle de groupe de Lie) sur $\text{Aut}(\tilde{X})$, il faut restreindre la classe des variétés étudiées. Par exemple, si X est un tore ($\tilde{X} = \mathbb{C}^n$) et si $n \geq 2$, $\text{Aut}(\tilde{X})$ n'est pas un groupe de Lie puisqu'il contient toute les transformations du type :

$$(x, y) \mapsto (x, y + f(x))$$

avec $f : \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe (quelconque).

Dans la suite, nous allons donc nous restreindre à la classe des variétés canoniquement polarisées, *i.e.* celles pour lesquelles le fibré canonique K_X est ample. Du point de vue de la géométrie différentielle, ce sont exactement les variétés kählériennes munies d'une métrique à courbure de Ricci (strictement) négative. Pour cette classe de variétés, le groupe $\text{Aut}(\tilde{X})$ est naturellement muni d'une structure de groupe de Lie. En effet, une variété X avec K_X ample possède une métrique privilégiée :

Théorème 1.1 (T. Aubin, S. T. Yau, 1978)

Si X est une variété vérifiant $c_1(X) < 0$, elle admet une unique métrique de Kähler-Einstein ω_{KE} telle que :

$$\text{Ricci}(\omega_{KE}) = -\omega_{KE}.$$

Si $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ désigne le revêtement universel d'une telle variété, notons simplement $\Omega = \pi^*(\omega_{KE})$ le tiré en arrière de cette métrique sur $\tilde{X}$. En appliquant le lemme de Schwarz (dans sa version généralisée par Mok et Yau [MY83, §1]), il est aisé de constater que cette métrique Ω est l'unique métrique kählérienne complète à courbure de Ricci -1 sur $\tilde{X}$. Nous pouvons alors en déduire que les éléments de $\text{Aut}(\tilde{X})$ agissent par isométrie (pour la métrique Ω) sur $\tilde{X}$.

Corollaire 1.1

Le groupe $\text{Aut}(\tilde{X})$ est un sous-groupe fermé du groupe $\text{Isom}(\tilde{X}, \Omega)$; en particulier, il admet une structure de groupe de Lie (éventuellement de dimension nulle).

Notation : Dans toute la suite, nous noterons

$$G = \text{Aut}^0(\tilde{X})$$

la composante connexe de l'identité du groupe $\text{Aut}(\tilde{X})$.

L'objectif de ces notes est de donner la démonstration du résultat suivant extrait de [Nad90] :

Théorème 1.2 (A. Nadel, 1990)

Le groupe G est un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact.

Remarquons que ce groupe peut éventuellement être réduit à l'identité. La "philosophie" générale est la suivante : le caractère non-trivial du groupe G devrait refléter la présence d'un facteur de type domaine borné symétrique dans le revêtement universel $\tilde{X}$. C'est par exemple le cas en petite dimension comme le montre Nadel.

Théorème 1.3

Soit S une surface avec K_S ample. Son revêtement universel $\tilde{S}$ vérifie alors l'une des 3 assertions suivantes (et une seule) :

- (i) $\tilde{S} = \mathbb{B}^2$,
- (ii) $\tilde{S} = \mathbb{D}^2$,
- (iii) $\text{Aut}(\tilde{S})$ est un groupe discret (contenant alors $\pi_1(S)$ comme sous-groupe d'indice fini).

Ce résultat permet d'exhiber (de façon certes abstraite) un exemple de domaine borné de $\mathbb{C}^2$ admettant un quotient compact mais dont le groupe d'automorphismes est discret (en particulier, un tel domaine est bien loin d'être homogène). Soit en effet S une surface de Kodaira : c'est par définition une surface munie d'une submersion holomorphe $f : S \rightarrow C$ vers une courbe C (de genre $g \geq 2$) dont les fibres sont des courbes dont le module varie (*i.e.* f n'est pas isotriviale). Le revêtement universel d'une telle surface est alors (biholomorphe à) un domaine borné $\mathcal{D}$ contractile de $\mathbb{C}^2$ (appliquer par exemple [Gri71, lem. 6.2]). Comme il existe des exemples de surfaces de Kodaira avec

$$\frac{c_1^2(S)}{c_2(S)} \notin \{2, 3\},$$

le domaine $\mathcal{D}$ associé n'est pas biholomorphe à la boule ni au bidisque et vérifie donc le point (iii) du théorème 1.3 :

$\text{Aut}(\mathcal{D})$ est un groupe discret.

