Le théorème de Gromov d'après Kleiner, Shalom et Tao

Benoît Claudon

21 décembre 2012

Résumé

Nous exposons les récentes démonstrations par B. Kleiner , Y. Shalom et T. Tao du théorème de M. Gromov sur les groupes à croissances polynomiales.

1 Introduction

Considérons G un groupe de type fini. La donnée d'un système fini $S \subset G$ de générateurs permet de définir une fonction de longueur par la formule :

$$\ell_S(g) = \min \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i| \,\middle|\, g = s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k},\, s_i \in S \right),$$

$\ell_S(g)$ représente donc la longueur du plus court mot sur l'alphabet S qui représente g. Il est commode d'en faire une distance invariante à gauche en posant :

$$d_S(g,h) := \ell_S(g^{-1}h).$$

La fonction de longueur étant évidemment symétrique et sous-additive [1], d_S vérifie bien les axiomes d'une distance. Les boules pour cette distance étant finies, il est licite de considérer la fonction de comptage :

$$b_S(R) := \sharp B(1,R)$$

où $B(1,R)$ désigne la boule de centre 1 et de rayon R (G agissant transitivement par isométries sur lui même, le choix du centre de la boule n'a aucune importance). Il est d'autre part immédiat de vérifier que si Σ désigne un autre système fini de générateurs, les fonctions de longueur correspondantes sont comparables : il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\frac{1}{C}\ell_S(g) \leq \ell_\Sigma(g) \leq C\ell_S(g).$$

Nous pouvons alors parler de la croissance du groupe G indépendamment du choix de S.

1. $\ell_S(g^{-1}) = \ell_S(g)$ et $\ell_S(gh) \leq \ell_S(g) + \ell_S(h)$.

Définition 1.1
Nous dirons (à la suite de [Mil68a]) que G est à croissance :

1. polynomiale *si $b_S(R) \leq CR^d$ pour une certaine constante $C > 0$ et un exposant $d \geq 0$,*
2. exponentielle *si $b_S(R) \geq C^R$ pour une certaine constante $C > 1$,*
3. intermédiaire *sinon.*

Dans le premier cas, nous dirons que G est à croissance polynomiale de degré au plus d.

Remarque 1.1
La question de l'existence de groupes à croissance intermédiaire (soulevée par Milnor dans [CWM⁺68]) est restée ouverte quelques années. Les premiers exemples de tels groupes ont été consruits par R. Grigorchuk [Gri84] et ont une croissance comprises entre $\exp(\sqrt{R})$ et $\exp(R^\alpha)$ pour $\alpha < 1$. Notons que ce sont des groupes de type fini qui ne sont toutefois pas de présentation finie.

Illustrons la définition ci-dessus par quelques exemples.

Exemples 1.1
(a) $\mathbb{Z}^d$ est à croissance polynomiale de degré d.

(b) un groupe libre à $d \geq 2$ générateurs $\mathbb{F}_d$ est à croissance exponentielle avec $b_S(R) = 2(2d-1)^R - 1$ (en prenant pour S le système standard). Un groupe G qui contient un groupe libre à deux générateurs est donc nécessairement à croissance exponentielle (prendre un système de générateurs de G qui contient les deux éléments en question).

(c) Le groupe de Heisenberg

$$H_3 = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, a,\, b,\, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

est également à croissance polynomiale mais cette fois de degré 4. En effet, le commutateur $a^m b^m a^{-m} b^{-m} = c^{m^2}$ montre que la contribution du coefficient c est d'ordre 2 et la boule de rayon m (pour les générateurs a et b) contient de l'ordre de m^4 éléments (voir [dlH00] pour des explications plus convaincantes).

(d) si $H \subset G$ est d'indice fini, G est à croissance polynomiale si et seulement si H l'est (G et H ont des fonctions de croissance équivalentes dans ce cas).

Le théorème de M. Gromov [Gro81] s'énonce alors comme suit.

Théorème 1.1 (M. Gromov, 1981)
Un groupe de type fini est à croissance polynomiale si et seulement s'il est virtuellement nilpotent.

Remarque 1.2
Signalons une version antérieure du théorème 1.1, due à J. Milnor [Mil68b] et J.A. Wolf [Wol68], qui traite le cas d'un groupe G (virtuellement) résoluble.

Remarque 1.3
Pour les groupes nilpotents, le degré de la croissance peut se calculer directement à partir de la connaissance de la structure du groupe. Les travaux de Y. Guivarc'h [Gui70], J. Wolf [Wol68], H. Bass [Bas72] et bien d'autres [2] *montrent en fait que si G est un groupe nilpotent, le degré d de sa croissance est donné par :*

$$d = \sum_{i \geq 1} i \mathrm{rg}\,(G_i/G_{i+1})$$

où $(G_i)_{i\geq 1}$ désigne la suite centrale descendante de G. Une conséquence du théorème 1.1 et de l'égalité ci-dessus est donc que la quantité

$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{\log(b(R))}{\log(R)}$$

est un entier (si elle est finie).

Dans ce texte, nous allons essayer de donner un aperçu des techniques qui ont permis à M. Gromov de démontrer un tel résultat et surtout comment la compréhension de la situation a évolué pour finalement aboutir à une démonstration [3] *élémentaire* suite aux travaux de B. Kleiner [Kle10], Y. Shalom et T. Tao [ST10].

2 Réduction du problème à l'existence d'une représentation linéaire

Soit G un groupe de type fini à croissance polynomiale. Pour commencer, nous avons observer que le degré de la croissance est invariant si on passe à un sous-groupe d'indice fini de G. Cependant, comme il est légitime de s'y attendre, le degré diminue strictement si on passe à certains sous-groupes d'indice infini. Pour être plus précis, l'énoncé suivant rend possible une démonstration par récurrence sur le degré du théorème 1.1.

Proposition 2.1
Soient G un groupe de type fini à croissance polynomiale et $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{Z}$ un morphisme surjectif ; notons H son noyau. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

(i) H est de type fini,

(ii) si G est de croissance au plus $d > 0$, H est à croissance de degré au plus $d - 1$.

(iii) si H est virtuellement nilpotent, G l'est également.

2. Dans [dlH00], P. de la Harpe mentionne un article précurseur de J. Dixmier [Dix60] apparemment passé complètement inaperçu et qui établit le fait qu'un groupe nilpotent est à croissance polynomiale.

