Groupe de Travail autour

de l'article de S. Takayama

Généralités sur les idéaux multiplicateurs

Benoît Claudon

Table des matières

Introduction **2**

1 Préliminaires **2**
- 1.1 Résolutions logarithmiques 2
- 1.2 Diviseur canonique relatif d'une résolution 3

2 Construction des idéaux multiplicateurs **3**
- 2.1 Construction algébro-géométrique 3
- 2.2 Procédé analytique 4

3 Propriétés des idéaux multiplicateurs **7**
- 3.1 Premières propriétés 7
- 3.2 Lien avec la multiplicité 7
- 3.3 Adjonction 8

Introduction

Dans tout l'exposé, les variétés seront supposées lisses. On rappelle qu'un diviseur $D = \sum_i a_i D_i$ (avec $a_i \in \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$) est dit à croisements normaux si, localement, le diviseur réduit $\overline{D} = \sum_i D_i$ est donné par l'équation : $z_1 \ldots z_k = 0$. Le théorème suivant (du à Y. Kawamata et E. Viewheg) généralise le théorème d'annulation de Kodaira : il fut d'abord établi pour un diviseur gros et *nef* mais il a été assez vite remarqué que l'on pouvait légèrement étendre sa validité :

Théorème 0.1 (Kawamata-Viewheg, 82) *Soit X une variété projective lisse, L un diviseur entier sur X et $D = \sum_i a_i D_i$ un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif à croisements normaux vérifiant de plus : $0 \leq a_i < 1$. Si $L - D$ est gros et nef, alors :*

$$\forall q \geq 1,\ H^q(X, K_X + L) = 0$$

(on rappelle qu'un $\mathbb{Q}$-diviseur est dit gros si sa dimension de Kodaira est maximale et qu'il est dit *nef* si son intersection avec toute courbe irréductible est positive). Au vu de ce résultat, on peut considérer que les idéaux multiplicateurs sont, en quelque sorte, un moyen de mesurer si un diviseur donné est loin ou non d'être à croisements normaux (ou plus simplement un moyen de mesurer les singularités de ce diviseur).

1 Préliminaires

Notations : Si $D = \sum_i a_i D_i$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur, on notera $[D] = \sum_i [a_i] D_i$ sa partie entière et $\{D\} = D - [D]$ sa partie fractionnaire (où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x).
On prendra bien garde au fait suivant : en général, les opérations $[\,]$ et $\{\}$ ne commutent pas avec les pull-backs; pour s'en convaincre il suffit de considérer l'exemple suivant : on prend $X = \mathbb{C}^2$, Y l'axe des abscisses et A la parabole d'équation $y = x^2$. Si P désigne l'origine de X et $D = \frac{1}{2}A$, on a d'une part $[D] = 0$ donc $[D]_{|Y} = 0$. D'autre part, P est un point double de $Y \cap A$ donc $A_{|Y} = 2P$ et $[D_{|Y}] = [\frac{1}{2} \cdot 2P] = P$. Sur cet exemple, on a donc : $[D_{|Y}] \neq [D]_{|Y}$.

Remarque 1.1 *Ceci tient essentiellement au fait que le diviseur $A + Y$ n'est justement pas à croisements normaux.*

1.1 Résolutions logarithmiques

Pour éviter les problèmes qui peuvent arriver dans une situation générale, on cherche à se ramener au cas de diviseurs à croisements normaux; dans toute la suite, la terminologie *morphisme birationnel* désignera une application holomorphe qui est de plus biméromorphe (ou en d'autres termes, une modification propre) :

Définition 1.1 (log-résolution) *Une résolution logarithmique (ou log-résolution) de (X, D) (où D est un $\mathbb{Q}$-diviseur sur X supposée lisse) est un morphisme birationnel $f : X' \longrightarrow X$ (avec X' lisse) vérifiant de plus : $f^*D + \mathrm{Ex}(f)$ est à croisements normaux.*