Dans [Fra95], Frankel affirme le cas général du théorème 1.3.

Théorème 1.4 (S. Frankel, 1995)

Si X est une variété canoniquement polarisée, son revêtement universel admet une décomposition :

$$\tilde{X} = \mathcal{D} \times \tilde{Y}$$

avec $\mathcal{D}$ un domaine borné symétrique et $\text{Aut}(\tilde{Y})$ discret.

Comme il nous a été difficile de suivre les arguments de Frankel, nous donnons un aperçu de la stratégie de la démonstration du théorème 1.4 et montrerons quelques étapes de celle-ci.

2 Étude du groupe G

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G ; le théorème 1.2 affirme que $\mathfrak{g}$ est semi-simple et sans facteur compact. L'argument essentiel pour montrer ceci est en fait la semi-stabilité du fibré tangent de X : celle-ci permet en effet de contrôler les sous-espaces globalement invariants (par l'action de $\pi_1(X)$) de champs de vecteur holomorphes sur $\tilde{X}$.

2.1 Semi-simplicité

Par l'absurde, nous supposons que $\mathfrak{g}$ n'est pas semi-simple. Considérons alors $\mathfrak{r} = \text{Rad}(\mathfrak{g}) \neq 0$ son radical : c'est le plus grand idéal résoluble de $\mathfrak{g}$. Le dernier terme non-nul de sa série dérivée :

$$\{0\} \subsetneq D^n(\mathfrak{r}) \subsetneq D^{n-1}(\mathfrak{r}) \subsetneq \dots \subsetneq D(\mathfrak{r}) \subsetneq \mathfrak{r}$$

est alors une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$; notons la $\mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{h}$ est définie intrinsèquement et comme $\mathfrak{r}$ est unique, on en déduit que $\mathfrak{h}$ est $\pi_1(X)$ -invariante. L'algèbre $H = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}$ peut alors être identifiée à une algèbre abélienne de champs de vecteurs (avec le crochet de Lie) $\pi_1(X)$ -invariante; cette algèbre induit une représentation :

$$\rho : \pi_1(X) \longrightarrow \text{GL}(H).$$

Proposition 2.1

*Si $(V_1, \dots, V_r)$ est une base de H , la famille $(V_1, \dots, V_r)$ est linéairement **dépendante** sur le corps $\mathbb{C}(\tilde{X})$ des fonctions méromorphes sur $\tilde{X}$.*

Démonstration :

Soit $E = \tilde{X} \times_\rho H$ le fibré plat associé à ρ . Par invariance, le morphisme d'évaluation descend en un morphisme de fibrés vectoriels :

$$\psi : E \longrightarrow T_X.$$

Considéré comme un morphisme de $\mathcal{O}_X$ -modules, ψ ne peut pas être injectif. Dans le cas contraire, on aurait en effet¹ :

$$0 = \mu(E) = \mu(\psi(E)) \leq \mu(T_X) < 0$$

¹la notation $\mu(F)$ désigne la pente (par rapport à la polarisation canonique) d'un faisceau cohérent sans torsion et est définie par $\mu(F) = \frac{1}{\text{rg}(F)} \int_X c_1(F) \wedge \omega_{KE}^{n-1}$. La semi-stabilité de T_X signifie exactement que $\mu(F) \leq \mu(T_X)$ pour tout sous-faisceau de T_X .

(platitude de E , injectivité de ψ et semi-stabilité de T_X justifiant la ligne ci-dessus). Le caractère non-injectif de ψ se traduit alors exactement par une relation de dépendance sur $\mathbb{C}(\tilde{X})$. $\square$

Le caractère abélien de H ainsi que la dépendance sur $\mathbb{C}(\tilde{X})$ va permettre d'exhiber un champs de vecteurs sur lequel le tenseur de Ricci de la métrique Ω s'annule. Pour cela, fixons $(V_1, \dots, V_{s+1})$ une famille de vecteurs de H telle que :

1. $(V_1, \dots, V_s)$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{C}(\tilde{X})$.
2. $V_{s+1} = \sum_{j=1}^s f_j V_j$ avec $f_j \in \mathbb{C}(\tilde{X})$ (non toutes nulles).