3. tirée du blog de T. Tao [Tao10].

Démonstration :

Pour démontrer le premier point, considérons $(s_1, \ldots, s_m, \gamma)$ un système de générateurs de G vérifiant $\varphi(\gamma) = 1$ et $\varphi(s_i) = 0$ pour tout $i = 1 \ldots m$. Il est alors immédiat de constater que le groupe H est engendré par les éléments de la forme :

$$\gamma_{k,i} := \gamma^k s_i \gamma^{-k}$$

pour $k \in \mathbb{Z}$ et $i = 1 \ldots m$. Les mots qui s'écrivent

$$\gamma_{0,i}^{\epsilon_0} \cdots \gamma_{N,i}^{\epsilon_N}$$

à i fixée et avec $\epsilon_k = 0$ ou 1 sont de longueur inférieure à $3N$ et ils constituent un ensemble de cardinal 2^{N+1}. Le groupe G étant à croissance polynomiale, il existe N et des exposants ϵ_k et δ_k tels que

$$\gamma_{0,i}^{\epsilon_0} \cdots \gamma_{N,i}^{\epsilon_N} = \gamma_{0,i}^{\delta_0} \cdots \gamma_{N,i}^{\delta_N}$$

Comme nous pouvons supposer $\epsilon_N \neq \delta_N$, nous en déduisons que $\gamma_{N,i}$ appartient à $\langle \gamma_{0,i}, \ldots, \gamma_{N-1,i} \rangle$ (le groupe engendré). Il est alors immédiatement de constater que $\gamma_{p,i} \in \langle \gamma_{0,i}, \ldots, \gamma_{N-1,i} \rangle$ pour tout $p \geq N$ et donc que H est bien de type fini.

Considérons le système de générateurs construit ci-dessus et donnons nous $r > 0$ (un entier). Les translatés de la boule $B_H(1, r)$ par γ^j pour $j = 0 \ldots r$ sont disjointes (leurs images par φ le sont) et par construction, il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de H) telle que :

$$\forall\, j = 0 \ldots r,\ \gamma^j B_H(1, r) \subset B_G(1, Cr).$$

En particulier, nous obtenons :

$$r b_H(r) \leq b_G(Cr) \leq C' r^d$$

et H est bien à croissance polynomiale, de croissance au plus $d - 1$.

Pour conclure quant au troisième point, nous pouvons remarquer que, H étant virtuellement nilpotent, G est au moins virtuellement résoluble. Le cas résoluble du théorème 1.1 (remarque 1.2) permet alors de conclure. Il est également possible d'obtenir une démonstration directe de ce dernier point (voir par exemple [Tit81a] pour plus de détails). En effet, quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, nous pouvons supposer que H est nilpotent et, en raisonnant par récurrence sur la longueur de nilpotence de H, il nous suffit de traiter le cas où H est abélien (sans torsion). L'extension correspondant à

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

est alors donnée par une matrice A de taille $n = \mathrm{rg}(H)$ et à coefficients entiers. L'hypothèse de croissance polynomiale montre que la norme de A^k croit au plus de façon polynomiale et ceci montre que les valeurs propres de A sont nécessairement de module 1. Comme ce sont également des entiers algébriques, le théorème de Kronecker montre que ce sont des racines de l'unité et A est donc quasi-unipotente ; l'extension correspondante (c'est-à-dire le groupe G) est ainsi virtuellement nilpotent. $\square$

Pour montrer qu'un groupe de type fini à croissance polynomiale est virtuellement nilpotent, il suffit donc de montrer qu'il se surjecte (virtuellement) sur $\mathbb{Z}$. Le problème consiste donc à exhiber *a priori* un tel morphisme. Il suffit en fait de construire une représentation linéaire infini de G. En effet, supposons que $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ soit un représentation linéaire (de degré n) infini ; le groupe $\Gamma := \rho(G)$ est alors un groupe linéaire (infini) à croissance polynomiale. Nous pouvons alors conclure en appliquant l'Alternative de Tits [Tit72].

Théorème 2.1 (J. Tits, 1972)
Soit k un corps et Γ un groupe de type fini linéaire sur k. Ce dernier vérifie l'alternative suivante :

1. *soit Γ est virtuellement résoluble,*
2. *soit Γ contient un groupe libre à 2 générateurs.*

Le groupe Γ étant à croissance polynomiale, il ne peut vérifier le point 2 de l'alternative ci-dessus. Etant un groupe virtuellement résoluble infini de type fini, l'abélianisé de Γ est (virtuellement) infini et nous avons donc (virtuellement) mis la main sur un quotient abélien infini de Γ.

Nous allons voir dans les paragraphes suivants comment il est possible de construire une telle représentation sans une connaissance précise de la structure du groupe G. Dans la dernière partie de ce texte, nous verrons également comment il est possible de se passer du théorème 2.1 en construisant une représentation unitaire (c'est la clé de l'argument de Shalom et Tao).

3 Cône asymptotique

Dans cette partie, nous présentons les grandes idées de l'approche initiale de M. Gromov. Nous n'entrerons pas dans les détails et renverrons plutôt au texte du séminaire Bourbaki de J. Tits [Tit81b].

L'idée de M. Gromov est de construire un espace métrique raisonnable sur lequel le groupe G agisse par isométries. Dans cette situation, il est naturel d'étudier l'action de G sur lui même par translation à gauche : ce sont des isométries pour la distance d_S (où S désigne un système fini quelconque de générateurs de G). Ce qui peut sembler moins naturel, c'est que l'idée de dilater la distance fournisse en passant à la limite un espace métrique jouissant de bonnes propriétés et sur lequel G agisse.

Théorème 3.1
La suite d'espaces métriques pointés[4] $\left(G, \frac{1}{n}d_S, 1_G\right)_{n\geq 1}$ *converge (quitte à extraire une sous-suite) en topologie de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique*

4. pour obtenir une notion correcte, il faut considérer des espaces métriques munis de point base.

$(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$ *sur lequel* G *agit par isométries. De plus, l'espace* X *est localement compact, connexe, localement connexe (les boules sont même connexes par arcs), de dimension de Hausdorff finie (majorée par le degré de la croissance de* G*) et homogène sous l'action de son groupe d'isométries* $\mathrm{Isom}(X, d)$.

