Ajouter cas de la dimension 2.

Soit maintenant $G < GL_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini et considérons $X = \mathbb{C}^n/G$.

On remarque que la projection $\pi_G : \mathbb{C}^n \longrightarrow X$ ramifie le long des hyperplans fixés par un élt ($\neq 1$) de G.

$\Rightarrow$ correspond à une réflexion $g \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$ ($n-1$) α racine m-ème de 1.

Si H est un tel hyperplan, on pose $B = \pi_G(H)$ $\Rightarrow$ div. de branchement et on affecte à B la multiplicité : $1 - \frac{1}{m_B}$

(c'est l'ordre de ramification de $\pi_{G|H} : H \longrightarrow B$ et ça ne dép. pas de H)

Formule de Hurwicz: $K_{\mathbb{C}^n} \sim \pi_G^*(K_X + \Delta_G)$

avec $\Delta_G = \sum_{B \subset X} \left(1 - \frac{1}{m_B}\right) B$.

$\Rightarrow$ La paire (X, Δ_G) est donc klt ! $\Rightarrow$ oui mais X tout seul ?!

Th (Chevalley, 1955) : On considère $G_r \triangleleft G$ le sous-groupe engendré par les réflexions. Le quotient $Y = \mathbb{C}^n/G_r$ est alors lisse et $\simeq \mathbb{C}^n$. De plus, $Y \xrightarrow{p} X$ est quasi-étale

Conclusion: comme $K_Y \sim p^*(K_X)$, on peut encore appliquer la prop. précédente et on en déduit que X est klt.

De plus : $p : Y \setminus p^{-1}(X_{sing}) \longrightarrow X_{reg}$ est étale

et $\operatorname{codim}_Y(p^{-1}(X_{sing})) = \operatorname{codim}_X(X_{sing}) \geq 2$

on a donc $\pi_1(Y \setminus p^{-1}(X_{sing})) = \pi_1(Y) = 1$. car $Y \simeq \mathbb{C}^n$.

Donc $\pi_1(X_{reg}) = \operatorname{Gal}(Y \setminus p^{-1}(X_{sing}) / X_{reg}) = \operatorname{Gal}(Y/X)$

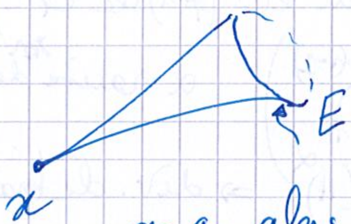
$= G/G_r$.

Remarque importante : pour retrouver G tout entier, il faut considérer $G \simeq \pi_1(X_{reg} \setminus |\Delta_G|) / \langle\langle \gamma_B^{m_B} \rangle\rangle$

avec γ_B lacet méridiens autour de la composante B.

__Exemple 2 : cônes.__ on considère $E \subset Y$ une hypersurface lisse compacte dans Y et on suppose que $N_{E|Y} < 0$.

On sait (par Grauert) que $\mu \left\{ \begin{array}{l} Y \longrightarrow X. \\ E \longmapsto x \end{array} \right.$ + iso hors de E



Faisons l'hypothèse K_X $\mathbb{Q}$-Cartier (pas automatique du tout !)

on a alors $K_Y \sim \mu^*(K_X) + aE$

et finalement $K_Y + E \sim \mu^*(K_X) + (a+1)E$. On restreint à E : $K_E \sim (a+1) N_{E|Y}$. On constate donc :

(X,x) ~~et~~ klt $\Longrightarrow$ E Fano, à savoir $K_E < 0$.