Plaçons nous au voisinage U d'un point $x \in \tilde{X}$ sur lequel :

- (a) $(V_1, \dots, V_s)$ est linéairement indépendante (sur $\mathbb{C}$) en tout point de U .
- (b) les fonctions f_j sont holomorphes sur U .

Le point (a) et le fait que les champs de vecteurs $(V_1, \dots, V_s)$ commutent permettent de choisir des coordonnées $(z_1, \dots, z_n)$ sur U telles que :

$$\forall j = 1..s, V_j = \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Si dv_Ω et dv désignent les formes volumes associées respectivement à la métrique Ω et à la métrique euclidienne sur U , on alors une relation du type :

$$dv_\Omega = e^\varphi dv.$$

Lemme 2.1

Avec les notations ci-dessus, on a :

$$d\varphi(V_{s+1}) = 0 \text{ et } \partial\bar{\partial}\varphi(V_{s+1}, \overline{V_{s+1}}) = 0.$$

Voyons tout d'abord que ce lemme permet de conclure quant à la semi-simplicité de $\mathfrak{g}$.

Démonstration du théorème 1.2 :

Sur l'ouvert U , la courbure de Ricci de Ω se calcule grâce à la fonction φ de la façon suivante :

$$\text{Ricci}(\Omega) = -i\partial\bar{\partial}\varphi.$$

Comme la métrique Ω est de courbure de Ricci -1, le lemme 2.1 implique :

$$|V_{s+1}|_\Omega^2 = -\text{Ricci}(\Omega)(V_{s+1}, \overline{V_{s+1}}) = i\partial\bar{\partial}\varphi(V_{s+1}, \overline{V_{s+1}}) = 0.$$

Or, le champ de vecteur holomorphe V_{s+1} n'est pas identiquement nul et il ne peut donc pas s'annuler sur un ouvert non-vidé. Ceci constitue la contradiction cherchée et démontre la semi-simplicité de $\mathfrak{g}$. $\square$

Démonstration du lemme 2.1 :

Comme H est une algèbre abélienne, on a (pour $i = 1..s$) :

$$0 = [V_{s+1}, V_i] = \sum_{j=1}^s [f_j V_j, V_i] = \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_j}{\partial V_i} V_j.$$

Comme la famille $(V_1, \dots, V_s)$ est linéairement indépendante sur $\mathbb{C}(\tilde{X})$, on en déduit que :

$$\forall i, j = 1..s, \frac{\partial f_j}{\partial V_i} = 0. \quad (1)$$

On calcule alors (sur U) la dérivée de Lie de la forme volume dv_Ω par rapport à V_{s+1} . Comme le flot engendré par V_{s+1} préserve la métrique Ω , il préserve *a fortiori* la forme volume dv_Ω et on a donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}_{V_{s+1}}(dv_\Omega) = \sum_{j=1}^s \mathcal{L}_{f_j V_j}(dv_\Omega) \\ &= \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_j}{\partial V_j} dv_\Omega + f_j \mathcal{L}_{V_j}(dv_\Omega) = \sum_{j=1}^s f_j \mathcal{L}_{V_j}(e^\varphi dv) \\ &= \sum_{j=1}^s f_j \frac{\partial \varphi}{\partial V_j} e^\varphi dv + f_j e^\varphi \mathcal{L}_{V_j}(dv) = d\varphi(V_{s+1}) e^\varphi dv. \end{aligned}$$

(on a utilisé (1) et le fait que les vecteurs $V_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$ préservent la mesure de Lebesgue sur U). Ceci démontre la première égalité énoncée ci-dessus. En utilisant le fait que les f_j sont holomorphes, on en déduit immédiatement la deuxième égalité de l'énoncé. $\square$

Remarque 2.1

Dans la démonstration du lemme 2.1, il a été fait usage des formules suivantes :

$$\mathcal{L}_{fV}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial V} \alpha + f \mathcal{L}_V(\alpha) = \mathcal{L}_V(f\alpha)$$

pour α une forme de degré maximal.