Le groupe G admet donc une représentation dans le groupe $\mathrm{Isom}(X, d)$. Celui-ci est naturellement un groupe topologique localement compact (théorème de van Danzig-van der Waerden) pour la topologie compacte-ouverte. Or, suite à la solution du $5^{\text{ème}}$ problème de Hilbert, il s'avère que cette structure est sous-jacente à une structure différentiable.

Théorème 3.2 (Gleason/Montgomery-Zippin, 1953)
Soit (X, d) *un espace métrique de dimension finie, connexe, localement connexe, localement compact . Si* (X, d) *est homogène sous le groupe* $\mathrm{Isom}(X, d)$*, celui-ci est un groupe de Lie ayant un nombre fini de composantes connexes.*

Le livre [MZ55] contient une démonstration complète de la solution du $5^{\text{ème}}$ problème de Hilbert ; l'article [Hir90] propose également un autre point de vue sur ce cercle de questions.

Pour conclure, il suffit de montrer que l'image de la représentation $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Isom}(X_\infty, d_\infty)$ est d'image infini (en utilisant la représentation adjointe, il est très facile de montrer que l'Alternative de Tits est encore vérifié pour un groupe de Lie avec un nombre fini de composantes connexes). M. Gromov montre que c'est effectivement le cas si G n'est pas presque abélien. En effet, si $G = \mathbb{Z}^d$, il n'est pas difficile de montrer que le cône asymptotique est $\mathbb{R}^d$ mais l'action de G est triviale dans ce cas.

4 Fonctions harmoniques lipschitziennes

L'apport [5] de B. Kleiner dans l'article [Kle10] consiste à construire directement (sans faire appel à un substrat géométrique) un espace vectoriel de dimension finie (et non trivial) sur lequel G agit linéairement. Il s'agit d'un espace de fonctions définies sur G (avec l'action naturelle de G). Nous avons volontairement donner un énoncé moins précis que celui de [Kle10, Th. 3.1] mais celui-ci sera bien suffisant pour conclure.

Théorème 4.1 (B. Kleiner, 2010)
Soit G *un groupe à croissance polynomiale muni d'un système symétrique de générateurs. L'espace vectoriel* $\mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G, \mathbb{R})$ *des fonctions harmoniques et Lipschitz est de dimension finie et il contient strictement les fonctions constantes.*

Concernant l'existence d'une fonction harmonique et Lipschitz non trivial, nous allons rapporter les arguments de Y. Shalom et T. Tao car ils sont de loin bien plus élémentaires que ceux de B. Kleiner. En effet, pour exhiber une telle

5. Les méthodes employées sont partiellement inspirées des travaux de T. Colding et W.P. Minicozzi [CM97].

fonction, B. Kleiner procède la façon suivante : G étant moyennable, il ne possède pas la propriété (T) de Khazdan et il admet donc une action isométrique et sans point fixe sur un espace de Hilbert H (d'après une caractérisation de la propriété (T) due à N. Mok [Mok95], N. Koreevar-R.Schoen [KS97] et Y. Shalom [Sha00]). En prenant le produit scalaire d'un point de l'orbite avec un vecteur de H, on construit ainsi des fonctions harmoniques et lipschitziennes (et on vérifie facilement qu'on doit en construire une non constante).

4.1 Existence d'une fonction harmonique lipschitzienne non triviale

Rappelons quelques faits à propos des fonctions harmoniques sur un groupe, à commencer par le produit de convolution donné formellement par :

$$\varphi * \psi(g) := \sum_{\gamma \in G} \varphi(\gamma)\psi(\gamma^{-1}g)$$

où φ et ψ sont deux fonctions définies sur G. Les vérifications suivantes sont immédiates :

(1) le produit de convolution et associatif et commutatif.

(2) $\varphi * \psi(1) = \left\langle \varphi, \hat{\psi} \right\rangle$ avec $\hat{\psi}(g) := \psi(g^{-1})$ et où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le prduit scalaire de $l^2(G)$.

(3) $\varphi * \delta_s(g) = \varphi(gs)$ (δ_s masse de Dirac en s).

Fixons maintenant S un système fini *symétrique* de générateurs de G et posons :

$$\begin{cases} \mu := \frac{1}{\sharp S} \sum_{s \in S} \delta_s \\ \Delta(\varphi) = \varphi - \varphi * \mu. \end{cases}$$

Cet opérateur (de type Laplacien) est autoadjoint et positif d'après l'identité suivante (la norme l^2 est notée $|\cdot|_2$) :

$$\langle \Delta(\varphi), \varphi \rangle = \frac{1}{2\sharp S} \sum_{s \in S} |\varphi - \varphi * \delta_s|_2^2 .$$

Enfin, il vérifie également la propriété suivante :

$$\Delta(\varphi * \psi) = \varphi * \Delta(\psi) = \Delta(\varphi) * \psi.$$

Démonstration de l'existence d'une fonction harmonique Lipshitz non constante :

Comme G est à croissance polynomiale, la suite [6] des fonctions caractéristiques des boules

$$f_n := \frac{1}{b_S(n)} \chi_{B(1,n)}$$

6. une telle suite est appelée une suite de Følner.

vérifie (quitte à passer à une sous-suite)

$$|f_n - f_n * \delta_s|_{l^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall\, s \in S.$$

En posant $\varphi_n = f_n^{1/2}$, nous obtenons donc :

$$|\varphi_n|_2 = 1 \quad \text{et} \quad \Delta(\varphi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

la convergence ayant lieu dans $l^2(G)$. Ceci signifie en particulier que 0 est dans le spectre de l'opérateur Δ (qui est bien défini et continu sur $l^2(G)$) sans être pour autant valeur propre : le groupe G étant infini, une fonction harmonique et l^2 est automatiquement identiquement nulle (principe du maximum). Nous pouvons retranscrire cette information de la façon suivante : il existe une suite de fonctions (l^2) notées ψ_k vérifiant

$$\begin{cases} \Delta(\psi_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\ 1 = \langle \psi_k, \Delta(\psi_k)\rangle = \frac{1}{2\sharp S}\sum_{s\in S} |\psi_k - \psi_k * \delta_s|_2^2 \end{cases}$$

