Un théorème de prolongement

Benoît Claudon

03/02/2006

Introduction

On se propose ici de démontrer le résultat d'extension suivant :

Théorème 0.1 *Soit X une variété projective lisse et S une hypersurface (lisse) de X ; on considère de plus un fibré en droite $(L, \tilde{h})$ muni d'une métrique singulière vérifiant :*

(i) $i\Theta_{\tilde{h}}(L) \geq \epsilon\omega$ *avec* $\epsilon > 0$ *et* ω *une métrique hermitienne sur* X

(ii) $\tilde{h}_{|S}$ *est bien définie (i.e. non identiquement* $-\infty$*)*

(iii) *l'idéal multiplicateur de* $\tilde{h}_{|S}$ *est trivial :* $\mathcal{I}(S, \tilde{h}_{|S}) = \mathcal{O}_S$

Alors, pour tout entier $m \geq 1$*, l'application de restriction :*

$$H^0(X, m(K_X + L + S)) \longrightarrow H^0(S, m(K_S + L_S))$$

est surjective.

Ci-dessus et dans toute la suite, la restriction d'un fibré L à l'hypersurface S sera noté L_S (et de même pour une métrique sur L dont la restriction à S est bien définie).

Remarque 0.1 *L'hypothèse* (i) *faite sur la courbure de* L *signifie en fait que le fibré* L *est gros :* $\kappa(X, L) = n = dim(X)$.

Dans [Tak05], l'hypothèse faite sur L et S est un peu différente de celle faite dans le théorème (0.1) ; en effet, il y est supposé que $L \sim_{\mathbb{Q}} A + D$ avec A gros et *nef* et D effectif tels que S soit en position A-générale, $S \subsetneq \mathrm{Supp}(D)$ et la paire (S, D_S) soit *klt*. Il n'est en fait pas difficile de se convaincre que, dans cette situation, on peut munir L d'une métrique singulière vérifiant les point (i), (ii) et (iii) du théorème (0.1).

1 Rappels et notations

Tout d'abord on rappelle le théorème de Nadel qui est en fait l'ingrédient essentiel de la démonstration :

Théorème 1.1 *Soit X une variété projective lisse et (E, h) un fibré en droite muni d'une métrique singulière vérifiant $i\Theta_h(E) \geq \epsilon\omega$; alors :*

$$\forall j > 0,\ H^j(X, (K_X + E) \otimes \mathcal{I}(h)) = 0$$

Sous les hypothèses du théorème (1.1), on obtient un premier résultat d'extension de type Ohsawa-Takegoshi :

Corollaire 1.1 *Si S est une hypersurface lisse de X avec h_S bien définie et si $\sigma \in H^0(S, (K_S + E_S) \otimes \mathcal{I}(h_S))$ alors σ admet une extension $\tilde{\sigma} \in H^0(X, (K_X + E + S))$.*

Démonstration :
On a en effet la suite exacte de l'adjonction (voir [Laz04, th. 9.5.1. p. 195]) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-S) \otimes \mathcal{I}(h) \longrightarrow \mathrm{Adj}(S,h) \longrightarrow \mathcal{I}(S,h_S) \longrightarrow 0$$

que l'on peut réécrire en :

$$0 \to (K_X+E) \otimes \mathcal{I}(h) \to (K_X+E+S) \otimes \mathrm{Adj}(S,h) \to (K_S+E_S) \otimes \mathcal{I}(S,h_S) \to 0$$

Le théorème de Nadel (1.1) s'applique et on a donc $H^1(X,(K_X+E)\otimes\mathcal{I}(h)) = 0$ ce qui assure la surjectivité de

$$H^0(X,(K_X+E+S)\otimes \mathrm{Adj}(S,h)) \longrightarrow H^0(S,(K_S+E_S)\otimes\mathcal{I}(h_S))$$

et fournit l'extension souhaitée. □

Rappelons également le fait suivant : si E est un fibré en droite et $(s_j)_{j=1..N}$ une famille de sections de E, l'expression $(\sum_j \|s_j\|^2)^{-1}$ définit une métrique singulière à courbure positive (au sens des courants). Si h est une métrique lisse quelconque sur E, cela signifie :

$$i\Theta_h(E) + \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\log\Big(\sum_{j=1}^{N}\|s_j\|_h^2\Big) \geq 0$$

(et ceci ne dépend bien évidemment pas de la métrique utilisée).