2.2 Absence de facteur compact

On raisonne à nouveau par l'absurde et on désigne par $\mathfrak{k}$ le plus grand idéal compact de $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{k}$ est la somme des idéaux simples de $\mathfrak{g}$ sur lesquels la forme de Killing est définie négative. Par unicité, $\mathfrak{k}$ est $\pi_1(X)$ -invariante et l'action de $\pi_1(X)$ sur $\mathfrak{k}$ est **unitaire** pour $-B$ (où B désigne la forme de Killing de $\mathfrak{g}$). Désignons à nouveau E le fibré associé à la représentation :

$$\pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C})$$

et

$$\psi : E \longrightarrow T_X$$

le morphisme induit par l'évaluation. Comme la représentation est unitaire, le fibré E est hermitien-plat et donc en particulier semi-stable. En combinant la semi-stabilité de E et celle de T_X , on obtient :

$$0 = \mu(E) \leq \mu(\psi(E)) \leq \mu(T_X) < 0.$$

Cette contradiction montre que l'algèbre $\mathfrak{g}$ est sans facteur compact. $\square$

3 Décomposition du revêtement universel

Nous allons donner dans cette partie la stratégie de la démonstration du théorème 1.4 et en détailler quelques étapes. Le résultat en question affirme que $\tilde{X}$ doit s'écrire :

$$\tilde{X} = \mathcal{D} \times \tilde{Y}$$

avec $\text{Aut}(\tilde{Y})$ discret. En particulier, le groupe G devrait agir trivialement sur $\tilde{Y}$ et transitivement sur $\mathcal{D}$ et il est légitime de penser que $\mathcal{D}$ devrait alors être l'espace (hermitien) symétrique² associé au groupe G . Avant de donner les étapes de la démonstration de Frankel, fixons quelques notations.

- Soit $M = G/K$ l'espace **riemannien** symétrique associé à G .
- $\Gamma = \pi_1(X) \cap G$ est un sous-groupe discret de G .
- Notons enfin $N = \Gamma \backslash M = \Gamma \backslash G/K$.

Nous pouvons alors énoncer les grandes étapes de la démonstration du théorème 1.4 :

1. Montrer que le groupe $\pi_1(X)$ se décompose comme un produit $\pi_1(X) = \Gamma \times Q$ (avec $Q = \pi_1(X)/\Gamma$), au moins à un sous-groupe d'indice fini près.
2. En déduire une application continue $f : X \rightarrow N$ tel que $f_* = \text{pr}_1$.
3. Rendre l'application f harmonique. Notons h ce représentant harmonique.
4. Si $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow M$ est le relevé de h au niveau des revêtements universels, montrer que $\tilde{h}$ est **G -équivariante**.
5. Conclure en utilisant la rigidité des applications harmoniques

Avant de rendre effective la stratégie décrite ci-dessus (au moins pour certains de ces points), il nous semble important de remarquer une difficulté qui est passée sous silence dans l'article [Fra95]. Celle-ci tient à la présence éventuelle d'un centre non-trivial du groupe G . Ainsi, dans toute la suite, nous ferons l'hypothèse suivante :

le centre $Z(G)$ de G est trivial.

Remarque 3.1

L'hypothèse sur le centre de G implique en particulier que K est un sous-groupe compact maximal de G [Hel78, th. 1.1, p. 252].

3.1 Préliminaires

Commençons par collecter quelques faits qui nous seront bien utiles par la suite.

Proposition 3.1 (exercice 7, p. 276 [Hel78])

Soit G un groupe de Lie connexe, semi-simple, sans facteur compact et dont le centre est trivial. Le groupe G agit alors fidèlement sur G/K et on a même

$$G \simeq \text{Isom}^0(G/K).$$

Dans la situation qui nous intéresse, cela signifie en particulier que le groupe Γ s'identifie au groupe fondamental de $N = \Gamma \backslash G/K$.

²d'après les résultats d'E. Cartan et d'Harish-Chandra, les notions de domaines bornés symétriques et d'espaces hermitiens symétriques de type non-compact coïncident.

Lemme 3.1 (cf [Fra89])

On dispose des faits suivants :

- (i) $\pi_1(X)$ normalise G et donc Γ .
- (ii) Si G' désigne le sous-groupe de $\text{Aut}(\tilde{X})$ engendré par $\pi_1(X)$ et G et si x est un point de $\tilde{X}$, $\pi(G \cdot x) = \pi(G' \cdot x)$ et cet ensemble est fermé dans X^3 .
- (iii) Γ est co-compact dans G ; en particulier, N est compacte.