Pour cela, utilisons le théorème spectral et écrivons l'opérateur (autoadjoint positif) Δ sous la forme :

$$\Delta = \int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

Comme 0 est dans le spectre de Δ les projecteurs spectraux E_λ ne sont pas nuls pour $0 < \lambda$ assez petit (voir [Rud91]). Si x_λ désigne un vecteur non nul de l'image de E_λ, considérons alors :

$$\xi_\lambda := \frac{x_\lambda}{|\Delta^{1/2} x_\lambda|}$$

où $\Delta^{1/2}$ désigne l'opérateur :

$$\Delta^{1/2} = \int_0^{+\infty} \sqrt{\lambda}\mathrm{d}E_\lambda.$$

Les vecteurs ξ_λ sont construits de telle sorte que

$$\langle \Delta\xi_\lambda, \xi_\lambda\rangle = 1$$

et vérifie de plus $|\xi_\lambda| \leq \sqrt{\lambda}$. Il suffit alors de poser $\psi_k := \xi_{1/k}$ pour $k >> 1$.
En particulier, nous en déduisons :

$$\forall\, s \in S,\ |\psi_k - \psi_k * \delta_s|_2^2 \quad \leq \quad 2\sharp S \tag{1}$$
$$\exists\, s_0 \in S,\ |\psi_k - \psi_k * \delta_{s_0}|_2^2 \quad \geq 1 \tag{2}$$

la deuxième inégalité se produisant pounr infinité d'indice k (nous ne considérerons désormais plus que ceux là). La fonction

$$\hat{g_k} := \frac{\psi_k - \psi_k * \delta_{s_0}}{|\psi_k - \psi_k * \delta_{s_0}|_2}$$

est donc faite pour vérifier

$$g_k * \psi_k(1) - g_k * \psi_k(s_0) = |\psi_k - \psi_k * \delta_{s_0}|_2 \geq 1.$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\forall\, s \in S,\ |g_k * \psi_k - g_k * \psi_k * \delta_s|_{l^\infty} \leq \sqrt{2\sharp S}.$$

La suite de fonctions $(g_k * \psi_k)_k$ est donc uniformément Lipschitz. Quitte à soustraire une constante, nous pouvons supposer que $g_k * \psi_k(1) = 0$ et le théorème [7] d'Ascoli permet alors d'extraire une sous-suite qui converge vers une fonction F vérifiant : $F(1) = 0$, F est Lipschitz et $F(s_0) \leq -1$; la fonction F est donc non constante. Enfin, F est harmonique comme nous pouvons le constater en passant à la limite dans

$$\Delta(g_k * \psi_k) = g_k * \Delta(\psi_k).$$

□

Remarque 4.1
L'existence de fonctions harmoniques lipschitziennes non constantes n'est pas un phénomène lié à la croissance polynomiale. Nous pouvons déjà remarquer que l'argument ci-dessus a pour unique ingrédient l'existence d'une suite de Følner et fonctionne donc dans le cas d'un groupe moyennable. D'autre part, un groupe infini non moyennable admet des fonctions harmoniques bornées (donc Lipschitz) en très grand nombre (voir par exemple [Tao10]).

4.2 Inégalité de Poincaré et son inverse

Pour comprendre l'espace des fonctions harmoniques (Lipschitz) définies sur G, nous aurons besoin des inégalités entre la norme l^2 d'une fonction et celle de son gradient. La première est une inégalité de type Poincaré et elle vaut pour toute fonction, sans hypothèse d'harmonicité.

Théorème 4.2 (Kleiner)
Soit G de type fini (engendré par S). Si $R > 0$, l'inégalité suivante est valable pour toute fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_{B(R)} |f - f_R|^2 \leq 4R^2 \frac{b(2R)}{b(R)} \int_{B(3R)} |\nabla f|^2 \tag{3}$$

où f_R désigne la moyenne de f sur la boule de rayon R et où le gradient de f est donné par :

$$|\nabla f(x)|^2 = \sum_{s \in S} |f(x) - f(xs)|^2 .$$

7. comme nous sommes dans le cas d'un espace dénombrable discret, il s'agit ici du procédé diagonal.

Démonstration :

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne tout d'abord :

$$\begin{aligned}\int_{B(R)} |f - f_R|^2 &\leq \frac{1}{b(R)} \sum_{x,y \in B(R)} |f(x) - f(y)|^2 \\ &\leq \frac{1}{b(R)} \sum_{x \in B(R),\, g \in B(2R)} |f(x) - f(xg)|^2 .\end{aligned}$$

En décomposant $g = s_1 \cdots s_k$ avec $k = |g| \leq 2R$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}|f(x) - f(xg)|^2 &\leq \left(\sum_{i=0}^{k-1} |f(xs_1 \cdots s_i) - f(xs_1 \cdots s_{i+1})| \right)^2 \\ &\leq k \sum_{i=0}^{k-1} |f(xs_1 \cdots s_i) - f(xs_1 \cdots s_{i+1})|^2 \\ &\leq 2R \sum_{i=0}^{k-1} |\nabla f(xs_1 \cdots s_i)|^2 .\end{aligned}$$

Or, il est immédiat de constater que les fibres de l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} B(R) \times \{0 \dots k-1\} & \longrightarrow & B(3R) \\ (x,i) & \mapsto & xs_1 \cdots s_i \end{array} \right.$$

sont de cardinal au plus $k \leq 2R$ et nous avons donc :

$$\sum_{x \in B(R)} \sum_{i=0}^{k-1} |\nabla f(xs_1 \cdots s_i)|^2 \leq 2R \sum_{z \in B(3R)} |\nabla f(z)|^2 .$$

En sommant cette dernière inégalité sur $g \in B(2R)$, nous obtenons l'inégalité (3). $\square$

Pour les fonctions harmoniques, il est possible de renverser l'inégalité précédente.

