

métriq lisse
 φ à courbure > 0

Le fibré $K_{\tilde{Y}}$ muni de la métrique singulière $h_{\tilde{Y}} e^{-\varphi_m}$
 est à courbure $i \Theta(K_{\tilde{Y}}, h_{\tilde{Y}} e^{-\varphi}) = i \Theta(K_{\tilde{Y}}, h_{\tilde{Y}}) + i \partial \bar{\partial} \varphi_m$
 $\geq i \Theta(K_Y, h_Y) - \frac{1}{m} \tilde{\omega}$

Donc si $m \gg 1$, c'est une quantité > 0 partout.

On peut résoudre si $\int_{\tilde{Y}} |\tau|^2 e^{-\varphi} < +\infty$ mais $\tau \equiv 0$ au voisinage de Z donc \tilde{Y} la convergence est automatique

On sait (Hörmander) qu'il existe une solut s à $(*)$
 avec $\int_{\tilde{Y}} |s|^2 e^{-\varphi_m} \leq C \cdot \int_{\tilde{Y}} |\tau|^2 e^{-\varphi_m} < +\infty$.

Or, $\varphi_m \leq A_m \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{\tilde{Y}} |s|^2 \leq e^{A_m} \cdot C \cdot \int_{\tilde{Y}} |\tau|^2 e^{-\varphi_m} < +\infty$

Enfin, on pose $f = \rho^{-1} s \Rightarrow f \in \mathcal{O}$ par construction et $f \in L^2$
 il faut vérifier que $f \neq 0$ mais comme $\bar{\partial} \rho \equiv 0$
 au voisinage de Z , on en déduit que s est holomorphe
 au ras de Z et $\int_{\tilde{Y}} |s|^2 e^{-\varphi_m} < +\infty \Rightarrow s|_Z \equiv 0$ Donc $f|_Z \equiv 1$ \square

Comment adapter la démonstration dans le cas sg et surtout comment utiliser l'hypothèse sur π_1 $< +\infty$.

On fixe (Y, D) \mathbb{Q} -Fano et on considère une log-résolⁿ.
 $\pi: (X, \tilde{D}) \rightarrow (Y, D)$

$\tilde{D} = \sum_j \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) \tilde{E}_j$. on note \tilde{D} transf stricte

Si \tilde{E}_j est une composante du lien except de $\pi^{-1}(E)$, un lacet méridien ~~de~~ autour de \tilde{E}_j est contenu dans

$X \setminus (\tilde{D} \cup E) \cong Y_{reg} \setminus D$

donc si on choisit un petit lacet, on peut considérer son image ds $\pi_1^{loc}(Y_{reg}, D, y)$ pour un certain $y \in Y \Rightarrow$ d'ordre fini

Conclusion: si on choisit les m_j des entiers suff. divisibles.

alors la paire $(X, \Delta = \tilde{D} + \sum_j (1 - \frac{1}{m_j}) E_j)$ vérifie

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \pi_1(X, \Delta) \simeq \pi_1(Y, D) \\ \cdot -(K_X + \Delta) \text{ est "presque ample"} \end{array} \right\}$$

et il faut alors suivre la m[^] démarche sur l'algebroid (X, Δ) .
et utiliser: $-\pi^*(K_Y + D) + ?$ à la place de K_Y .

L'induction globale \rightarrow locale: structure des sg klt.

Les sing. klt sont en qq sorte des cônes:

Th (Xu, 2015 / Fujino²⁰²²): Soit (X, x) une singularité

klt [X = variété alg par Xu, X = espace C par Fujino] alors

$\exists \mu: Y \rightarrow X$ une application birationnelle / bimerisomorphe

tg. $E = \text{Exc}(\mu)$ est un diviseur irréductible tg.

$\cdot (Y, E + \pi_X^{-1} \Delta)$ des sing contrôlés (en part. E normale)

$\cdot -(K_Y + E + \pi_X^{-1} \Delta)$ est μ -ample.

\rightarrow Démonstrat^o compliquée ... s'appuie sur l'existence d'un MMP
relatif (BCHM 2008 / Fujino²⁰²²) \Rightarrow

(On va donner un exemple plus tard dans un cas simple)

Pour faire émerger la structure Fano, on restreint à E:

Prop (ad. formule d'adjonction généralisée):

Soit $(Y, E, \tilde{\Delta})$ une paire avec Y et E normale et à singularités
contrôlés. Alors, $\exists \text{Diff}_E(\tilde{\Delta})$ un \mathbb{Q} -diviseur sur E
à coefficients standard (si $\tilde{\Delta}$ est aussi à coeff st.) tg.