Démonstration :

Le point (i) est clair. Pour le point (ii), il faut noter que, comme G et G' agissent par isométries, les orbites d'un point pour ces deux actions sont fermées. D'autre part l'égalité $\pi(G \cdot x) = \pi(G' \cdot x)$ est évidente. Or, si $\pi(g_k \cdot x) \rightarrow \pi(y)$ dans X (avec $g_k \in G$), quitte à composer par un élément de $\pi_1(X)$, on peut supposer que $g_k \cdot x \rightarrow y$ avec maintenant $g_k \in G'$. Comme l'orbite $G' \cdot x$ est fermée, $y \in G' \cdot x$ et $\pi(y) \in \pi(G' \cdot x) = \pi(G \cdot x)$.

Pour montrer le dernier point (iii), il faut simplement se convaincre que tout point x de $\tilde{X}$ induit une application **propre** :

$$\Gamma \backslash G \longrightarrow \pi(G \cdot x).$$

Comme $\pi(G \cdot x)$ est compact (car fermé dans X), on en déduit que Γ est bien un sous-groupe co-compact de G . $\square$

Enfin, nous mentionnons deux résultats classiques sur les groupes de Lie semi-simples.

Proposition 3.2 (chap. 3, § 10, n. 2 [Bou89])

Si G est un groupe de Lie connexe, le groupe $\text{Aut}(G)$ est alors un groupe algébrique et il n'a donc qu'un nombre fini de composantes connexes. Si G est de plus semi-simple, le morphisme naturel

$$\text{int} : G \longrightarrow \text{Aut}(G)$$

réalise un isomorphisme de $G/Z(G)$ sur $\text{Int}(G) = \text{Aut}^0(G)$ (qui est donc d'indice fini dans $\text{Aut}(G)$).

Théorème 3.1 (Densité de Borel, cor. 5.17 et 5.18 [Rag72])

Soit Γ un sous-groupe discret co-compact d'un groupe de Lie G connexe, semi-simple et sans facteur compact. On a alors

1. le normalisateur $N(\Gamma)$ de Γ dans G est discret et $N(\Gamma)/\Gamma$ est donc fini.
2. le centre de Γ est donné par $Z(\Gamma) = Z(G) \cap \Gamma$.

Sous l'hypothèse $Z(G) = 1$, on a donc également $Z(\Gamma) = 1$.

3.2 Décomposition du groupe fondamental

Cette étape est de nature purement algébrique. Nous montrons en effet la proposition suivante.

³rappelons que $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ désigne la projection naturelle.

Proposition 3.3

Quitte à remplacer $\pi_1(X)$ par un sous-groupe d'indice fini (contenant Γ), la suite exacte

$$1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow Q = \pi_1(X)/\Gamma \longrightarrow 1$$

se scinde en un produit $\pi_1(X) = \Gamma \times Q$.

Démonstration :

Comme $\pi_1(X)$ normalise G , il agit sur G par conjugaison et on a donc un morphisme $c : \pi_1(X) \longrightarrow \text{Aut}(G)$. Comme $\text{Int}(G)$ est d'indice fini dans $\text{Aut}(G)$, on peut supposer (quitte à remplacer $\pi_1(X)$ par un sous-groupe d'indice fini) que l'image de c est contenue dans $\text{Int}(G) = G$ (car $Z(G) = 1$). Si on restreint ceci à Γ , on constate que l'action par conjugaison de $\pi_1(X)$ sur Γ se factorise par le normalisateur de Γ . On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\quad} & \text{Aut}(\Gamma) \\ & \searrow & \nearrow \\ & & N(\Gamma) \end{array}$$

En utilisant le théorème de densité de Borel (théorème 3.1), on peut remplacer $\pi_1(X)$ par un sous-groupe d'indice fini et supposer que l'action par conjugaison se factorise en fait par Γ . On obtient donc un morphisme

$$\gamma : \pi_1(X) \longrightarrow \Gamma$$

vérifiant :

$$\forall x \in \pi_1(X), \forall g \in \Gamma, xgx^{-1} = \gamma(x)g\gamma(x)^{-1}, \quad (2)$$

le morphisme γ est bien entendu l'identité en restriction à Γ (car $Z(\Gamma) = 1$). En utilisant (2), on montre alors que $x \mapsto x\gamma(x)^{-1}$ est un endomorphisme de $\pi_1(X)$ qui induit une section $s : Q \longrightarrow \pi_1(X)$. On en déduit que $\pi_1(X)$ est un produit semi-direct et, l'action de Q sur Γ étant triviale, on a finalement une décomposition en produit direct. $\square$

Remarque 3.2

La décomposition en produit du groupe fondamental montre de plus que l'action de Q sur $\tilde{X}$ commute avec celle de G .