Proposition 4.1

Il existe une constante C_1 ne dépendant que de G telle que l'inégalité suivante est satisfaite pour toute fonction harmonique :

$$\int_{B(R)} |\nabla f|^2 \leq \frac{C_1}{R^2} \int_{B(2R)} |f|^2 . \tag{4}$$

Démonstration :

Comme G est de type fini, il existe (pour tout $R > 0$) des fonctions plateaux $\varphi = \varphi_R$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{|B(R)} = 1 \\ \varphi_{|G \setminus B(2R)} = 0 \\ |\nabla \varphi| \leq \frac{C}{R}, \end{array} \right.$$

où C ne dépend que de G. En intégrant par parties, nous obtenons :

$$0 = \int_{B(2R)} \varphi^2 f \Delta f = -\int_{B(2R)} \varphi^2 |\nabla f|^2 - 2\int_{B(2R)} \varphi f \nabla\varphi \cdot \nabla f$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne finalement :

$$\int_{B(2R)} \varphi^2 |\nabla f|^2 \leq 2 \left(\int_{B(2R)} \varphi^2 |\nabla f|^2\right)^{1/2} \left(\int_{B(2R)} f^2 |\nabla\varphi|^2\right)^{1/2}.$$

En simplifiant et en utilisant la majoration portant sur le gradient de φ, on obtient l'inégalité annoncée :

$$\int_{B(R)} |\nabla f|^2 \leq \int_{B(2R)} \varphi^2 |\nabla f|^2 \leq \frac{4C^2}{R^2} \int_{B(2R)} f^2.$$

□

4.3 Estimations et conclusions

Soit V un espace vectoriel de dimension $2k$ de fonctions harmoniques et Lipschitz. Nous ferons les hypothèses simplificatrices suivantes :

$$\exists\, C_2 = C(G) > 0,\, \forall\, R > 0,\, b(2R) \leq C_2 b(R) \tag{5}$$

$$\exists\, a = a(G) > 0,\, \forall\, R > 0,\, \left(\frac{\det Q_{2R}}{\det Q_R}\right)^{1/2k} \leq \exp(a) \tag{6}$$

où Q_R désigne la forme quadratique

$$Q_R(v) = \int_{B(R)} v^2.$$

Notons que l'hypothèse (5) implique la croissance polynomiale de G mais est plus forte ; cependant, un groupe à croissance polynomiale vérifie les hypothèses ci-dessus à des échelles aussi grandes que souhaitées. Cette première étape de sélection d'échelles est présente dans de nombreux travaux [Gro81, CM97, Kle10] auxquels nous renvoyons le lecteur. Pour finir, notons bien que la constante a ci-dessus ne dépend que de G et pas de l'espace V.

Comme la famille de formes quadratiques Q_R est croissante en R, les hypothèses ci-dessus impliquent un contrôle de Q_{2R} par Q_R pour une proportion fixée des éléments de V (dans toute la suite, nous fixons R_0 assez grand pour que Q_R soit définie positive pour tout $R \geq R_0$).

Lemme 4.1
Il existe un sous-espace U de dimension k tel que :

$$\forall\, u \in U,\, Q_{2R}(u) \leq \exp(2a) Q_R(u).$$

Démonstration :

En effet, considérons une base $(v_i)_{i=1..2k}$ à la fois orthonormale pour Q_R et orthogonale pour Q_{2R}. Si $Q_{2R}(v_i) \geq \exp(2a)Q_R(v_i) = \exp(2a)$ pour $i = 1 \ldots l$, l'inégalité suivante est alors vérifiée :

$$\left(\frac{\det Q_{2R}}{\det Q_R}\right)^{1/2k} \geq \left(\prod_{i=1}^{l} Q_{2R}(v_i)\right)^{1/2k} \geq \exp(\frac{l}{k}a)$$

puisque $Q_{2R}(v_j) \geq Q_R(v_j) = 1$ pour tout j. Cette inégalité est en contradiction avec (6) si $l > k$. $\square$

Fort de ce renseignement, nous allons étudier plus finement la croissance de Q_R ; pour cela nous utiliserons les résultats du paragraphe ci-dessus ainsi que le lemme suivant qui montre que l'hypothèse (5) permet de construire des recouvrements contrôlés [8].

Lemme 4.2

Pour tout $N \geq 1$, il existe un recouvrement de $B(2^N R_0)$ par des boules de rayon R_0 notées

$$(B_j = B(x_j, R_0))_{j \in J_N}$$

vérifiant :

(i) les boules $\frac{1}{2}B_j$ sont deux à deux disjointes,

(ii) la multiplicité d'intersection des recouvrements par les boules $3B_j$ est majorée par C_2^4,

(iii) $\sharp J_N \leq C_2^N$.

Démonstration :

Pour obtenir un recouvrement, il suffit de considérer une famille maximale $(x_j)_j$ de points de $B(2^N R_0)$ vérifiant $d(x_i, x_j) > R_0$ pour $i \neq j$. l est alors clair que les boules B_j associées recouvrent $B(2^N R_0)$ et que les boules de rayon moitié sont deux à deux disjointes.

Si maintenant $z \in 3B_{j_1} \cap \cdots \cap 3B_{j_l}$, nous avons alors :

$$d(x_{j_1}, x_{j_m}) \leq d(x_{j_1}, z) + d(z, x_{j_m}) \leq 6R_0.$$

En particulier, $\frac{1}{2}Bj_m \subset B(x_{j_1}, 8R_0)$ (la majoration est grossière pour n'avoir que des puissances de 2). Comme ces boules sont deux à deux disjointes, nous en déduisons :

$$lb(R_0/2) \leq b(8R_0) \leq C_2^4 b(R_0/2).$$

La majoration pour le cardinal de J_N s'obtient de la même manière. $\square$

A l'aide du recouvrement précédent, nous en déduisons l'estimation suivante :

$$\forall\, v \in V,\ Q_{2^N R_0}(v) \leq 2b(R_0)\, |\Phi_N(v)|^2 + \frac{C_1 C_2^5}{4^N} Q_{2^{N+2} R_0}(v), \qquad (7)$$

8. c'est exactement ce genre d'argument qui montre que le cône asymptotique est de dimension finie, cf théorème 3.1.

où Φ_N désigne l'application linéaire :

$$\Phi_N(v) = \left(\frac{1}{b(R_0)} \int_{B_j} v \right)_{j \in J_N}.$$

Avant d'établir la majoration (7), voyons comment celle-ci nous permet de conclure la

Démonstration du théorème 4.1 :