Pour finir, fixons quelques notations (on reprend celle de l'énoncé du théorème (0.1)) : on choisit A un fibré suffisament ample sur X pour que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(A1) $p(K_X+L+S)+A$ est globalement engendré par $(s_j^{(p)})_{j=1..N_p}$ pour $0 \leq p \leq m-1$

(A2) toute section de $m(K_S+L_S)+A_S$ s'étend (en une section de $m(K_X+L+S)+A$)

On notera également h_ω la métrique induite par ω sur K_X et on fixe g et h des métriques lisses (quelconques) sur S et L ; on choisit de plus une métrique lisse h_A sur A à courbure >0. Pour un entier q, on notera h_q la métrique $(h_\omega \otimes g \otimes h)^{\otimes q} \otimes h_A$ sur $q(K_X+L+S)+A$. Enfin, on note σ la section de $m(K_S+L_S)$ que l'on désire étendre.

Remarque 1.1 *On peut écrire la métrique $\tilde{h}$ sous la forme $\tilde{h} = e^{-\varphi}h$ et, dans ce cas, les conditions portant sur $\tilde{h}_S$ se transcrivent en $\varphi_S \not\equiv -\infty$ et $\int_S e^{-2\varphi_S} dV_\omega < +\infty$*

2 Preuve du théorème (0.1)

La preuve du théorème (0.1) repose en grande partie sur la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Pour tout entier $k \geq 1$ et $0 \leq p \leq m-1$, on peut étendre les sections $\sigma^k \otimes s_j^{(p)}$ (pour $1 \leq j \leq N_p$) en $\widetilde{\sigma}_j^{(km+p)} \in H^0(X,(km+p)(K_X+L+S)+A)$.*

Démonstration :
On va procéder par récurrence ; le cas $k=1$ et $p=0$ correspondant exactement à la propriété **(A2)**, on peut fabriquer des extensions $\widetilde{\sigma}_j^{(m)}$ de $\sigma \otimes s_j^{(0)}$. On considère donc le cas $k=1$ et $p=1$; on munit alors le fibré $m(K_X+L+S)+A+L$ de la métrique singulière (notée $h^{1,1}$) induite par la famille $(\widetilde{\sigma}_q^{(m)})_{q=0..N_0}$ (pour la partie $m(K_X+L+S)+A$) et par $\tilde{h}$ (pour la partie L). Comme la métrique induite par la famille de sections est à courbure positive, la métrique $h^{1,1}$ est encore à courbure $\geq \epsilon\omega$. De plus, pour cette métrique, la norme L^2 de $\sigma \otimes s_j^{(1)}$ sur S vaut :

$$\left\|\sigma \otimes s_j^{(1)}\right\|^2_{h^{1,1}} = \frac{\|\sigma\|_h^2 \left\|s_j^{(1)}\right\|^2_{h_1} e^{-2\varphi_S}}{\sum_{q=1}^{N_0}\left\|\widetilde{\sigma}_q^{(m)}\right\|^2_{h_m}} = \frac{\|\sigma\|_h^2 \left\|s_j^{(1)}\right\|^2_{h_1} e^{-2\varphi_S}}{\sum_{q=1}^{N_0}\|\sigma\|_h^2\left\|s_q^{(0)}\right\|^2_{h_0}} = \frac{\left\|s_j^{(1)}\right\|^2_{h_1} e^{-2\varphi_S}}{\sum_{q=1}^{N_0}\left\|s_q^{(0)}\right\|^2_{h_0}} \leq Ce^{-2\varphi_S}$$

la dernière inégalité étant une conséquence de la propriété **(A1)** (comme A est globalement engendré, les sections aux dénominateurs ne peuvent s'annuler simultanément). En intégrant sur S et en utilisant la remarque (1.1), on constate que $\sigma \otimes s_j^{(1)} \in H^0(S,(k_S+L_S)\otimes \mathcal{I}(S,h_S^{1,1}))$; le corollaire (1.1) nous permet alors de trouver une extension $\widetilde{\sigma}_j^{(m+1)} \in H^0(X,(m+1)(K_X+L+S)+A)$.