(Ex(f) désigne le lieu des points où f n'est pas birrégulière).
Il sera également utile de considérer le cas des séries linéaires :

Définition 1.2 (log-résolution, 2) *Soit L un diviseur entier sur X, $V \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(L))$ un sous-espace non nul et $|V|$ la série linéaire associée. Un log-résolution pour $(X, |V|)$ est un morphisme birationnel $f : X' \longrightarrow X$ (avec X' lisse) vérifiant de plus : $f^* |V| = |W| + F$ avec une partie fixe F telle que $F + \mathrm{Ex}(f)$ est à croisements normaux et $|W|$ sans point base.*

Donnons tout de suite un exemple : on considère $X = \mathbb{C}^2$ et $D = \{y^2 = x^3\}$ (D est le cusp à l'origine). Pour résoudre la singularité à l'origine, on procède par éclatements successifs : en fait il est facile de vérifier que 3 éclatements suffisent pour se ramener au cas d'un diviseur à croisements normaux. Ces 3 éclatements donnent naissance à 3 diviseurs exceptionnels (notés E_1, E_2 et E_3) et un calcul direct montre que, dans cette résolution, on a :

$$f^* D = 2E_1 + 3E_2 + 6E_3 + D' \quad \text{où } D' \text{ désigne la transformée stricte de } D.$$

En toute généralité, l'existence de telles résolutions est assurée par les théorèmes d'Hironaka (et de plus, on sait qu'on peut les obtenir en procédant par une suite d'éclatements de centre lisse).

1.2 Diviseur canonique relatif d'une résolution

Si $f : X' \longrightarrow X$ est une log-résolution (ou plus généralement un morphisme birationnel), on note $K_{X'|X} = K_{X'} - f^* K_X$; ce diviseur est appelé le diviseur canonique relatif de f. $K_{X'|X}$ est un diviseur effectif sur X' dont l'équation locale est donnée par l'annulation de $\det(df)$. La proposition suivante est immédiate :

Proposition 1.1 *On a l'égalité suivante : $f_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'|X}) = \mathcal{O}_X$. De plus, si N désigne un diviseur effectif sur X', $f_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'|X} - N)$ définit naturellement un faisceau d'idéaux sur X.*

Si on reprend l'exemple ci-dessus, on montre facilement (avec les mêmes notations) :

$$K_{X'|X} = E_1 + 2E_2 + 4E_3$$

2 Construction des idéaux multiplicateurs

Dans cette partie, on donne deux façons différentes de définir les idéaux multiplicateurs : l'une algébro-géomètrique, l'autre analytique. La deuxième a l'avantage d'être intrinsèque et de permettre un calcul direct (en particulier, elle évite tout recours aux log-résolutions) alors que la première a le mérite d'établir un lien clair entre idéaux multiplicateurs et théorèmes d'annulations.

2.1 Construction algébro-géométrique

Soit (X, D) une paire avec D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X.

Définition 2.1 (idéal multiplicateur) *Si $f : X' \longrightarrow X$ est une log-résolution de (X, D), on appelle faisceau d'idéaux multiplicateurs associé à D le faisceau d'idéaux suivant :*

$$\mathcal{I}(X, D) = \mathcal{I}(D) = f_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'|X} - [f^*D])$$

Pour les séries linéaires, la définition précédente devient :

Définition 2.2 (idéal multiplicateur, 2) *Soit $f : X' \longrightarrow X$ une log-résolution de $|V|$ ($f^*|V| = |W| + F$) et $c > 0$ un rationnel; on pose alors :*

$$\mathcal{I}(X, c \cdot |V|) = \mathcal{I}(c \cdot |V|) = f_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'|X} - [cF])$$

Remarque 2.1 *A priori, ces définitions dépendent des log-résolutions employées ; on verra cependant qu'il n'en est rien et la notion d'idéal multiplicateur est donc bien définie.*

Donnons quelques exemples :

(1) Si D est un diviseur entier et effectif, la formule de projection donne : $\mathcal{I}(D) = \mathcal{O}_X(-D)$. On rappelle ici la formule de projection : si $fX \longrightarrow Y$ est holomorphe , $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et E un fibré vectoriel sur Y alors $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*E) \simeq f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} E$.

