Éléments de correction de l'examen de Géométrie Complexe

Problème 1 :

Question 1.

La métrique $\omega = i \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$ est kählérienne sur $\mathbb{C}^n$ et elle est invariante par translations $\Rightarrow$ elle passe donc au quotient en une métrique kählérienne sur $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$.

Question 2.

Si on choisit une métrique constante sur $\mathbb{C}^n$, celle-ci induit une métrique ω sur $X = \mathbb{C}^n/\Lambda$ et il est facile de voir que si $\alpha = \sum'_{I,J} \alpha_{IJ}\, dz_I \wedge d\bar{z}_J$ est une (p,q)-forme sur X, on a alors

$$\Delta_\omega(\alpha) = \sum'_{I,J} \Delta_\omega(\alpha_{IJ})\, dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

et donc α est harmonique $\Leftrightarrow$ $\alpha_{IJ} = \text{cste}$ $\forall I,J$.

Finalement : $H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \simeq \Lambda^{p,q}(\mathbb{C}^n)^* = \Lambda^p(\mathbb{C}^n)^* \otimes \overline{\Lambda^q(\mathbb{C}^n)^*}$

et donc $h^{p,q}(X,\mathbb{C}) = \binom{n}{p}\binom{n}{q}$ $\quad \forall\, 0 \leq p,q \leq n$.

Question 3.

On peut aussi raisonner comme suit : les formes dz_i pour $i = 1..n$ fournissent une base de sections globales de Ω^1_X. Ce fibré est donc trivial et de même pour ses puissances extérieures : $\Omega^p_X \simeq \mathcal{O}_X^{\oplus \binom{n}{p}}$

D'où par Dolbeault $H^{p,q}(X,\mathbb{C}) \simeq H^q(X,\Omega^p_X) = \left(H^q(X,\mathcal{O}_X)\right)^{\oplus \binom{n}{p}}$

Pour calculer $h^{0,q}(X)$, on utilise la symétrie de Hodge :

$h^{0,q}(X) = h^{q,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\Omega^q_X) = \binom{n}{q}$ et on retrouve bien le résultat.

Problème 2 :

Question 1.

La forme $\gamma = f^*(\omega_Y^n) \wedge \omega_X^{m-n}$ est bien de type (m,m) et, comme ω_Y et ω_X sont des formes réelles, il s'agit d'une forme réelle. On peut donc l'écrire sous la forme $\gamma = f^*(\omega_Y^n) \wedge \omega_X^{m-n} = g\, i dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge i dz_m \wedge d\bar{z}_m$

avec $(z_1 \cdots z_m)$ des coordonnées locales sur X et g une fonction à valeurs réelles. Il faut donc montrer que ≥ 0 et > 0 sur un ouvert.

Choisissons des coordonnées $(y_1 \cdots y_n)$ sur Y et on suppose que les formes ω_X et ω_Y sont "euclidiennes" au point $\underset{X}{0}$ et $f(0) = \underset{Y}{0}$. On a alors :

$$\gamma = f^*(\omega_Y)^n \wedge \omega_X^{m-n} \quad (\text{compatibilité } f^* \text{ et } \wedge)$$

$$= \left[f^*\left(\sum_{j=1}^{n} i dy_j \wedge d\bar{y}_j \right) \right]^n \wedge \left(\sum_{k=1}^{m} i dz_k \wedge d\bar{z}_k \right)^{m-n}$$

$$= \left(i \sum_{j=1}^{n} df_j \wedge d\bar{f}_j \right)^n \wedge \left(\sum_{k=1}^{m} i dz_k \wedge d\bar{z}_k \right)^{m-n}$$

$$= \left(i \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial z_\alpha} \overline{\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_\beta} \right)} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \right) \wedge \left(\sum_{k=1}^{m} i dz_k \wedge d\bar{z}_k \right)^{m-n}$$

$$= \left(\sum_{\substack{|I| = n \\ I \subset [\![1;m]\!]}} |\det A_I|^2 \right) i dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge i dz_m \wedge d\bar{z}_m$$

avec $A_I = \left(\frac{\partial f_j}{\partial z_\alpha} \right)_{\substack{j=1..n \\ \alpha \in I}}$ le mineur de taille I de la matrice hessienne de f.

On a donc bien $\boxed{f^*(\omega_Y^n) \wedge \omega_X^{m-n} \geq 0}$

De plus, cette quantité est > 0 là où la différentielle est surjective (ie de rang maximal car $m \geq n$). Par le théorème de Sard, il s'agit bien d'un ouvert non vide

Question 2.

Il suffit de montrer que $f^*([\omega_Y^n]) \neq 0$ dans $H^{2n}(X, \mathbb{R})$. Si jamais ce n'était pas le cas, on aurait alors $f^*([\omega_Y^n]) \wedge [\omega_X]^{m-n} = 0$

Or, via l'isomorphisme $\begin{cases} H^{2m}(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ \alpha \longmapsto \int_X \alpha \end{cases}$

cette classe vaut $\int_X f^*(\omega_Y)^n \wedge \omega_X^{m-n}$.

