ADDENDUM À L'ARTICLE *REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES KÄHLÉRIENS ET DE LEURS ANALOGUES PROJECTIFS*

FRÉDERIC CAMPANA, BENOÎT CLAUDON, PHILIPPE EYSSIDIEUX

Cet ajout à l'article [CCE14] fournit une réponse positive à la question 2.9 de *loc. cit.*. Nous obtenons donc l'énoncé suivant.

Théorème 1.
Soit X/B une famille lisse en tores complexes avec X kählérienne compacte. Il est alors possible de déformer X en une variété Y/B de telle sorte que

*(i) les fibres de Y/B sont des variétés abéliennes (*i.e. *on rend le morphisme Y/B projectif).*

(ii) la fibration Y/B admet une multisection.

En particulier, si B est projective, Y l'est aussi et on peut donc déformer X en une variété algébrique. Son groupe fondamental est alors celui d'une variété projective.

Démonstration : Il suffit de procéder dans l'ordre inverse de celui présenté dans l'article [CCE14]. On utilise tout d'abord la version relative du critère de Buchdhal (théorème 1.1) pour se ramener au cas d'un morphisme projectif (comme dans le théorème 2.6). On remarque ensuite que l'on peut déformer X/B pour obtenir une multisection (le passage à un revêtement étale rend cette multisection univaluée mais c'est inutile dans notre situation). En effet, la fibration X/B s'identifie à un élément

$$e_h(X/B) \in \mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(H/B))$$

où $\mathcal{J}(H/B)$ désigne le faisceau des sections de la fibration jacobienne associée à la VSH H. L'espace total de X/B étant une variété kählérienne, la classe $c(e_h(X/B))$ est de torsion dans $\mathrm{H}^2(B, H)$ si c désigne le morphisme

$$\mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(H/B)) \xrightarrow{c} \mathrm{H}^2(B, H)$$

induit par la suite courte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{J}(H/B) \longrightarrow 0.$$

Comme $m \cdot c(e_h) = 0$, on en déduit que $m \cdot e_h$ vient de $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{E})$: $m \cdot e_h = \delta(f)$ avec $f \in \mathrm{H}^1(B, \mathcal{E})$ et δ l'application entre les H^1. Comme $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{E})$ est un espace vectoriel, on en déduit que l'élément $\eta = e_h - \delta(f/m)$ est bien défini et est un élément de torsion de

Date: 22 mai 2015.

$\mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(H/B))$. Or, la démonstration de la proposition 2.5 montre que le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{E})$ s'identifie à un espace de déformations. Il existe donc une déformation (à un paramètre) reliant X/B à Y/B la famille en tores correspondant à l'élément η. On conclut alors de la façon suivante : comme η est de torsion, Y a une mutisection (voir lemme ci-dessous) et les résultats de [Cam81] montrent que Y est projective si B l'est. $\square$

Lemme 2.
Soit X/B une fibration en tores et η la classe de cohomologie correspondante dans $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(H/B))$. La classe η est de torsion si et seulement si X/B possède une multisection (qui peut être choisie étale sur B).

Démonstration : Démontrons le sens qui nous intéresse ici. Par construction, si θ est une classe dans $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{J}(H/B))$ et $m \geq 1$ un entier, il existe toujours une application :

$$J(H)^\theta \longrightarrow J(H)^{m\theta}$$

où $J(H)^\theta/B$ est la fibration en tores associée à la classe θ. Cette application est de plus étale (de degré m^{2d} avec d la dimension relative de X/B). Si θ est un point de m-torsion, on obtient alors un revêtement étale :

$$J(H)^\theta \longrightarrow J(H).$$

L'image réciproque de la section de $J(H)/B$ par ce revêtement fournit la multisection recherchée. Pour plus de détails, on pourra se rapporter par exemple à [Nak02, Prop.1.3.3]. $\square$

Références

[Cam81] Frédéric Campana, *Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact*, Invent. Math. **63** (1981), no. 2, 187–223.

[CCE14] Frédéric Campana, Benoît Claudon, and Philippe Eyssidieux, *Représentations linéaires des groupes kählériens et de leurs analogues projectifs*, Journal de l'École Polytechnique - Mathématiques **1** (2014), 331–342.

[Nak02] Noburu Nakayama, *Local structure of an elliptic fibration*, in *Higher dimensional birational geometry*, 185–295, Adv. Stud. Pure Math., **35**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

Fréderic Campana et Benoît Claudon, Université de Lorraine, Institut Élie Cartan Nancy, UMR 7502, B.P. 70239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

Philippe Eyssidieux, Institut Fourier, Université Grenoble 1, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France

E-mail address: Frederic.Campana@univ-lorraine.fr
E-mail address: Benoit.Claudon@univ-lorraine.fr
E-mail address: Philippe.Eyssidieux@ujf-grenoble.fr