3.3 Existence d'une application harmonique $h : X \longrightarrow N$

Comme G est semi-simple, l'espace symétrique associé $M = G/K$ est de type non-compact ; il est en particulier contractile [Hel78, th. 1.1, p253]. La variété $N = \Gamma \backslash G/K$ est donc un espace d'Eilenberg-Mac Lane avec $\pi_1(N) = \Gamma$. Ajoutons ici que la courbure sectionnelle de N (pour la métrique naturelle) est négative [Hel78, th. 3.1, p.241].

Lemme 3.2 (th. 11, p. 428 [Spa66])

Soit Y un espace d'Eilenberg-Mac Lane et Z un espace topologique. Tout morphisme $p : \pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est induit par une application continue : il existe $f : Z \longrightarrow Y$ tel que $f_* = p$.

L'application directe de ce lemme nous fournit donc une application continue (on peut même la choisir lisse) $f : X \rightarrow N$ telle que f_* corresponde à la projection sur le premier facteur dans la décomposition $\pi_1(X) = \Gamma \times Q$. On peut alors rendre l'application f harmonique⁴. Pour cela, on applique le résultat d'existence d'Eells-Sampson.

Théorème 3.2 ([ES64])

Soit $f : X \rightarrow N$ une application continue entre variétés riemanniennes compactes avec N de courbure sectionnelle négative. Il existe alors une application harmonique h dans la classe d'homotopie de f . Si h est surjective et si N n'est pas un tore plat, l'application h est unique.

Proposition 3.4

Il existe une application harmonique $h : X \rightarrow N$ telle $h_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(N)$ soit la première projection.

On considère alors le relevé de l'application h au niveau des revêtements universels :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{h}} & M \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{h} & N \end{array}$$

A priori, l'application $\tilde{h}$ est seulement équivariante pour l'action de $\pi_1(X)$ sur $\tilde{X}$ et pour celle de Γ sur M . Le résultat suivant est donc le point clé de la démonstration de Frankel.

Théorème 3.3 (th. 3.1 [Fra95])

L'application $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow M = G/K$ est **G-équivariante**.

3.4 Conséquences de l'équivariance et conclusion

L'équivariance de $\tilde{h}$ se reporte immédiatement sur h de la façon suivante :

Corollaire 3.1

L'application $h : X \rightarrow N$ est une *submersion*.

Nous allons maintenant exploiter l'hypothèse kählérienne pour montrer que l'application h est holomorphe. Les travaux de Siu [Siu80] repris entre autres par Carlson et Toledo font apparaître des phénomènes de rigidité pour les applications harmoniques dont la source est kählérienne. Ainsi, le corollaire 3.2 de [CT89] montre :

Proposition 3.5

N est un espace localement hermitien symétrique ; $M = G/K$ est donc un espace hermitien symétrique de type non-compact, c'est-à-dire un domaine borné symétrique.

La rigidité des applications harmoniques a également pour conséquence le fait suivant : il existe une structure complexe sur N qui rend l'application h

⁴une application $f : X \rightarrow N$ entre variétés riemanniennes compactes est dite harmonique si elle minimise la fonctionnelle d'énergie $E(f) = \int_X |df|^2 dvol$.

holomorphe. Remarquons que si G/K ne contient pas de facteur de type polydisque, le corollaire 3.4 de [CT89] montre que l'application h est holomorphe (ou anti-holomorphe) pour la structure complexe naturelle de N . Nous allons en fait montrer que ceci reste vrai malgré la présence de polydisque. En effet, l'application $\tilde{h}$ étant G -équivariante, la structure complexe qui la rend holomorphe doit nécessairement être G -invariante. Comme la seule structure G -invariante sur G/K est la structure complexe naturelle (ou sa conjuguée), on en déduit :

Proposition 3.6

L'application h est holomorphe (ou anti-holomorphe).