Comme on intègre une forme ≥ 0 et >0 sur un ouvert non vide, cette quantité est non nulle.
On en déduit que $f^*([\omega_Y^n]) \neq 0$ dans $H^{2n}(X,\mathbb{R})$
Comme $H^{2n}(Y,\mathbb{R}) = \mathbb{R}\cdot[\omega_Y^n]$, on en conclut :

$$\boxed{f^* : H^{2n}(Y,\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{2n}(X,\mathbb{R}) \text{ est injective.}}$$

Question 3.

Soit $\alpha \in H^k(Y,\mathbb{R})$ avec $k<2n$. Supposons $\alpha \neq 0$ mais $f^*(\alpha)=0$. D'après la dualité de Poincaré, il existe $\beta \in H^{2n-k}(Y,\mathbb{R})$ tel que $\alpha \wedge \beta \neq 0$ dans $H^{2n}(Y,\mathbb{R})$
D'après la question 2, on a donc $f^*(\alpha\wedge\beta) \neq 0$.
Mais on a également : $f^*(\alpha\wedge\beta) = \underbrace{f^*(\alpha)}_{=0} \wedge f^*(\beta) = 0$.

Cette contradiction montre que $f^*(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=0$:

$$\boxed{\forall k \in [\![0;2n]\!],\ f^* : H^k(Y,\mathbb{R}) \hookrightarrow H^k(X,\mathbb{R}) \text{ est injective.}}$$

Question 4.

La surface de Hopf $S = \left(\mathbb{C}^2 \setminus (0)\right) / (x,y) \sim (2x,2y)$

admet une application surjective $\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$.
Or, on sait que $S \underset{C^\infty}{\simeq} \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ et la formule de Künneth (cf. cours) montre que $H^2(S,\mathbb{R}) = 0$.
L'application $f^* : H^2(\mathbb{P}^1, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R} \longrightarrow H^2(S,\mathbb{R})$
ne peut donc pas être injective.

Problème 3 :

Question 1.

On fixe une métrique lisse h_0 sur L et on sait que la $(1,1)$-forme réelle $i\Theta_{h_0}(L)$ calcule $c_1(L)$ dans $H^2(X,\mathbb{R})$
La $(1,1)$-forme réelle $i\Theta_{h_0}(L) - \lambda\omega_X$ est donc nulle dans $H^2(X,\mathbb{R})$ et on peut appliquer le lemme du $\partial\bar\partial$: il existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ telle que $i\Theta_{h_0}(L) - \lambda\omega_X = i\partial\bar\partial f$.
La métrique $h = e^f . h_0$ vérifie alors
$$i\Theta_h(L) = i\Theta_{h_0}(L) - i\partial\bar\partial f$$ et on a bien :
$$\boxed{i\Theta_h(L) = \lambda\omega_X .}$$

Question 2.

- Si $\lambda > 0$, on en déduit que la métrique h définie ci-dessus vérifie $i\Theta_h(L) > 0$ et L est ample d'après le théorème de Kodaira.

- Réciproquement : si L est ample, alors il admet une métrique à courbure positive et on a donc $\lambda = \int_X i\Theta_h(L) > 0$.

$$\boxed{L \text{ est ample} \iff \lambda > 0}$$

Question 3.

La formule de Hurwitz donne la classe de Chern du fibré canonique pour une courbe de genre g :

$$c_1(K_X) = 2g-2.$$

- $\underline{g=0}$: $X \simeq \mathbb{P}^1$ et il n'y a rien à faire !
- $\underline{g=1}$: $X \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ est une courbe elliptique et la fonction $\wp$ de Weierstraß fournit un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ (cf cours Frank Loray)
- $\underline{g \geq 2}$: $c_1(K_X) > 0$ et K_X est ample.

Dans tous les cas, X admet un plongement dans un espace projectif $\mathbb{P}^N$ ($N=3$ suffit en fait).

Deuxième méthode :

Si $x \in X$ est un point de la courbe, on considère le fibré $L = \mathcal{O}_X(\{x\})$. On peut montrer que L vérifie $c_1(L) = 1$ et donc L est ample !

Pour ce faire, on considère s la section canonique de L qui ne s'annule qu'au point x. On sait que $c_1(L)$ peut se calculer sur $X \setminus (x)$ comme $i\,\Theta_h(L) = -i\,\partial\bar\partial \log|s|_h^2$ avec h n'importe quelle métrique lisse sur L. Si on choisit z une coordonnées centrées en x, on a alors :

$$2\pi c_1(L) = \int_X i\Theta_h(L) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{X\setminus D(x,\varepsilon)} -i\partial\bar\partial \log|s|_h^2 \underset{\text{Stokes}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} -\int_{\partial D(x,\varepsilon)} i\bar\partial \log|s|_h^2$$

Comme $\bar\partial \log|s|_h^2 = \overset{C^\infty}{\widehat{\varphi}} + \frac{d\bar z}{\bar z}$ et comme l'orientation de ∂D venant de la formule de Stokes est celle opposée à l'orientation usuelle, on obtient finalement :

$$2\pi c_1(L) = \int_{\partial D(0,\varepsilon)} i\,\frac{d\bar z}{\bar z} \overset{2}{=} \int_0^{2\pi} i\,\frac{\varepsilon(-i)e^{-i\theta}\,d\theta}{\varepsilon e^{-i\theta}} = 2\pi \quad !!!$$