Correction exercice 9
(feuille 2)

La matrice B est donnée par $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Son polynôme caractéristique est $\chi_B(X) = (X-1)(X-2)^2$

Les sous-espaces caractéristiques sont donc :

$$\begin{cases} E_1 = \mathrm{Ker}(B - I_3) \text{ de dimension } 1 \\ E_2 = \mathrm{Ker}(B-2I_3) \quad " \quad " \quad 2 \end{cases}$$

On calcule les deux sous-espaces en question :

(1) $B - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on constate que $v_2 + v_3 = e_1$ est dans E_1 (avec (v_1, v_2, v_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$)

(2) $B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $(B-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc $\mathrm{Ker}(B-2I_3) \subsetneq E_2$ avec pour dimensions resp. 1 et 2.

Il faut donc trouver un vecteur $e_2 \in E_2$ avec $e_2 \notin \mathrm{Ker}(B-2I_3)$. Le vecteur $e_2 = v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient car $(B-2I_3)e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 + v_2 \neq 0$

Dans la base $(e_1, (B-2I_3)e_2, e_2) = (v_2+v_3, v_1+v_2, v_3)$, la matrice B devient : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En effet : . $Be_1 = 1 e_1$ (e_1 est vecteur propre)

. $Be_2 = 1(B-2I_3)e_2 + 2e_2$

$\cdot\ B(B-2I_3)e_2 = \underbrace{(B-2I_3)^2 e_2}_{=0} + 2(B-2I_3)e_2$

$= 2(B-2I_3)e_2$

Finalement, si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$