__Ainsi :__ le cône sur une courbe elliptique $E \subset \mathbb{P}^2$ ne sera __jamais__ klt.

__Les énoncés de Lukas Braun :__

A partir de maintenant, on considère (X,Δ) ~~klt au voisinage~~ paire. $\Delta = \sum\left(1-\frac{1}{m_i}\right)\Delta_i$

- Groupe fondamental de la paire :

$$\pi_1(X,\Delta) := \pi_1(X_{reg} \setminus |\Delta|) / \langle\langle \gamma_i^{m_i}, i \in I \rangle\rangle .$$

- __Versions locales :__ $x \in X$ et on suppose $X \subset \mathbb{C}^N$, $x \mapsto 0$

pour $\varepsilon \ll 1$, on considère $X^\varepsilon = X \cap B(0;\varepsilon)$. (petit voisinage de x)

On pose $\left\{ \begin{array}{l} \bullet\ \pi_1^{loc}(X,x) = \pi_1(X^\varepsilon_{reg}) \quad \text{(pour } \varepsilon \ll 1 \text{, ça ne dépend pas de } \varepsilon \Rightarrow \text{isotopie de Thom)} \\ \bullet\ \pi_1^{loc}(X,\Delta,x) = \cancel{\pi_1(X^\varepsilon_{reg} \setminus |\Delta_{|X^\varepsilon}|) / \langle\langle \gamma_i^{m_i}} \\ \qquad = \pi_1(X^\varepsilon, \Delta_{|X^\varepsilon}) \end{array} \right.$

- __Paires log-Fano__ (Y projective) : (Y,D) est dite log-Fano si (Y,D) est __klt__ et si $K_Y + D < 0$.

On fixe $n \geq 1$ un entier

Th A (locale globale) : on suppose que pour toute ~~sing~~ paire (X, Δ) klt avec $\dim X = n$, $\pi_1^{loc}(X, \Delta, x) < +\infty$ $(\forall x \in X)$.
Alors pour toute paire ~~log~~-Fano (Y, D) avec $\dim Y = n$, on a $\pi_1(Y, D) < +\infty$.

Th B (globale-locale) : on suppose que pour toute paire log Fano (Y, D) avec $\dim Y = n-1$, $\pi_1(Y, D) < +\infty$
Alors, $\pi_1^{loc}(X, \Delta, x) < +\infty$ $\forall (X, \Delta)$ klt $(\forall x \in X)$ avec $\dim X = n$

On constate qu'en combinant A et B, on obtient la finitude de $\begin{cases} \pi_1^{loc}(X, \Delta, x) \text{ pour tout } (X, \Delta) \text{ klt} \\ \pi_1(Y, D) \text{ —— } (Y, D)\ \mathbb{Q}\text{-Fano}. \end{cases}$

L'induction local $\to$ global : π_1 des variétés de Fano.
Pour comprendre la stratégie, on va se placer dans le cas lisse pour simplifier : Y = lisse et $D = 0$.
Classification en petite dimension : $(K_Y < 0)$.

- en dim 1 $\to$ $Y = \mathbb{P}^1$.
- en dim 2 $\to$ $\begin{cases} Y = Bl_A(\mathbb{P}^2) \text{ avec } A \subset \mathbb{P}^2 \ |A| \leq 8. \text{ et } A \text{ "général"} \\ \text{ou } Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \end{cases}$
- en dim n, 1 nbre fini de famille de déformations
  $\hookrightarrow$ ~~ex.~~ quand $n = 3$, $\#$famille $= 105$.

Th (Kobayashi ?) : Si Y est une variété de Fano, alors $\pi_1(Y) = (1)$

Rq : il suffit de montrer que $\pi_1(Y) < +\infty$ (c'est ce qui nous intéresse dans le cas singulier) ; en effet : si $\tilde{Y} \to Y$ est le revêt^t universel de Y alors $\tilde{Y}$ est encore Fano.

De plus, en écrivant $h^i(Y, \mathcal{O}_Y) = h^i(Y, K_Y \otimes \underbrace{(K_Y^{-1})})$
on obtient $h^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ pour $i > 0$ ample (Kodaira).

D'où : $$1 = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = \deg(\tilde{Y}/Y) \cdot \underbrace{\chi(\mathcal{O}_Y)}_{=1} = \deg(\tilde{Y}/Y)$$
et finalement $\tilde{Y} \simeq Y$!