Nous sommes alors enfin en mesure de finir la

Démonstration du théorème 1.4 :

Remarquons tout d'abord que les fibres de h sont connexes. En effet, si Y désigne une de ces fibres, la suite exacte d'homotopie

$$\pi_1(X) \xrightarrow{h_*} \pi_1(N) \longrightarrow \pi_0(Y) \longrightarrow \pi_0(X) = 1$$

et la surjectivité de h_* (c'est la projection sur un facteur) donnent $\pi_0(Y) = 1$. Il est alors immédiat de constater que les fibres de $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow M$ sont également connexes et s'identifient aux revêtements universels des fibres de h . De plus, l'action de G permute les fibres de $\tilde{h}$ (par G -équivariance) et toutes ces fibres sont donc biholomorphes entre elles. Notons donc $\tilde{Y}$ la fibre de $\tilde{h} : \tilde{X} \rightarrow M$ au dessus d'un point $o \in M$; grâce à la proposition 3.1, on peut supposer que K s'identifie au stabilisateur de o via l'action de G sur $M = G/K$. Un élément de K (agissant maintenant sur $\tilde{X}$) laisse donc la fibre $\tilde{Y}$ invariante. Rappelons maintenant que dans la décomposition

$$\pi_1(X) = \Gamma \times Q,$$

Q s'identifie à $\pi_1(Y)$ et agit donc sur $\tilde{Y}$. Comme l'action de Q commute avec celle de G , on en déduit que l'action de K descend en fait à Y ; on a donc un morphisme (continu)

$$K \longrightarrow \text{Aut}(Y).$$

Or, Y est une variété compacte avec $K_Y > 0$ et la finitude de $\text{Aut}(Y)$ dans ce cas est un résultat classique [Uen75, cor. 14.3]. Ceci signifie que K agit **trivialement** sur Y et sur $\tilde{Y}$. Cette information est en réalité la dernière qui nous manquait pour conclure.

Considérons en effet l'application suivante :

$$F : \begin{cases} G/K \times \tilde{Y} & \longrightarrow \tilde{X} \\ (gK, y) & \longmapsto g(y) \end{cases}$$

Par l'analyse qui vient d'être menée, F est bien définie et on constate aisément que c'est un difféomorphisme entre $G/K \times \tilde{Y}$ et $\tilde{X}$. Il ne nous reste plus qu'à établir le caractère holomorphe de F (ce que l'on peut faire en traitant chaque variable séparément). Comme G agit sur $\tilde{X}$ par biholomorphisme, F est holomorphe en la deuxième variable. Pour montrer qu'elle est holomorphe en la deuxième variable, il faut montrer que l'orbite d'un point y est une sous-variété

complexe de $\tilde{X}$ ou encore que le fibré tangent de celle-ci est J -invariant. Ceci résulte alors immédiatement de la décomposition

$$T_{\tilde{X},y}^{\mathbb{R}} = T_{\tilde{Y},y}^{\mathbb{R}} \oplus T_{G/K,y}^{\mathbb{R}}$$

et du fait que $T_{\tilde{Y}}^{\mathbb{R}}$ est lui-même J invariant ($\tilde{Y}$ est une sous-variété complexe de $\tilde{X}$). L'application F est donc un biholomorphisme et elle correspond à la décomposition annoncée de $\tilde{X}$. $\square$

Remarque 3.3

*Dans le cours de la démonstration, on a établi le fait suivant : pour tout $x \in \tilde{X}$, le stabilisateur G_x de x sous l'action de G est un compact **maximal** de G (cf [Nad90, prop. 0.1]).*

Remarque 3.4

La proposition 3.3 montre que la décomposition en produit existe en fait au niveau des quotients, i.e. la démonstration du théorème 1.4 donne en fait le résultat suivant :

Théorème 3.4

Soit X une variété complexe compacte avec $K_X > 0$. Il existe alors un revêtement fini X' de X est une décomposition

$$X' \simeq X_1 \times X_2$$

dans laquelle X_1 est un quotient d'un domaine borné symétrique et X_2 vérifie : $\text{Aut}(X_2)$ est une groupe discret.

3.5 Équivariance de l'application $\tilde{h}$

Pour finir, donnons quelques éléments de la preuve de la G -équivariance de l'application $\tilde{h}$. L'idée est la suivante : on remplace l'application $\tilde{h}$ par sa "moyenne" h_G par rapport à G . Cette application a deux propriétés essentielles :

1. h_G est G -équivariante (par construction),
2. la densité d'énergie $\left| d\tilde{h}(x) \right|^2$ diminue dans le processus de moyennisation.

L'unicité dans le théorème 3.2 permet alors de conclure que $\tilde{h} = h_G$.