On constate que l'on peut alors procéder de même pour $p \leq m-1$ (à chaque étape les métriques sont à courbures >0 et la combinaison de la popriété **(A1)** et de la remarque (1.1) assure que $\sigma \otimes s_j^{(p)}$ soit L^2 pour la métrique en question) ; en particulier, si $p=m-1$, on peut produire des sections $(\widetilde{\sigma}_q^{(2m-1)})_{q=0..N_{m-1}}$ qui prolongent $\sigma \otimes s_q^{(m-1)}$. On souhaite maintenant étendre $\sigma^2 \otimes s_j^{(0)}$. Pour ce faire, on munit alors le fibré $(2m-1)(K_X+L+S)+A+L$ de la métrique singulière (notée $h^{1,m-1}$) induite par la famille $(\widetilde{\sigma}_q^{(2m-1)})_{q=0..N_0}$ et par $\tilde{h}$; cette métrique est encore à coubure >0 et on a :

$$\begin{aligned}\left\|\sigma^2 \otimes s_j^{(0)}\right\|^2_{h^{1,m-1}} &= \frac{\left\|\sigma^2\right\|_h^2 \left\|s_j^{(0)}\right\|^2_{h_0} e^{-2\varphi_S}}{\sum_{q=1}^{N_{m-1}} \left\|\widetilde{\sigma}_q^{(2m-1)}\right\|^2_{h_{2m-1}}} = \frac{\left\|\sigma^2\right\|_h^2 \left\|s_j^{(0)}\right\|^2_{h_0} e^{-2\varphi_S}}{\sum_{q=1}^{N_{m-1}} \left\|\sigma\right\|_h^2 \left\|s_q^{(m-1)}\right\|^2_{h_{m-1}}} \\ &= \frac{\left\|\sigma\right\|_h^2 \left\|s_j^{(0)}\right\|^2_{h_0} e^{-2\varphi_S}}{\sum_{q=1}^{N_{m-1}} \left\|s_q^{(m-1)}\right\|^2_{h_{m-1}}} \leq Ce^{-2\varphi_S}\end{aligned}$$

et là encore le même argument s'applique et on peut étendre la section $\sigma^2 \otimes s_j^{(0)}$.

Ceci conclut la récurrence ; en effet, on peut réitérer le procédé : à chaque étape on utilise la famille de sections obtenues précédemment et la métrique $\tilde{h}$. L'utilisation de cette dernière assure d'une part le fait que la courbure soit >0 et d'autre part que les sections considérées soient dans le bon idéal multiplicateur. □

Démonstration du théorème (0.1) :
Pour $k \geq 1$, on pose alors :

$$f_k = \frac{1}{2}\log\Big(\sum_{j=1}^{N_0} \left\|\widetilde{\sigma}_j^{(km)}\right\|^2_{h_{km}}\Big)$$

et on a donc :

$$i\Theta_{h_{km}}(km(K_X+L+S)+A) + i\partial\overline{\partial} f_k \geq 0$$

et ainsi :

$$i\Theta_{(*)}(m(K_X+L+S)) + \frac{i}{k}\partial\overline{\partial} f_k \geq -\frac{i}{k}\Theta_{h_A}(A)$$

ou encore :

$$i\Theta_{(*)}((m-1)(K_X+L+S)) + \frac{i(m-1)}{mk}\partial\overline{\partial} f_k \geq -\frac{i(m-1)}{mk}\Theta_{h_A}(A)$$

(les $(*)$ étant à remplacer par les bonnes métriques lisses ! !). Si on choisit k suffisament grand, on peut donc obtenir :

$$i\Theta_{(*)}((m-1)(K_X+L+S)) + \frac{i(m-1)}{mk}\partial\overline{\partial} f_k \geq -\frac{\epsilon}{2}\omega$$