* Démonstration métrique : ~~$c_1(K_Y)$~~ Si ω est une métrique kählerienne sur Y, alors $\mathrm{Ricci}(\omega)$ est une forme fermée et $\{\mathrm{Ricci}(\omega)\} = -c_1(K_Y) \in H^2(Y, \mathbb{R})$.
et réciproquement (Yau, 1978) : toute (1,1) forme réelle α dans la classe $-c_1(K_Y)$ s'écrit $\mathrm{Ricci}(\omega')$ pour une métriq kähl.
L'hypothèse $K_Y < 0$ revient à dire : $\exists\, \omega_0$ métrique kähle dans la classe $c_1(K_Y^{-1}) = -c_1(K_Y)$.
D'où $\exists\, \omega_1$ métriq kählerienne tq $\mathrm{Ricci}(\omega_1) = \omega_0$
et donc $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\mathrm{Ricci}(\omega_1) \geq \varepsilon \omega_1$.
On peut appliquer Bonnet-Myers $\Rightarrow$ $\pi_1(Y) < +\infty$.

Pb : dans le cas singulier, on a éventuellt bien des métriques singulières [Eyssidieux - Guedj - Zeriahi et ts les autres travaux ...] qui sont des vrais métriques sur Y_{reg} mais elles ne sont pas complètes ... on ne peut rien en faire pour l'étude du π_1.

* Techniques L^2 : Par l'absurde, on suppose que $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ est ∞ ($\tilde{Y}$ non-compact, de volume ∞ par rapport à une métrique périodique).
On va s'intéresser aux espaces suivants : $H^0_{(2)}(\tilde{Y}, \tilde{L})$ si L est un fibré en droites sur Y, $\tilde{L} = p^* L$

et $H^0_{(2)}(\widetilde{Y},\widetilde{L}) = \{ s \in H^0(\widetilde{Y},\widetilde{L}) \mid \int_{\widetilde{Y}} |s|^2_{\widetilde{h}} \, dV_{\widetilde{\omega}} < +\infty \}$

avec h métrique sur L et ω métrique sur Y. Par compacité de Y, ça ne dépend pas de (ω, h).

On va montrer :

Proposition : si Y est de Fano et si $\pi_1(Y) = +\infty$ alors $H^0_{(2)}(\widetilde{Y}, \mathcal{O}_{\widetilde{Y}}) \neq 0$

C'est la contradiction cherchée ; en effet, ~~k~~ si $f \in \mathcal{O} \cap L^2(\widetilde{Y})$.
$\lim_{\infty} f = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists$ ~~K~~ $\mathbb{B}(y_0,R) \subset \widetilde{Y}$ compact tq $\int_{\widetilde{Y} \setminus \mathbb{B}(y_0,R)} |f|^2 < \varepsilon$

Soit $y \in \widetilde{Y} \setminus \mathbb{B}(y_0, R+1)$ alors $\begin{cases} \mathbb{B}(y, 1) \subset \widetilde{Y} \setminus \mathbb{B}(y_0,R) \\ \mathbb{B}(y,1) \subset \text{ouvert de coord.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad |f(y)|^2 \leq \frac{1}{|\mathbb{B}(y,1)|} \int_{\mathbb{B}(y,1)} |f|^2 \, dV_{\widetilde{\omega}} \leq \frac{1}{|\mathbb{B}(y,1)|} \cdot \int_{\widetilde{Y} \setminus \mathbb{B}(y_0,R)} |f|^2 \, dV_{\widetilde{\omega}} \leq C.\varepsilon$$

C ne dépend que de (Y, ω)

Par principe du max, f est constante et donc $f \equiv 0$

Pour construire cette fonct° hol L^2, on va utiliser les sous-variétés compactes maximales de $\widetilde{Y}$: on s'intéresse donc aux sous-espaces $Z \subset \widetilde{Y}$ analytiques, compactes, (irréd. connexes), génériques tq si $S \subset \widetilde{Y}$ est $\simeq Z$ et vérifie $S \cap Z \neq \emptyset$ alors $S \subset Z$.

[Fait (Campana, 1994) : ce sont les fibres d'une "fibration" propre
$\gamma : \widetilde{Y} \dashrightarrow \Gamma(\widetilde{Y})$].