(2) Si D est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif à croisements normaux, $\mathcal{I}(D) = \mathcal{O}_X(-[D])$.

(3) Si D est le cusp à l'origine dans $\mathbb{C}^2$, en utilisant les expressions de f^*D et de $K_{X'|X}$ données plus haut, un calcul direct donne :

$$\mathcal{I}(\frac{5}{6}D) = f_*\mathcal{O}_{X'}(-E_3) = \mathfrak{m}_0$$

Montrons maintenant le lien avec les théorèmes d'annulations. Pour cela on se donne L un diviseur entier sur X et D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif avec $L - D$ gros et nef (cett fois, on ne fait plus d'hypothèse sur les singularités de D). Si $f : X' \longrightarrow X$ est une log-résolution de D, $f^*(L - D)$ est encore gros et nef et sa partie fractionnaire est à croisements normaux donc on peut appliquer le théorème 0.1 :

$$\forall i \geq 1,\ H^i(X, K_X + f^*L - [f^*D]) = 0$$

Or, en appliquant la formule de projection, on constate que :

$$f_*\mathcal{O}_{X'}(K_{X'} + f^*L - [f^*D]) = \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{I}(D)$$

et on peut donc interpréter $\mathcal{I}(D)$ comme étant le terme correctif permettant d'obtenir l'annulation de la cohomologie pour $K_X + L$.

2.2 Procédé analytique

On va présenter ici l'idéal multiplicateur associé à une fonction plurisousharmonique (*psh* en abrégé). Pour les rappels sur les fonctions *psh*, on pourra consulter par exemple [Dem97].

Définition 2.3 (idéal multiplicateur, 3) *Si X est une variété complexe et φ une fonction psh sur X, on définit $\mathcal{I}(\varphi) \subset \mathcal{O}_X$ comme étant le faisceau des germes de fonctions holomorphes f telles que $fe^{-\varphi}$ soit L^2_{loc}.*

Si U est un "petit" ouvert de X (muni d'une carte) et $d\mu$ la mesure de Lebesgue sur U, on a donc :

$$\mathcal{I}(\varphi)(U) = \left\{ f \in \mathcal{O}_X(U) | \int_U |f|^2 e^{-2\varphi} d\mu < +\infty \right\}$$

Remarque 2.2 *On peut montrer que $\mathcal{I}(\varphi)$ est un faisceau analytique cohérent sur X (c'est en fait une conséquence de la noëthérianité forte, des estimations L^2 de Hörmander et du lemme du Krull) ; pour une démonstration de ce fait, on pourra consulter [DPTT94, prop. 5.7, p. 35].*

Pour les faisceaux $\mathcal{I}(\varphi)$, on a une formule de changement de variable (du type formule de projection) :

Proposition 2.1 *Soit $f : X' \longrightarrow X$ une modification propre entre variétés complexes et φ une fonction psh sur X ; on a alors :*

$$f_*(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ f)) = \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$$

Démonstration :
$\mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)$ est en fait le faisceau des germes de n-formes holomorphes ω qui vérifient : $\imath^{n^2} \int \omega \wedge \overline{\omega} e^{-2\varphi} < +\infty$ et de même pour X' (ici $n = \dim(X)$). De plus, on sait que f réalise un biholomorphisme entre $X' \backslash S'$ et $X \backslash S$ (où S' et S sont des sous-ensembles analytiques de X' et X respectivement et S de codimension au moins 2 dans X). Si U désigne un ouvert de X(avec par exemple $\overline{U}$ compact) et $U' = f^{-1}(U)$, un changement de variable donne :

$$\imath^{n^2} \int_U \omega \wedge \overline{\omega} e^{-2\varphi} = \imath^{n^2} \int_{U'} f^*\omega \wedge \overline{f^*\omega} e^{-2\varphi \circ f}$$