On munit alors $(m-1)(K_X+L+S)+L$ de la métrique :

$$h_\infty = e^{-\frac{m-1}{mk}f_k}(h_\omega \otimes g \otimes h)^{\otimes(m-1)} \otimes \tilde{h}$$

Le choix de k entraine alors $i\Theta_{h_\infty}((m-1)(K_X+L+S)+L) \geq \frac{\epsilon}{2}\omega$ et on constate aisément que σ est L^2 pour cette métrique ; une dernière application du corollaire (1.1) fournit l'extension tant attendue.□

3 Cas d'une famille de variétés

Dans le cadre des familles de variétés, on dispose d'un résultat similaire. En effet, soient $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une famille de variétés projectives (*i.e.* π est une submersion holomorphe propre de $\mathcal{X}$ sur Δ le disque unité) et $(L, \tilde{h})$ un fibré pseudo-effectif sur $\mathcal{X}$ ($\tilde{h}$ est une métrique singulière à courant de courbure positif). On souhaite là encore étendre des sections de $m(K_{\mathcal{X}_0} + L)$ (au dessus de la fibre centrale $\mathcal{X}_0$) à $\mathcal{X}$ tout entier. Sous des conditions similaires à celles énoncées plus haut, un tel prolongement est possible :

Théorème 3.1 *Dans la situation décrite ci-dessus, supposons de plus que le fibré $(L, \tilde{h})$ vérifie : $\tilde{h}_{\mathcal{X}_0}$ est bien définie et $\mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$. Alors, pour tout entier $m \geq 1$, l'application de restriction :*

$$H^0(\mathcal{X}, m(K_{\mathcal{X}} + L)) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_0, m(K_{\mathcal{X}_0} + L))$$

est surjective.

Commençons par quelques remarques : la différence principale est que l'on ne suppose plus la courbure de L strictement positive (mais seulement positive) ; d'autre part, l'espace ambiant n'est plus compact. Le théorème de Nadel n'est donc plus valable en tant que tel et de plus, comme la courbure de L est seulement ≥ 0, on ne peut plus "se débrasser" du fibré A en choisissant un entier k assez grand pour que la contribution de $-\frac{1}{k}A$ soit compensée par la courbure de L.

Cependant, dans la situation d'une famille de variétés projectives, on dispose du théorème d'Ohsawa-Takegoshi qui permet d'obtenir des extensions en contrôlant les normes L^2. La version qui nous sera utile apparaît en fait dans [Siu02] :

Théorème 3.2 (Ohsawa-Takegoshi, Siu) *Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ une famille de variétés projectives et (E, h) un fibré pseudo-effectif sur $\mathcal{X}$ (avec $h_{\mathcal{X}_0}$ bien définie). Il existe une constante universelle C_0 (qui ne dépend pas de (E, h)) telle que toute section $\sigma \in H^0(\mathcal{X}_0, K_{\mathcal{X}_0} + E)$ satisfaisant de plus :*

$$\int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|_h^2 < +\infty \, ,$$

admet un prolongement $\tilde{\sigma} \in H^0(\mathcal{X}, K_{\mathcal{X}} + E)$ (avec $\tilde{\sigma}_{|\mathcal{X}_0} = \sigma \wedge \pi^* dt$) qui vérifie :

$$\int_{\mathcal{X}} \|\tilde{\sigma}\|_h^2 \leq C_0 \int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|_h^2$$

Le fait que la constante soit universelle est vraiment crucial et, sous cette forme, le théorème d'Ohsawa-Takegoshi devient la clé de voûte de la démonstration du théorème (3.1). Dans [Siu02], on constate que l'on peut prendre $C_0 = 8\pi e\sqrt{2 + \frac{1}{e}}$.