Fixons N de telle sorte que $C_1 C_2^5 \exp(4a) < 4^N$ (remarquons que le choix d'un tel entier ne dépend que du groupe G puisque c'est le cas des constantes a, C_1 et C_2). Si $u \in U$ (comme dans le lemme 4.1) et $u \in \mathrm{Ker}(\Phi_N)$, la majoration (7) devient :

$$Q_{2^N R_0}(u) \leq \frac{C_1 C_2^5 \exp(4a)}{4^N} Q_{2^N R_0}(u).$$

La constante multiplicative étant strictement inférieure à 1, Φ_N est injective en restriction à U et nous avons donc (d'après le lemme 4.2) :

$$\dim(V) = 2k \leq 2\sharp J_N \leq 2C_2^N.$$

Comme la constante ne dépend que de G, ceci montre bien que l'espace $\mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G)$ est de dimension finie. □

L'inégalité (7) s'obtient en utilisant les inégalités de Poincaré pour le recouvrement construit au lemme 4.2. En notant v_{B_j} la moyenne de v sur la boule B_j, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Q_{2^N R_0}(v) &\leq \sum_{j \in J_N} \int_{B_j} v^2 \leq 2 \sum_{j \in J_N} \int_{B_j} \left| v_{B_j} \right|^2 + \sum_{j \in J_N} \int_{B_j} \left| v - v_{B_j} \right|^2 \\
&\leq 2b(R_0) \left| \Phi_N \right|^2 + 2 \sum_{j \in J_N} 2C_2 R_0^2 \int_{3B_j} |\nabla v|^2 \\
&\leq 2b(R_0) \left| \Phi_N \right|^2 + 4C_2^5 R_0^2 \int_{B(2^{N+1} R_0)} |\nabla v|^2 \\
&\leq 2b(R_0) \left| \Phi_N \right|^2 + \frac{C_1 C_2^5}{4^N} Q_{2^{N+2} R_0}(v).
\end{aligned}$$

En effet, la deuxième ligne s'obtient en appliquant le théorème 4.2 (et en remarquant que sous l'hypothèse (5), la majoration prend une forme plus simple), la troisième utilise le point (ii) du lemme 4.2 et le passage à la dernière ligne n'est rien d'autre que l'application de la proposition 4.1.

5 Représentations unitaires et conclusion

Le dernier ingrédient de la démonstration (comme expliqué dans [Tao10]) consiste à traiter le cas unitaire du théorème de Gromov.

Théorème 5.1
Soit G un groupe de type fini du groupe unitaire $\mathrm{U}(n)$; si G est à croissance polynomiale, G est virtuellement abélien.

Remarque 5.1
Ce résultat est bien évidemment une conséquence du théorème 1.1. En effet, si Γ est un sous-groupe nilpotent du groupe unitaire, son adhérence G dans $\mathrm{U}(n)$ est un groupe de Lie compact et nilpotent. Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini, nous pouvons supposer que G est également connexe. Il suffit alors de montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G est abélienne[9]*. Comme $\mathfrak{G}$ est nilpotente, $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent pour tout élément $x \in \mathfrak{G}$. Or, G étant compact, $\exp(tx)$ admet une limite quand $t \longrightarrow +\infty$ (quitte à passer à une sous-suite). On en déduit donc que*

$$\mathrm{Ad}(\exp(tx)) = e^{t\mathrm{ad}(x)}$$

admet une limite quand $t \longrightarrow +\infty$. En examinant les blocs de Jordan de $\mathrm{ad}(x)$, ceci n'est possible que si $\mathrm{ad}(x) = 0$.

La démonstration qui va suivre est en quelque sorte une réminiscence d'un théorème de Jordan.

Théorème 5.2 (C. Jordan, 1878)
Etant donné un entier $n \geq 1$, il existe une constante $C(n)$ ne dépendant que de n vérifiant la propriété suivante : tout groupe fini $G \subset \mathrm{U}(n)$ admet un sous-groupe abélien $A \subset G$ d'indice au plus $C(n)$.

Il est conseiller au lecteur de dégager une démonstration de ce résultat des lignes qui vont suivre.

L'hypothèse que le groupe G est unitaire va être utilisée en le munissant d'une distance héritée de celle du groupe unitaire. Nous munissons donc $M_n(\mathbb{C})$ de la norme induite par la norme hermitienne standard sur $\mathbb{C}^n$ qui sera simplement notée $|\bullet|$. Elle est donnée par :

$$|A| := \sqrt{\rho(AA^*)}.$$

Les éléments du groupe unitaire sont bien évidemment de norme 1 et vérifie :

$$\forall\, A \in U(n),\ |1 - A| = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |1 - \lambda| \,.$$

Nous réunissons quelques propriétés dont nous aurons besoin.

$$\forall\, (g,h) \in U(n),\ |1 - [g,h]| \leq 2\, |1 - g|\, |1 - h| \tag{8}$$

$$\forall\, j \in \mathbb{Z},\ \left|1 - g^j\right| \leq |j|\, |1 - g| \,. \tag{9}$$

9. de façon plus générale, un groupe connexe, résoluble et compact et automatiquement abélien (voir [Hel01, Prop. 6.6]).

Lemme 5.1
Soit G un sous-groupe de $U(n)$ et $\epsilon > 0$. Le sous-groupe

$$G_\epsilon = \langle g \in G | \, |1-g| \leq \epsilon \rangle$$

est d'indice fini dans G. Si G est de type fini, on peut alors trouver un système fini de générateurs de G_ϵ vérifiant $|1-g| \leq \epsilon$.

Démonstration :
Par compacité, on recouvre $U(n)$ par un nombre fini $(B_j)_{j\in J}$ de boules de rayon $\epsilon/2$ (de centre x_j) et, si $B_j \cap G \neq \emptyset$, on fixe $g_j \in B_j \cap G$. Soit alors $g \in G$; g appartient à une boule B_j et on a donc :

$$|g - g_j| \leq |g - x_j| + |x_j - g_j| \leq \epsilon.$$

Comme $G \subset U(n)$, on a

$$|g - g_j| = \left|1 - g_j^{-1} g\right| \leq \epsilon,$$

ce qui signifie exactement que $g \in g_j G_\epsilon$. La dernière assertion est immédiate (dans un groupe de type fini, tout système de générateurs possède une sous-famille génératrice finie). □

Nous utiliserons enfin les faits suivants.

(A) Si $g \in U(n)$ et g n'est pas multiple de l'identité, le centralisateur de g dans $U(n)$ est (en diagonalisant g) :

$$C_{U(n)}(g) = \prod_{i=1}^{k} U(n_i) \quad \text{avec } n_i < n.$$

(B) Il existe $\delta > 0$ vérifiant : si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ et $|1-z| \leq \epsilon$, $\left|1 - z^k\right| \geq |1-z|$ pour tout $0 < |k| \leq \delta/\epsilon$.