Si $\omega \in \mathcal{O}_X(K_X) \otimes \mathcal{I}(\varphi)(U)$, $f^*\omega$ définit donc un élément de $f_*(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ f))(U)$ par la formule ci-dessus. Réciproquement, si $\omega' \in f_*(\mathcal{O}_{X'}(K_{X'}) \otimes \mathcal{I}(\varphi \circ f))(U)$, alors $\omega = (f^{-1})^*\omega' = f_*\omega'$ est bien définie sur $U \backslash S$ mais comme S est de codimension au moins 2 dans X on peut prolonger ω à U tout entier et, avec la formule de changement de variable ci-dessus, ω vérifie bien la condition L^2 par rapport au poids φ.$\square$

Il nous reste maintenant à comparer les deux procédés : pour cela, on va tout d'abord attacher une (famille de) fonction *psh* à un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif donné. Soit donc $D = \sum_i a_i D_i$ avec $a_i \in \mathbb{Q}_*^+$ et U un ouvert de X sur lequel chaque D_i est engendré par une équation notée g_i (avec $g_i \in \mathcal{O}_X(U)$) ; on pose alors :

$$\varphi_D^U = \sum_i a_i \log |g_i|$$

et $e^{2\varphi_D^U}$ n'est autre que le carré du module de l'équation locale définissant D. Comme les a_i sont positifs, φ_D^U est bien *psh* et on peut donc considérer le faisceau $\mathcal{I}(\varphi_D^U)$ sur U. On vérifie facilement que ce faisceau ne dépend pas du choix des générateurs g_i ; en particulier les faisceaux $\mathcal{I}(\varphi_D^U)$ se recollent pour définir un faisceau d'idéaux sur X que l'on note $\mathcal{I}(\varphi_D)$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Les constructions analytiques et algébriques coincident :*

$$\mathcal{I}(\varphi_D) = \mathcal{I}(D)$$

en particulier le calcul de $\mathcal{I}(D)$ ne dépend pas de la log-résolution employée.

On va utiliser le lemme élémentaire suivant :

Lemme 2.1 *Si D est à croisement normaux,* $\mathcal{I}(\varphi_D) = \mathcal{O}_X(-[D])$.

Démonstration :
On choisit des coordonnées adaptées à D ; soit f holomorphe sur un voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}^n$. L'appartenance de f à $\mathcal{I}(\varphi_D)$ s'écrit donc :

$$\int_V \frac{|f(z)|^2}{|z_1|^{2a_1} \dots |z_k|^{2a_k}} d\mu < +\infty$$

En développant en série entière et en utilisant l'égalité de Parseval, on se ramène au cas où f est un monôme : $f(z) = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$. On peut alors séparer les variables et on se ramène à étudier l'intégrale en une variable suivante :

$$\int_{V'} |z|^{2(\alpha - a)}\, d\lambda$$

(où V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ et $d\lambda$ la mesure sur $\mathbb{C}$). Cette intégrale converge si et seulement si $\alpha - a > -1$, ce qui s'écrit encore $\alpha \geq [a]$; cela signifie exactement : $f \in \mathcal{O}_X(-[D])$.$\square$