La stratégie est exactement la même que dans le cas projectif compact : quitte à restreindre un peu le disque Δ sur lequel est défini la famille, on peut trouver un fibré ample A satisfaisant les propriétés :

(B1) $p(K_X + L) + A$ est globalement engendré par $(s_j^{(p)})_{j=1..N_p}$ pour $0 \leq p \leq m-1$

(B2) toute section de $m(K_{\mathcal{X}_0} + L) + A$ (au desus de $\mathcal{X}_0$) s'étend en une section de $m(K_{\mathcal{X}} + L) + A$

On conserve également les notations pour les métriques sur $K_{\mathcal{X}}$, L et A (h_q est toujours une métrique lisse sur $q(K_{\mathcal{X}} + L) + A$) et σ désigne l'éternelle section à étendre. Le théorème d'Ohsawa-Takegoshi (3.2) remplace le corollaire (1.1) pour founir les extensions de $\sigma^k \otimes s_j^{(p)}$ mais, comme il en a été fait mention plus haut, on peut prolonger ces sections avec un contrôle précis des normes L^2. En témoigne la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $k \geq 1$ et $0 \leq p \leq m-1$, on peut étendre les sections $\sigma^k \otimes s_j^{(p)}$ (pour $1 \leq j \leq N_p$) en*

$$\widetilde{\sigma}_j^{(km+p)} \in H^0(\mathcal{X}, (km+p)(K_{\mathcal{X}} + L) + A)$$

avec de plus les estimations suivantes :

(E1) *si* $1 \leq p \leq m-1$, *on a*

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\sum_{j=1}^{N_p} \left\| \widetilde{\sigma}_j^{(km+p)} \right\|^2_{h_{km+p}}}{\sum_{j=1}^{N_{p-1}} \left\| \widetilde{\sigma}_j^{(km+p-1)} \right\|^2_{h_{km+p-1}}} dV_\omega \leq C$$

(E2) *pour* $p = 0$ *(et* $k \geq 2$*), l'estimation devient*

$$\int_{\mathcal{X}} \frac{\sum_{j=1}^{N_0} \left\| \widetilde{\sigma}_j^{(km)} \right\|^2_{h_{km}}}{\sum_{j=1}^{N_{m-1}} \left\| \widetilde{\sigma}_j^{((k-1)m+m-1)} \right\|^2_{h_{(k-1)m+m-1}}} dV_\omega \leq C$$

La démonstration de cette proposition se fait par récurrence : la propriété **(B2)** permet d'enclencher le processus et permet d'étendre les sections $\sigma^k \otimes s_j^{(0)}$ et ensuite il faut reprendre les estimations faites dans la démonstration de la proposition (2.1) pour constater que l'on peut effectivement obtenir des majorations uniformes sur les intégrales (la propriété **(B1)** nous assurant en particulier que les métriques fabriquées de proche en proche ont des singularités "compatibles" avec σ).

Démonstration du théorème (3.1) :

L'argument permettant de conclure dans le cas compact ne s'applique plus ici : la courbure de L ne peut plus compenser la partie provenant de $-\frac{1}{k}A$ et pour "éliminer" le fibré, il faut passer à la limite et faire tendre k vers $+\infty$. C'est pour effectuer ce passage à la limite que les estimations **(E1)** et **(E2)** vont se révéler primordiales.

En effet, comme précédemment, posons :

$$f_k = \frac{1}{2} \log \Big(\sum_{j=1}^{N_0} \left\| \widetilde{\sigma}_j^{(km)} \right\|^2_{h_{km}} \Big)$$

Les estimations **(E1)** et **(E2)**, combinées avec l'inégalité de Jensen (concavité du logarithme) et l'inégalité de la moyenne pour les fonctions *psh* fournissent (au moins localement) une majoration uniforme :

$$\frac{1}{k} f_k \leq C'$$

avec C' une constante (indépendante de k). De plus, on a toujours les inégalités suivantes (au sens des courants) :

$$i\Theta_{(*)}(m(K_{\mathcal{X}} + L)) + \frac{i}{k}\partial\overline{\partial} f_k \geq -\frac{i}{k}\Theta_{h_A}(A) \tag{1}$$

et sur la fibre centrale, f_k vérifie :

$$\frac{2}{k} f_{k|\mathcal{X}_0} = \log(\|\sigma\|^2) + \frac{1}{k}\log(\sum_{j=1}^{N_0} \left\| s_j^{(0)} \right\|^2_{h_0}) \tag{2}$$