À partir de maintenant, on fixe $Z \subset \widetilde{Y}$ comme ci-dessus
comme $\widetilde{Y}$ non-compact, on a $0 \leq \dim(Z) < \dim(\widetilde{Y})$.

On utilise le fait suivant : ~~k~~ on fixe $L \to Y$ suffisamment > 0 pour que $H^0_{(2)}(\widetilde{Y}, \widetilde{L}) \neq 0$ ~~et~~ $\hat{m}$ de dim ∞ !!

Si $\begin{cases} k \geq 1 \\ m \geq 1 \end{cases}$ ~~est un~~ entiers, on ~~peut~~ peut restreindre à Z à l'ordre m: (saut 2)

$$0 \to \mathcal{J}_Z^{mk} \otimes \tilde{L} \to \tilde{L} \to \tilde{L} \otimes \left(\mathcal{O}_{\tilde{Y}} / \mathcal{J}_Z^{mk}\right) \to 0$$

$$0 \to H^0_{(2)}(\tilde{Y}, \mathcal{J}_Z^{mk} \otimes \tilde{L}) \to H^0_{(2)}(\tilde{Y}, \tilde{L}) \to H^0\left(\tilde{Y}, \tilde{L} \otimes \left(\mathcal{O}_{\tilde{Y}} / \mathcal{J}_Z^{mk}\right)\right)$$

donc dim $< +\infty$ — supporté sur un compact

~~En jouant~~ Conclusion: $\left[\right.$ $\exists$ bcp de sect° L^2 de $\tilde{L}$ qui s'annule à un ordre ~~arbitraire~~ grand le long de Z.

(pour $k \gg 1$)

Si on choisit bien les sections $s_1, \dots, s_N$ comme ci-dessus, on pose $\varphi_m(y) = \frac{1}{mk} \log\left(\sum_{j=1}^{N} |s_j|^2_{\tilde{h}}\right)$.

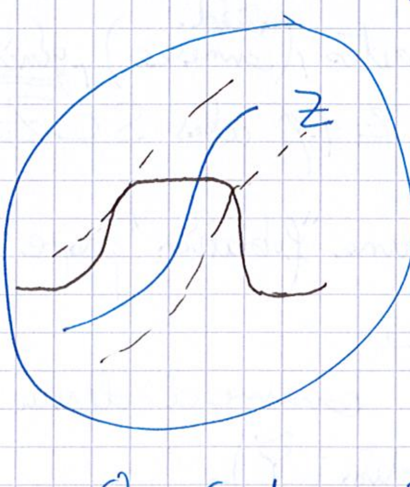
<u>Lemme</u>: la fonction φ_m vérifie:

(i) $i\partial\bar{\partial}\varphi_m \geq \left(1 - \frac{1}{k}\right)\tilde{\omega}$ (avec $\tilde{\omega} = i\Theta_{\tilde{h}}(\tilde{L}, \tilde{h})$).

(ii) φ_m est bornée supérieurement.

(iii) $\mathcal{J}(\varphi_m)$ est (co)supporté sur Z: si $\exists$ $Z \subset U$ voisinage tq "$\{f \in \mathcal{O} \cap L^2\}$. tq $\int_U |f|^2 e^{-\varphi_m} < +\infty \Rightarrow f_{|Z} \equiv 0$.

On peut utiliser φ pour construire une fonction holomorphe L^2 en utilisant Hörmander:



on choisit ρ une fonct° plateau au voisinage de Z avec $\mathrm{Supp}(\rho) \subset U$.

et on considère $\tau = \bar{\partial}\rho \Rightarrow$ c'est une $(0,1)$-forme ($\bar{\partial}$-fermée) mais on y pense comme une $(n,1)$-forme ($\bar{\partial}$-fermée) à valeurs dans $K_{\tilde{Y}}^{-1} > 0$.

On résout maintenant: $(*)$ $\begin{cases} \bar{\partial} s = \tau \\ \int_{\tilde{Y}} |s|^2 e^{-\varphi} < +\infty \end{cases}$