Démonstration du théorème 2.1 :
Soit $f : X' \longrightarrow X$ une log-résolution de D. Comme f^*D est à croisements normaux on peut appliquer le lemme précédent et on a alors :

$$\mathcal{I}(\varphi_D \circ f) = \mathcal{I}(\varphi_{f^*D}) = \mathcal{O}_{X'}(-[f^*D])$$

d'où :

$$\mathcal{O}_{X'}(K_{X'|X} - [f^*D]) = \mathcal{O}_{X'}(K_{X'|X}) \otimes \mathcal{I}(\varphi_D \circ f)$$

en utilisant la formule de changement de variable 2.1, on obtient directement l'égalité souhaitée :

$$\mathcal{I}(\varphi_D) = \mathcal{I}(D)$$

$\square$

La définition analytique est parfois assez commode pour faire des calculs explicites ; à titre d'exemple, examinons le cas du cusp à l'origine (*i.e.* $D = (5/6) \cdot \{y^2 - x^3 = 0\}$). On doit donc étudier des intégrales du type :

$$\int_V \frac{|f(x,y)|^2}{|y^2 - x^3|^{5/3}} d\mu$$

(avec V un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$). Or, on montre facilement les estimations suivantes :

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{d\lambda(y)}{|y^2 - x^3|^{5/3}} \sim \frac{C}{|x|^2} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{D}} \frac{d\lambda(x)}{|y^2 - x^3|^{5/3}} \sim \frac{C'}{|y|^2}$$

(où $\mathbb{D}$ désigne le disque unité de $\mathbb{C}$ et C et C' sont des constantes strictement positives). Ces estimations nous donnent directement les faits suivants : $1 \notin \mathcal{I}(D)$ alors que $x, y \in \mathcal{I}(D)$. On retrouve donc bien :

$$\mathcal{I}(D) = \mathfrak{m}_0$$

3 Propriétés des idéaux multiplicateurs

3.1 Premières propriétés

Les deux propositions suivantes sont immédiates et constituent un premier pas dans le calcul des idéaux multiplicateurs :

Proposition 3.1 *Si A est un diviseur entier et D un $\mathbb{Q}$-diviseur, avec A et D effectifs, alors :*

$$\mathcal{I}(D+A) = \mathcal{I}(D) \otimes \mathcal{O}_X(-A)$$

en particulier :

$$\mathcal{I}(D) = \mathcal{O}_X(-[D]) \otimes \mathcal{I}(\{D\})$$

Proposition 3.2 (lien avec les séries linéaires) *Soient $|V|$ une série linéaire et c un rationnel strictement positif. Si $k > c$ est un entier et $A_1, \ldots, A_k$ des membres généraux de $|V|$, en posant $D = \frac{1}{k}(A_1 + \cdots + A_k)$, on a :*

$$\mathcal{I}(cD) = \mathcal{I}(c \cdot |V|)$$

Ceci tient essentiellement au lemme suivant (qui résulte aisément du lemme de Bertini) :

Lemme 3.1 *Soient $|V|$ est une série linéaire sans point-base et E est un diviseur à croisements normaux; si A est un membre général de $|V|$, alors $A + E$ est encore à croisements normaux.*

(on pourra se reporter à [Laz04, lemme 9.1.9., p. 143]).
Démonstration :
Le lemme précédent montre que si $f : X' \longrightarrow X$ est une log-résolution pour $|V|$, f est alors également une log-résolution pour D. Si on a $f^* |V| = |W| + F$, on alors $f^* A_i = A'_i + F$ d'où $f^*(cD) = \frac{c}{k}(A'_1 + \cdots + A'_k) + cF$. Comme $k > c$, on en déduit que $[f^*(cD)] = [cF]$ et finalement :

$$\mathcal{I}(cD) = f_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'|X} - [f^*(cD)]) = f_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'|X} - [cF]) = \mathcal{I}(c \cdot |V|)$$

□

3.2 Lien avec la multiplicité

Les faisceaux d'idéaux multiplicateurs sont censés reflétés à quel point un diviseur est loin ou non d'être à croisements normaux; la proposition suivante confirme cette idée : si la multiplicité en un point est assez grande, l'idéal multiplicateur en ce point doit être non trivial.

Définition 3.1 *Si $D = \sum_i a_i D_i$ et $x \in X$, la multiplicité de D en x est simplement :* $\mathrm{mult}_x D = \sum_i a_i \mathrm{mult}_x D_i$.