• $(E, \text{Diff}_E(\tilde{\Delta}))$ est klt.

$$\left[K_E \simeq (K_Y + E + \tilde{\Delta})|_E \right]_{\mathbb{Q}} \simeq K_E + \text{Diff}_E(\tilde{\Delta}).$$

Rq: • dans le cas où $(Y, E + \tilde{\Delta})$ est l'extract^o d'une composante de Kollár comme ds le th de Xu, on en déduit

que $-(K_E + \text{Diff}_E(\tilde{\Delta}))|_{\mathbb{Q}} \simeq -(K_Y + E + \tilde{\Delta})|_E$ est ample

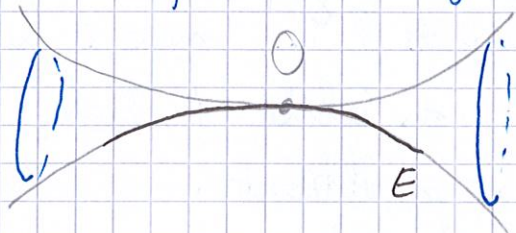
$$(\tilde{\Delta} = \pi_*^{-1}(\Delta))$$

\Rightarrow on a donc une paire $(E, \text{Diff}_E(\tilde{\Delta}))$ \mathbb{Q} -Fano.

• Même si $\tilde{\Delta} = 0$, en général $\text{Diff}_E(0) \neq 0$ car les sing. perturbent "l'adjonction" classique $K_E = (K_Y + E)|_E$.

Exemple des sing. A_m $X = (xy = z^m) \subset \mathbb{C}_{xy,z}^3$ ($m \geq 2$).

On considère la courbe $(y = z = 0) = E \simeq \mathbb{C}$ qui n'est pas Cartier ds X mais en revanche $mE = (y=0)$ Cartier!
 Pour comprendre l'adjonction, il faut trouver un générateur de K_X .



Pour cela, on utilise l'interprétation de X comme quotient:

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{u,v}^2 / \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & (u^m, v^m, uv) \end{array} \right]$$

[Kollár note $\mathbb{C}^2 / \frac{1}{m}(1, -1)$
 ou $\mathbb{C}^2 / \frac{1}{m}(1, m-1)$].

avec action $\xi \cdot (u, v) \mapsto (\xi u, \xi^{-1} v)$

On note $p: \mathbb{C}^2 \longrightarrow X \simeq \mathbb{C}^2 / \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et on a:

$$p^*(dx \wedge dz) = d(u^m) \wedge d(uv) = m u^{m-1} du \wedge (u dv + v du) = m u^m du \wedge dv$$

$$\Rightarrow m \cdot du \wedge dv = p^* \left(\frac{dx \wedge dz}{x} \right) \Rightarrow K_X = \mathcal{O}_X \cdot \frac{dx \wedge dz}{x}$$

On a alors $m(K_X + E) = mK_X + mE$ ~~forme m-annul~~

~~est~~ multiples de $\left(\frac{dx \wedge dz}{z}\right)^{\otimes m}$ qui ont des pôles le long de $(y=0)$.

$$\text{D'au } m(K_X + E) \sim \mathcal{O}_X \cdot \frac{(dx \wedge dz)^{\otimes m}}{x^m y} \sim \mathcal{O}_X \cdot \left(\frac{(dx \wedge dz)^{\otimes m}}{x^{m-1} x y} \right)$$

$$\sim \mathcal{O}_X \left(\frac{(dx \wedge dz)^{\otimes m}}{x^{m-1} z^m} \right) \sim \mathcal{O}_X \left(\frac{(dx \wedge dz)^{\otimes m}}{x^{1-\frac{1}{m}} z} \right)$$

et donc en prenant le résidu de la forme \nearrow le long de E on trouve $\frac{dx}{z^{1-\frac{1}{m}}}$ et finalement:

$$(K_X + E)|_E \sim K_E + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \{0\}. \quad \text{ie } \text{Diff}_E(0) \neq 0!$$

Extraction d'une composante de Kollar dans le cas A_m :

Pour résoudre $(xy = z^m)$ on peut utiliser la présentation comme quotient $\mathbb{C}^2 / (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et éclater l'origine de \mathbb{C}^2 ... mais il faut le faire de façon un peu subtile: on éclate l'idéal $I = (u^{m-1}, v)$ dans $\mathbb{C}_{u,v}^2$ et on obtient:

$$(\{su^{m-1} = tv\}) = \text{Bl}_I(\mathbb{C}^2) \subset \mathbb{C}_{u,v}^2 \times \mathbb{P}^1_{[s:t]}$$

Comme on a $\left(\frac{s}{t}\right) = \frac{u^{m-1}}{v}$, on constate que l'action ~~est~~ incluse est triviale! On examine les cartes

* Carte $t \neq 0$: on a $\left(\frac{s}{t}\right) u^{m-1} = v$ et en posant $w = \frac{s}{t}$ on a une surface lisse 2 coordonnées u et w et action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ seulement sur $\vec{u} \Rightarrow$ le quotient est lisse.

