Géométrie

Mise en route

1 Extraits d'écrits de CAPES

Voici des questions sous forme de « vrai/faux » posées aux écrits du CAPES lors des trois dernières années.

CAPES 2022

Géométrie plane

1. Dans un plan muni d'un repère cartésien, $2x = 3$ est l'équation d'une droite.
2. Dans un plan euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(1, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(1, -1)$, $D(4, 5)$. Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
3. Dans un plan euclidien, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$. Soit le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. Alors $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$.

Géométrie dans l'espace

On se place dans l'espace, muni d'un repère cartésien.

1. Si deux droites D et D' sont parallèles à un même plan P, alors D est parallèle à D'.
2. $2x + 3y = 3$ est l'équation d'une droite.
3. La droite Δ définie par le système d'équations $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$
   (a) passe par le point A de coordonnées $(1, 0, 1)$,
   (b) a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (c) est contenue dans le plan P d'équation $3x + 4y - z = 2$.

CAPES 2023

1. Étant donnés trois points A, B et C du plan, la contraposée de l'assertion

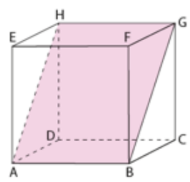
$$ABC \text{ est un triangle rectangle en } A \Longrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

est
$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Longrightarrow ABC \text{ est un triangle rectangle en } A.$$

2. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$ et d'une norme associée notée $\|\cdot\|$. Soient x et y dans P tels que $\|x\| = \|y\|$. Les vecteurs $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.
3. On se place dans un plan vectoriel P muni d'un produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$. Pour tous vecteurs x, y et z de P, on a $(x|z) = (y|z) \Longrightarrow x = y$.
4. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, on considère les points $A(-4,1)$, $B(3,0)$ et $C(5,4)$. La médiatrice de $[AC]$ a pour équation $x+y=3$.
5. Dans le plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé, l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-2| = |z+1|$ est réduit au point d'affixe $\dfrac{1}{2}$.
6. Dans le plan affine euclidien orienté muni d'un repère cartésien orthonormé direct d'origine O, on considère les points A et B d'affixes respectives $\sqrt{3} - i$ et $\sqrt{3} + i$. L'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ mesure $\dfrac{\pi}{3}$ modulo 2π.
7. Dans l'espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, le plan P d'équation $x - 2y + 3z = -5$ et la droite D de représentation paramétrique $(D) \begin{cases} x = -2+t \\ y = -t \\ z = -1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ sont perpendiculaires.

CAPES 2024

1. Un triangle dont les mesures des angles sont dans un ratio 1 : 2 : 3 est un triangle rectangle.
2. Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle ABC sur lequel sont construits extérieurement les triangles équilatèraux ABD et ACE. On a $BE = DC$.
3. Dans un espace affine euclidien, muni d'un repère cartésien orthonormé, les droites D et D' de représentations paramétriques
$\begin{cases} x = & 1+t \\ y = & 3-t \\ z = & 5-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $\begin{cases} x = & 1+t \\ y = & 3-t \\ z = & -5t-1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ sont coplanaires.
4. On considère le cube $ABCDEFGH$ comme ci-dessous :



On se place dans le repère $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$. Le point $K(9; -10; -8)$ est un point du plan (ABG) (faire un dessin).

2 Approche axiomatique de l'aire des parties planes

On va retrouver les formules classiques donnant l'aire des parties planes en utilisant seulement les propriétés de base de l'aire que nous rassemblons ici comme une liste d'axiomes. On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on part du principe qu'il existe une application $\mathcal{A}\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^+$ définie sur un ensemble de parties du plan[1] et qui vérifie :

(**A1**) $\mathcal{A}$ est *additive* : si A et B sont deux parties planes (dans $\mathcal{Q}$) disjointes, alors $\mathcal{A}(A \cup B) = \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B)$;

(**A2**) $\mathcal{A}$ est invariante par isométrie : si $A \in \mathcal{Q}$ et si g est une isométrie[2] du plan, alors $\mathcal{A}(g(A)) = \mathcal{A}(A)$;

(**A3**) $\mathcal{A}$ est homogène d'ordre 2 : si h est une homothétie de rapport $\lambda > 0$, alors $\mathcal{A}(h(A)) = \lambda\mathcal{A}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{Q}$.

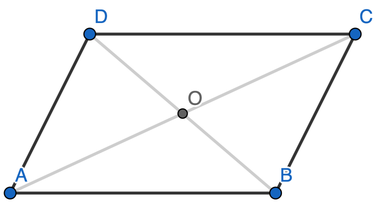
On normalise l'application $\mathcal{A}$ par le choix suivant : le carré $\square = (O, O+\vec{\imath}, O+\vec{\imath}+\vec{\jmath}, O+\vec{\jmath})$ a pour aire $\mathcal{A}(\square) = 1$.

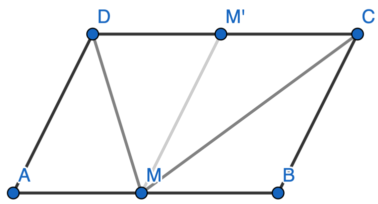
Montrer les points suivants en utilisant les axiomes ci-dessus :

(1) L'aire d'un point et celle d'un segment est nulle.

(2) Si A et B sont deux parties telles que $A \cap B$ est une réunion finie de points et de segments, alors $\mathcal{A}(A \cup B) = \mathcal{A}(A) + \mathcal{A}(B)$.