Proposition 3.3 *Soit $\dim(X) = n$ et D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X :*

(i) *si $\mathrm{mult}_x D \geq n$, alors $\mathcal{I}(D)_x \subset \mathfrak{m}_x$ (en particulier $\mathcal{I}(D)_x$ est non trivial)*

(ii) *plus généralement, si $\mathrm{mult}_x D \geq n + p - 1$, alors $\mathcal{I}(D)_x \subset \mathfrak{m}_x^p$*

Démonstration :
On choisit une log-résolution $f : X' \longrightarrow X$ de D dans laquelle on a commencé par éclater le point x ; le diviseur exceptionnel de cet éclatement détermine un diviseur E sur X' qui vérifie : $\mathrm{Ord}_E(K_{X'|X}) = n-1$ et $\mathrm{Ord}_E(f^*D) = \mathrm{mult}_x D$. Si $\mathrm{mult}_x D \geq n+p-1$, on a donc :

$$\mathrm{Ord}_E(K_{X'|X} - f^*D) \leq n-1-(n+p-1) = -p$$

d'où : $\mathcal{I}(D) \subset f_*\mathcal{O}_{X'}(-pE)$ ce qui signifie exactement $\mathcal{I}(D)_x \subset \mathfrak{m}_x^p$.$\square$

Remarque 3.1 *on peut montrer que si* $\mathrm{mult}_x D < 1$, *l'idéal* $\mathcal{I}(D)_x$ *est nécessairement trivial. Cependant, dans la situation intermédiaire (*$1 \leq \mathrm{mult}_x D < n$*), on ne peut pas conclure (on peut même produire des exemples où la multiplicité est aussi proche de 1 que l'on veut alors que* $\mathcal{I}(D)_x \subsetneq \mathcal{O}_{X,x}$*).*

3.3 Adjonction

Pour finir, on souhaite étudier le comportement des idéaux multiplicateurs lors d'une restriction à une hypersurface ; soit alors D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X et H une hypersurface lisse de X non contenue dans le support de D. De cette façon, on peut considérer D_H la restriction de D à H.

Théorème 3.1 *dans la situation décrite ci-dessus, il existe un faisceau d'idéaux (appelé faisceau adjoint) noté* $\mathrm{Adj}(X, H; D)$ *avec*

$$\mathrm{Adj}(X, H; D) \subset \mathcal{I}(X, D) \subset \mathcal{O}_X$$

qui fournit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(X, D) \otimes \mathcal{O}_X(-H) \longrightarrow \mathrm{Adj}(X, H; D) \longrightarrow \mathcal{I}(H, D_H) \longrightarrow 0$$

En particulier : $\mathcal{I}(H, D_H) \subset \mathcal{I}(X, D)_{|H}$

Pour la démonstration, on se reportera à [Laz04, th. 9.5.1, p. 195].

Remarque 3.2 *Dans la mesure où les faisceaux d'idéaux multiplicateurs mesurent les singularités d'un diviseur, le théorème 3.1 reflète l'idée générale selon laquelle "les singularités augmentent lorsqu'on se restreint à une hypersurface".*

Pour obtenir un exemple où l'inclusion est stricte, il suffit de reprendre l'exemple du début de la partie 1 : si $D = \frac{1}{2}\left\{y = x^2\right\}$ dans $X = \mathbb{C}^2$ et H l'axe des abscisses, on a $\mathcal{I}(X, D) = \mathcal{O}_X$; or, $D_H = \{0\}$ donc $\mathcal{I}(H, D_H)$ est l'idéal de l'origine dans H.

Références

[Dem97] J.P. Demailly, *Complex analytic and differential geometry*, http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly/books.html, 1997.

[DPTT94] J.P. Demailly, T. Peternell, G. Tian, and A.N. Tyurin, *Tanscendental methods in algebraic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1646, Springer, 1994.

[Laz04] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 48-49, Springer, 2004.