* Carte $s \neq 0$: cette fois c'est $w = \frac{t}{s}$ et on a $u^{m-1} = v w$ et il faut encore quotienter par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

À nouveau, on écrit $(vw = u^{m-1}) = \mathbb{C}_{a,b}^2 / \frac{1}{m-1} (1, -1)$

avec $\begin{cases} u = ab \\ v = a^{m-1} \\ w = b^{m-1} \end{cases}$

Il faut relever l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à $\mathbb{C}_{a,b}^2 \Rightarrow$ on met les poids 1 sur a et 0 sur b . et c'est compatible avec

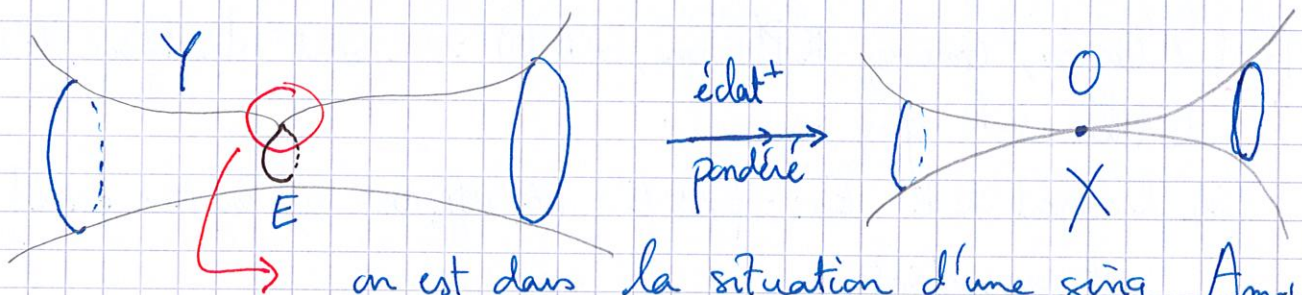
la project^o $\mathbb{C}_{a,b}^2 \xrightarrow{\text{poids } 1,0} (vw = u^{m-1}) \subset \mathbb{C}_{u,v,w}^3 \xrightarrow{1,-1,0}$

De plus l'action de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}_{a,b}^2$ et celle de $\mathbb{Z}/(m-1)\mathbb{Z}$ commutent car elles se font par mult par des matrices diagonales.

Conclusion:

$$\begin{aligned} * (vw = u^{m-1}) / \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\simeq \left(\mathbb{C}_{a,b}^2 / \mathbb{Z}/(m-1)\mathbb{Z} \right) / \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ &\simeq \left(\mathbb{C}_{a,b}^2 / \frac{1}{m-1} (1, -1) \right) / \frac{1}{m} (1, 0) \simeq \left(\mathbb{C}^2 / \frac{1}{m} (1, 0) \right) / \frac{1}{m-1} (1, -1) \\ &\simeq \mathbb{C}^2 / \frac{1}{m-1} (1, -1) \simeq (xy = z^{m-1}) \subset \mathbb{C}^3! \end{aligned}$$

On a amélioré la situation puisque la mult a ↓ de 1 :



on est dans la situation d'une sing. A_{m-1} avec la courbe except = "directrice"