Pour se convaincre du point (B), il suffit de faire un dessin (si z est sur le cercle unité et proche de 1, ses premières puissances ont tendance à s'éloigner de 1). Un calcul explicite (et élémentaire) montre que tout $\delta \leq 1$ convient.

Nous pouvons enfin procéder à la
Démonstration du théorème 5.1 :
Soit donc G un sous-groupe de type fini de $U(n)$ à croissance polynomiale de degré r. Quitte à remplacer G par G_ϵ (lemme 5.1), nous pouvons supposer que G est engendré par un nombre fini d'éléments S vérifiant $\forall\, g \in S$, $|1-g| \leq \epsilon$ avec

$$\epsilon < \min\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}, \delta/4^r\right).$$

S'il existe un élément g du centre de G qui n'est pas une homothétie, on a alors (avec (B) ci-dessus) :

$$G \subset C_{U(n)}(g) = \prod_{i=1}^{k} U(n_i).$$

En procédant par récurrence sur n et en projetant G sur les différents facteurs qui apparaissent, on constate que G est virtuellement abélien.

Nous allons montrer que l'hypothèse $Z(G) \subset \mathbb{C}^*\mathrm{I}_n$ est incompatible avec la croissance polynomiale de G. Soit h_1 un élément de G qui n'est pas une homothétie et vérifiant $|1-h_1| \leq \epsilon$ (par exemple un élément de S) et considérons les commutateurs $[h_1, g]$ pour $g \in S$. Remarquons tout d'abord que si un tel élément est une homothétie, alors il doit être trivial. En effet, comme un commutateur est de déterminant 1, si $[h_1, g] = \lambda \mathrm{Id}$, alors $\lambda^n = 1$. D'autre part, l'inégalité 8 fournit la relation :

$$|1-\lambda| = |1-[h_1,g]| \leq 2\,|1-h_1|\,|1-g| \leq 2\epsilon^2.$$

Comme λ est une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité et que $\epsilon < 1/2\sqrt{n}$, ceci implique $\lambda = 1$. Comme h_1 est supposé non central, il existe donc $g_1 \in S$ tel que $h_2 := [h_1, g_1]$ vérifie

$$h_2 \notin \mathbb{C}^*\mathrm{Id} \quad \text{et} \quad |1-h_2| \leq 2\epsilon\,|1-h_1|\,.$$

Nous construisons de manière inductive une suite d'éléments $(h_k)_{k\geq 1}$ vérifiant

$$\forall k \geq 1, \begin{cases} h_k \notin \mathbb{C}^*\mathrm{Id} \\ \exists\, g_k \in S,\ h_{k+1} = [h_k, g_k] \\ |1-h_{k+1}| \leq 2\epsilon\,|1-h_k|\,. \end{cases}$$

Fait 5.1
Les éléments $h_1^{\alpha_1} \cdots h_k^{\alpha_k}$ sont deux à deux distincts pour $0 \leq \alpha_j \leq \delta/\epsilon$.

Tenant ceci pour acquis, voyons comment conclure. Pour cela, examinons la longueur (pour le système S) des éléments ainsi construits :

$$\ell_S(h_{k+1}) = \ell_S\left(g_k h_k g_k^{-1} h_k^{-1}\right) \leq 2 + 2\ell_S(h_k) \leq 4\ell_S(h_k).$$

Ceci implique en particulier $\ell_S(h_k) \leq 4^{k-1}$. Pour un choix d'exposants α_j comme ci-dessus, on a donc :

$$\ell_S\left(h_1^{\alpha_1} \cdots h_k^{\alpha_k}\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \ell_S(h_j) \leq \frac{\delta}{\epsilon} k 4^k.$$

D'après le fait 5.1, la boule de rayon $\frac{\delta}{\epsilon} k4^k$ contient au moins $(\delta/\epsilon)^k$ éléments et, G étant à croissance d'ordre r, nous obtenons :

$$\left(\frac{\delta}{\epsilon}\right)^k \leq \sharp B(\frac{\delta}{\epsilon} k 4^k) \leq C\left(\frac{\delta}{\epsilon} k 4^k\right)^r.$$

Cette inégalité est bien évidemment absurde par choix de ϵ pour $k \longrightarrow +\infty$. □

Démonstration du fait 5.1 :

Nous montrons successivement les inégalités suivantes (si les coefficients α varient dans l'intervalle autorisé) :

(i) $\left|1-h_j^{\alpha_j} \cdots h_k^{\alpha_k}\right| \leq \frac{2\delta}{\epsilon}\,|1-h_j|$ et

(ii) si $\alpha_j \neq 0$, $\left|1 - h_j^{\alpha_j} \cdots h_k^{\alpha_k}\right| \geq (1-4\delta)\,|1-h_j|$.

En effet, nous avons (en utilisant les inégalités (8) et le fait que les éléments de G sont unitaires) :

$$\begin{aligned}
\left|1 - h_j^{\alpha_j} \cdots h_k^{\alpha_k}\right| &\leq \left|1 - h_j^{\alpha_j}\right| + \left|h_j^{\alpha_j} - h_j^{\alpha_j} \cdots h_k^{\alpha_k}\right| \\
&\leq \left|1 - h_j^{\alpha_j}\right| + \left|1 - h_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots h_k^{\alpha_k}\right| \leq \sum_{i=j}^{k} \left|1 - h_i^{\alpha_i}\right| \\
&\leq \sum_{i=j}^{k} |\alpha_i|\,|1-h_i| \leq \frac{\delta}{\epsilon} \sum_{i=j}^{k} (2\epsilon)^{i-j}\,|1-h_j| \leq \frac{2\delta}{\epsilon}\,|1-h_j|\,,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité valant si l'on a pris soin de choisir $\epsilon < 1/2$.
D'autre part, nous utilisons (B) pour obtenir la minoration (ii) :

$$\begin{aligned}
\left|1 - h_j^{\alpha_j} \cdots h_k^{\alpha_k}\right| &\geq \left|1 - h_j^{\alpha_j}\right| - \left|h_j^{\alpha_j} - h_j^{\alpha_j} \cdots h_k^{\alpha_k}\right| \\
&\geq |1-h_j| - \left|1 - h_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots h_k^{\alpha_k}\right| \\
&\geq |1-h_j| - \frac{2\delta}{\epsilon}\,|1-h_{j+1}| \geq (1-4\delta)\,|1-h_j|\,.
\end{aligned}$$

Nous avons bien entendu fait usage de l'inégalité (i) mais aussi du fait que $|1-h_{j+1}| \leq 2\epsilon\,|1-h_j|$.