(3) Dans un parallélogramme $\mathcal{P} = ABCD$, une diagonale partage $\mathcal{P}$ en deux triangles de même aire : $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ACD) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\mathcal{P})$.



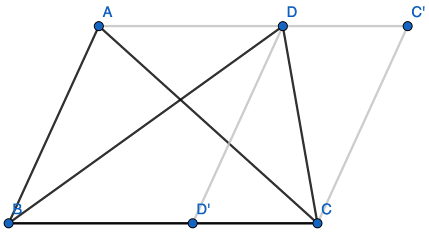


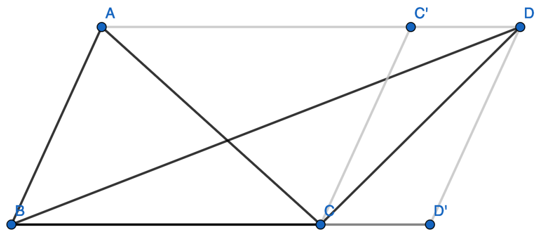
(4) Si $ABCD$ est un parallélogramme et M un point de $[AB]$, alors $\mathcal{A}(DMC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABCD)$.

(5) Si ABC est un triangle et A' le milieu de $[BC]$, alors $\mathcal{A}(ABA') = \mathcal{A}(ACA') = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$.

(6) Deux triangles ABC et DBC de même base et tels que A et D sont situés sur une parallèle à (BD) ont même aire : $\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(DBC)$.

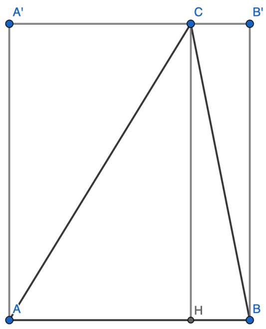
1. Nous ne nous préoccuperons pas ici de l'ensemble $\mathcal{Q}$; il nous suffira de savoir que les figures planes usuelles sont dans $\mathcal{Q}$.
2. c'est-à-dire une translation, une symétrie axiale ou une rotation.

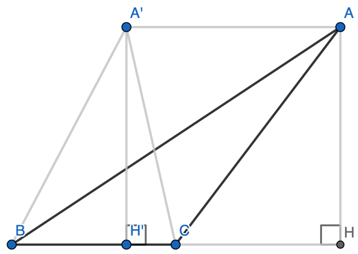




(7) Montrer que l'aire d'un carré de côté a vaut $\mathcal{A} = a^2$, puis que l'aire d'un rectangle de côtés a et b vaut $\mathcal{A} = ab$.

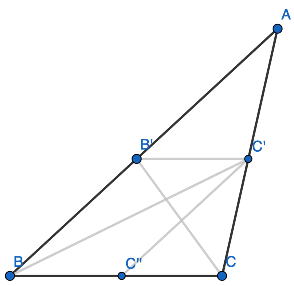
(8) Montrer que l'aire d'un triangle ABC est donnée par $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}AH \times BC$. En déduire que si A est un point du plan et Δ une droite (ne contenant pas A), alors $\frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(AB'C')} = \frac{BC}{B'C'}$ si B, C, B' et C' sont des points de Δ.





(9) Montrer le théorème de Thalès : soit ABC un triangle et B' (resp. C') un point de $[AB]$ (resp. $[AC]$). On suppose que $B'C'$ est parallèle à (BC). On a alors :

$$\frac{BB'}{BA} = \frac{CC'}{CA} \quad \text{et} \quad \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$



On peut bien sûr poursuivre l'exercice et montrer les formules d'aire pour les autres polygones classiques (losange, parallélogramme, trapèze...).

3 Découpage de polygones

On dit que deux polygones plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont *équivalents par découpage* s'il existe des découpages

$$\mathcal{P}_1 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

où les polygones A_i et B_j vérifient :

(i) $A_i \cap A_j$ est une réunion de points et de segments pour $i \neq j$ (de même pour $\mathcal{P}_2$) ;

(ii) A_i et B_i sont isométriques pour tout $i = 1 \ldots n$.

1. Vérifier que deux polygones équivalents pas découpage ont même aire.

On va montrer que la réciproque est vraie : c'est le théorème de Bolyai (1832). On va en fait montrer l'énoncé suivant.

Lemme. *Si $\mathcal{P}$ est un polygone plan, alors $\mathcal{P}$ est équivalent par découpage à un rectangle de côté 1.*

2. Montrer que le lemme précédent implique le théorème de Bolyai.
3. Montrer qu'il suffit de traiter le cas des triangles dans le lemme ci-dessus.
4. Montrer qu'un triangle est équivalent par découpage à un parallélogramme.
5. Montrer qu'un parallélogramme est équivalent par découpage à un parallélogramme dont un côté est de longueur rationnelle.
6. Montrer qu'un parallélogramme est équivalent par découpage à un parallélogramme dont un côté est de longueur entière, puis que cette longueur peut être choisie égale à 1.
7. Conclure en montrant qu'un parallélogramme dont un des côté est de longueur 1 est équivalent à un rectangle de côté 1. Pour cela, traiter d'abord le cas où le projeté orthogonal de C se trouve dans $[AB]$ puis se ramener à ce cas par découpage.

4 Constructions géométriques

Jouer à Euclidea : possibilité de télécharger l'application ou alors sur le site `euclidea.xyz`.

Trouver la construction 7E de l'énigme 1.7 et démontrer que cette construction fournit bien un carré inscrit dans un cercle.