Cela fournit une extraction de Kollar avec $E \simeq \mathbb{P}^1$

et $\text{Diff}_E(0) = \left(1 - \frac{1}{m-1}\right) \cdot \{0\}$

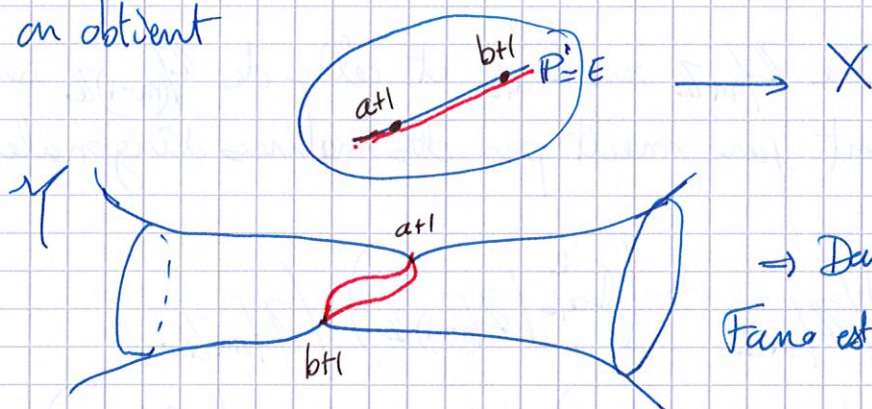
ie $\left(\mathbb{P}^1, \left(1 - \frac{1}{m-1}\right) \{0\}\right)$ est la paire de Fano ss-jacent.

Rq: Il n'y a pas unicité de l'extraction de la composante de Kollar : on peut facilement s'en convaincre



$$\begin{array}{c} \text{résol}^{\circ} \\ \xrightarrow{\text{minimale}} \end{array} X = (xy = z^m) \subset \mathbb{C}^3$$

chaîne de courbe rat. ($m-1$ courbes composante). On en fixe une et on contracte le reste (2 chaînes de long. a et b). on obtient



\Rightarrow Dans ce cas, la paire de Fano est $(\mathbb{P}^2, \{(1-\frac{1}{a+1})\omega\} + \{(1-\frac{1}{b+1})\omega\})$

Esquisse de démonstration du th B (cas $\Delta = 0$):

On fixe $(Y \xrightarrow{E} X, \pi)$ ~~est~~ l'extraction d'une composante de Kollar

Il faut étudier la topologie :

Th (A'Campo / Goresky-McPherson, ≈ 1980) : on peut stratifier $E \subset Y$ de telle sorte que :

- (i) l'ouvert de E $E_0 := \{x \in E \mid (E, \text{Diff}_E(0)) \text{ est log lisse en } x\}$ est une strate.
- (ii) Pour $\varepsilon \ll 1$, il existe $\psi: U(\varepsilon) \rightarrow E$ "rétraction" C^0 ($\psi|_E: E \rightarrow E$ est seulement homotope à Id_E).
- (iii) Pour toute strate $A \subset E$, $\forall \varepsilon$ on a une structure de "fibration" : $\rho_A: \psi^{-1}(A) \rightarrow \mathbb{D}_\varepsilon$ (petit disq) avec ρ_A loc. top. trivial au-dessus de \mathbb{D}^* et $\rho_A^{-1}(0) = \psi^{-1}(A) \cap E$

On considère alors : $V^\circ := \psi^{-1}(E_0) \setminus E$.

Fait: si $\varepsilon \ll 1$, on a alors $V^\circ \subset U(\varepsilon)_{\text{reg}} \setminus E$
[et $U(\varepsilon)_{\text{reg}} \setminus E \xrightarrow{\sim} X_{\text{reg}}$ si (X, x) est un germe].

On a alors :

Lemme (Tim - Xu) : la projection $\psi: V^\circ \rightarrow E_0^\bullet$ est un
[fibré orbifold²⁰¹⁷ au dessus $(E_0, \text{Diff}_E(0)|_{E_0})$, fibre = \mathbb{D}^* .

On a donc :

$$\pi_1(\mathbb{D}^*) \xrightarrow{\cong \mathbb{Z}} \pi_1(V^\circ) \rightarrow \pi_1(E_0, \text{Diff}_E(0)|_{E_0}) \rightarrow 1$$

$\pi_1(E, \text{Diff}_E(0)) < \text{fini!}$

et on montre facilement que l'image de $\pi_1(\mathbb{D}^*) \rightarrow \pi_1(V^\circ)$
est fini (Mumford).

Finalement, on a : $\pi_1(V^\circ) < +\infty$.

Pour conclure, il faut étudier le morphisme induit par
l'inclusion : $\pi_1(V^\circ) \xrightarrow{i_*} \pi_1(U(\varepsilon)_{\text{reg}} \setminus E) \simeq \pi_1^{\text{loc}}(X, x)$

En utilisant le Cela revient à ajouter les $\psi^{-1}(A)$ par AC₀
strate de codimension ≥ 1 (ds ε). Il faut appliquer Van Kampen
avec soin et utiliser les "fibrations" ρ_A pour finalement

$$\pi_1(V^\circ) \xrightarrow{\cong} \pi_1^{\text{loc}}(X, x)$$

et $\pi_1^{\text{loc}}(X, x)$ est donc fini.