Comme on a une borne uniforme, on peut passer à la limite et poser

$$g_\infty = \limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{k} f_k$$

mais cela ne permet hélas pas de passer à la limite dans l'équation (1) ; cependant, si on considère f_∞ l'enveloppe semi-continue supérieurement de g_∞ (f_∞ est la plus petite fonction *scs* qui majore g_∞), un résultat classique de théorie du potentiel (voir par exemple [LG86, th. 1.26. p. 19]) assure que :

$$\Theta_{(*)}(m(K_{\mathcal{X}} + L)) + i\partial\overline{\partial} f_\infty \geq 0 \tag{3}$$

et de même, (2) devient :

$$\|\sigma\|^2 e^{-2f_\infty} \leq 1 \tag{4}$$

La métrique $h_\infty = e^{-f_\infty}(h_\omega \otimes h)^{\otimes m}$ est alors une métrique singulière à courbure positive (c'est exactement ce que signifie (3)). On considère alors la métrique $\tilde{h}_\infty = h_\infty^{\frac{m-1}{m}} \otimes \tilde{h}$: c'est une métrique à courbure positive sur $(m-1)(K_\mathcal{X} + L) + L$ et, en appliquant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|^2_{\tilde{h}_\infty} &= \int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|^2 e^{-2\frac{(m-1)}{m}f_\infty - 2\varphi} dV_\omega \\
&= \int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|^{2\frac{(m-1)}{m}} e^{-2\frac{(m-1)}{m}(f_\infty+\varphi)} \|\sigma\|^{\frac{2}{m}} e^{-\frac{2}{m}\varphi} dV_\omega \\
&\leq \left(\int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|^2 e^{-2f_\infty} e^{-2\varphi} dV_\omega\right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_{\mathcal{X}_0} \|\sigma\|^2 e^{-2\varphi} dV_\omega\right)^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}$$

où φ est la fonction définie par $\tilde{h} = e^{-\varphi} h$. En utilisant (4) et le fait que $\mathcal{I}(\mathcal{X}_0, \tilde{h}_{\mathcal{X}_0}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_0}$, on en déduit que σ est L^2 pour la métrique $\tilde{h}_\infty$ et une ultime application du théorème d'Ohsawa-Takegoshi nous permet d'étendre σ sur $\mathcal{X}$ tout entier.$\square$

Remarque 3.1 *Une dernière remarque s'impose quant au fait d'étendre σ sur $\mathcal{X}$; en effet, il a été fait mention de la nécessité éventuelle de rétrécir un peu le disque Δ et ce à plusieurs reprises (mais heureusement en nombre fini) : a priori, l'extension obtenue n'est pas définie sur $\mathcal{X}$ tout entier. Pour parer à ce défaut, on considère $\mathcal{F} = \pi_* m(K_\mathcal{X} + L)$: c'est un faisceau cohérent sur Δ (propreté de π). De plus, l'extension obtenue (au dessus d'un voisinage de 0 dans Δ) définit un élément non-nul de $\mathcal{F}/(\mathcal{I}_0\mathcal{F})$ où $\mathcal{I}_0$ désigne l'idéal maximal de 0 dans Δ. Ce dernier étant de Stein, on en déduit que $H^1(\Delta, \mathcal{I}_0\mathcal{F}) = 0$ et, de la suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_0\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/(\mathcal{I}_0\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

on déduit la surjectivité de :

$$\Gamma(\Delta, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}/(\mathcal{I}_0\mathcal{F})$$

On peut donc prolonger σ à $\mathcal{X}$ tout entier.

Références

[Laz04] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 48-49, Springer, 2004.

[LG86] P. Lelong and L. Gruman, *Entire functions of several complex variables*, Grunderlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 282, Springer, 1986.

[Siu02] Y.-T. Siu, *Extension of pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type*, Complex Geometry, 2002, pp. 223–277.

[Tak05] S. Takayama, *Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type*, preprint, 2005.