Le procédé de moyennisation est mis en place de la façon suivante. Munissons tout d'abord le quotient compact $\Gamma \backslash G$ de l'unique mesure de probabilité μ bi-invariante⁵ par l'action de G . A toute application continue

$$\eta : \Gamma \backslash G \longrightarrow M = G/K,$$

on associe son centre de gravité η_G (ou valeur moyenne) comme étant l'unique point $y \in M$ qui minimise la quantité :

$$y \mapsto \int_M d(x, y)^2 d(\eta_* \mu)(x).$$

⁵un groupe de Lie semi-simple est unimodulaire et une mesure de Haar sur G est donc bi-invariante.

Comme la courbure sectionnelle de M est négative, cette fonction est strictement convexe ; elle est de plus propre car $\eta_*\mu$ est à support compact et ceci justifie la définition de η_G .

Si maintenant $\eta : \Gamma \backslash G \times \tilde{X} \longrightarrow M$ est une application continue (et C^∞ en la deuxième variable), on notera $\eta_G : \tilde{X} \longrightarrow M$ l'application obtenue en prenant la valeur moyenne quand la deuxième variable est fixée.

Proposition 3.7 (th. 3.3 [Fra95])

La densité d'énergie diminue après passage à la valeur moyenne :

$$\forall x \in \tilde{X}, |d\eta_G(x)|^2 \leq \int_{\Gamma \backslash G} |d_2\eta(g, x)|^2 d\mu(g)$$

(d_2 désignant la dérivée par rapport à la deuxième variable).

Cette proposition permet d'établir la

Démonstration du théorème 3.3 :

On considère pour cela l'application (bien définie)

$$\eta : \begin{cases} \Gamma \backslash G \times \tilde{X} & \longrightarrow & M \\ (\Gamma g, x) & \longmapsto & g^{-1} \cdot \tilde{h}(g \cdot x) \end{cases}$$

et on considère l'application η_G que l'on obtient en prenant la moyenne par rapport à G . L'action de G étant isométrique (à la fois sur $\tilde{X}$ et sur M) et la mesure μ invariante sous G , on constate alors facilement que η_G est G -invariante. D'autre part, comme l'action de Q commute avec celle de G , elle commute en particulier au processus de moyennisation : l'application η_G est donc $\pi_1(X)$ -équivariante et passe au quotient en une application $h_G : X \longrightarrow N$ (homotope à h). En utilisant la proposition 3.7, on obtient alors l'inégalité :

$$E(h_G) = \int_X |dh_G(x)|^2 dx \leq \int_X |dh(x)|^2 dx = E(h).$$

L'application h étant harmonique, elle minimise la fonctionnelle E sur sa classe d'homotopie ; on a donc $E(h_G) = E(h)$ et l'application h_G est également harmonique. Le critère d'unicité du théorème 3.2 donne $h = h_G$ (par G -équivariance, l'application h_G est surjective) et montre donc le caractère G -équivariant de l'application $\tilde{h}$. $\square$

Références

- [Bou89] Nicolas Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 1–3*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 1989, Translated from the French, Reprint of the 1975 edition.
- [CT89] James A. Carlson and Domingo Toledo, *Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1989), no. 69, 173–201.
- [ES64] James Eells, Jr. and J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [Fra89] Sidney Frankel, *Complex geometry of convex domains that cover varieties*, Acta Math. **163** (1989), no. 1-2, 109–149.
- [Fra95] ———, *Locally symmetric and rigid factors for complex manifolds via harmonic maps*, Ann. of Math. (2) **141** (1995), no. 2, 285–300.
- [Gri71] P. A. Griffiths, *Complex-analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 21–51.
- [Hel78] Sigurdur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 80, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.
- [MY83] Ngaiming Mok and Shing-Tung Yau, *Completeness of the Kähler-Einstein metric on bounded domains and the characterization of domains of holomorphy by curvature conditions*, The mathematical heritage of Henri Poincaré, Part 1 (Bloomington, Ind., 1980), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 39, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 41–59.
- [Nad90] A. M. Nadel, *Semisimplicity of the group of biholomorphisms of the universal covering of a compact complex manifold with ample canonical bundle*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 1, 193–211.
- [Rag72] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1972, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68.
- [Siu80] Yum Tong Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 1, 73–111.
- [Spa66] Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [Uen75] K. Ueno, *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1975, Notes written in collaboration with P. Cherenack, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439.