Nous pouvons maintenant conclure. Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, nous pouvons par exemple supposer que $\alpha_1 > \beta_1$ et, quitte à factoriser par $h_1^{\beta_1}$, nous nous ramenons au cas où $\alpha_1 > \beta_1 = 0$. En combinant les inégalités précedentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\left|h_1^{\alpha_1} \cdots h_k^{\alpha_j} - h_2^{\beta_2} \cdots h_k^{\beta_k}\right| &\geq \left|1 - h_1^{\alpha_1} \cdots h_k^{\alpha_j}\right| - \left|1 - h_2^{\beta_1} \cdots h_k^{\beta_k}\right| \\
&\geq (1-4\delta)\,|1-h_1| - \frac{2\delta}{\epsilon}\,|1-h_2| \geq (1-8\delta)\,|1-h_1|\,,
\end{aligned}$$

et (si $\delta < 1/8$) cela montre bien que les éléments correspondants sont distincts. □

Les résultats des différentes sections mis bout à bout fournissent maintenant la

Démonstration du théorème 1.1 :

Soit donc G un groupe infini à croissance polynomiale. Le théorème 4.1 montre que l'espace $\mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G)$ des fonctions harmoniques et lipschitziennes est de dimension finie et contient strictement les constantes. Sur le quotient

$$V := \mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G)/\mathbb{C}$$

la quantité $f \mapsto \mathrm{Lip}(f)$ devient une authentique norme, pour laquelle le groupe G agit par isométries. Comme V est de dimension finie, cette norme est équivalente à une norme euclidienne et ceci fournit donc une représentation unitaire (ou orthogonale) de G. L'image de cette représentation est virtuellement abélienne d'après le théorème 5.1. Si l'image est infinie, G admet (virtuellement) $\mathbb{Z}$ pour quotient et la proposition 2.1 permet de conclure.

Dans le cas contraire [10], nous pouvons donc supposer (quitte à considérer un sous-groupe d'indice fini) que G agit trivialement sur V ; ceci signifie exactement que l'action de G sur $\mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G)$ est de la forme :

$$g \cdot f = f + \lambda_g(f)$$

où λ_g est une forme linéaire sur $\mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G)$. Il est immédiat de vérifier que l'application $\lambda : g \mapsto \lambda_g$ est un morphisme de G dans (le groupe abélien) $\mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G)^*$. Si son image était finie, cela signifierait en particulier que les fonctions de $\mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G)$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs donc seraient constantes (par principe du maximum pour les fonction harmoniques) ; or nous savons d'après le théorème 4.1 que $\mathcal{H}_{\mathrm{Lip}}(G)$ n'est pas réduit aux constantes. Comme l'image de λ est infinie, nous pouvons raisonner comme ci-dessus et conclure. $\square$

Références

[Bas72] H. Bass, *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **25** (1972), 603–614.

[CM97] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi, II, *Harmonic functions on manifolds*, Ann. of Math. (2) **146** (1997), no. 3, 725–747.

[CWM+68] L. Carlitz, A. Wilansky, John Milnor, R. A. Struble, Neal Felsinger, J. M. S. Simoes, E. A. Power, R. E. Shafer, and R. E. Maas, *Problems and Solutions : Advanced Problems : 5600-5609*, Amer. Math. Monthly **75** (1968), no. 6, 685–687.

[Dix60] Jacques Dixmier, *Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1960), no. 6.

[dlH00] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[Gri84] R. I. Grigorchuk, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48** (1984), no. 5, 939–985.

[Gro81] Mikhael Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1981), no. 53, 53–73.

[Gui70] Yves Guivarc'h, *Groupes de Lie à croissance polynomiale*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **271** (1970).

[Hel01] Sigurdur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, American

10. ce cas se produit effectivement comme le montre l'exemple $G = \mathbb{Z}$.

Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Corrected reprint of the 1978 original.

[Hir90] Joram Hirschfeld, *The nonstandard treatment of Hilbert's fifth problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), no. 1, 379–400.

[Kle10] Bruce Kleiner, *A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 3, 815–829.

[KS97] Nicholas J. Korevaar and Richard M. Schoen, *Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces*, Comm. Anal. Geom. **5** (1997), no. 2, 333–387.

[Mil68a] J. Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, J. Differential Geometry **2** (1968), 1–7.

[Mil68b] John Milnor, *Growth of finitely generated solvable groups*, J. Differential Geometry **2** (1968), 447–449.

[Mok95] Ngaiming Mok, *Harmonic forms with values in locally constant Hilbert bundles*, Proceedings of the Conference in Honor of Jean-Pierre Kahane (Orsay, 1993), no. Special Issue, 1995, pp. 433–453.

[MZ55] Deane Montgomery and Leo Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[Rud91] Walter Rudin, *Functional analysis*, second ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991.

[Sha00] Yehuda Shalom, *Rigidity of commensurators and irreducible lattices*, Invent. Math. **141** (2000), no. 1, 1–54.

[ST10] Yehuda Shalom and Terence Tao, *A finitary version of Gromov's polynomial growth theorem*, Geom. Funct. Anal. **20** (2010), no. 6, 1502–1547.

[Tao10] Terence Tao, *A proof of Gromov's Theorem*, http ://terrytao.wordpress.com/2010/02/18/a-proof-of-gromovs-theorem/, 2010.

[Tit72] Jacques Tits, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra **20** (1972), 250–270.

[Tit81a] ———, *Appendix to : "Groups of polynomial growth and expanding maps" [Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 53 (1981), 53–73] by M. Gromov*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1981), no. 53, 74–78.

[Tit81b] ———, *Groupes à croissance polynomiale (d'après M. Gromov et al.)*, Bourbaki Seminar, Vol. 1980/81, Lecture Notes in Math., vol. 901, 1981, pp. 176–188.

[Wol68] Joseph A. Wolf, *Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemanniann manifolds*, J. Differential Geometry **2** (1968), 421–446.