Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 3 (1h30)

Le sujet est long mais les trois dernières questions de l'exercice 3 (**4.a.**, **4.b.** et **4.c.**) sont hors barème. Un barème indicatif est donné pour chaque exercice (points par question).

Exercice 1 (sur 6 points : 1–2–1–1–1)

Dans cet exercice, on utilise la notation habituelle J_n pour désigner un bloc de Jordan de taille n. L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace des matrices symétriques complexes.

1. Vérifier que la matrice $S_n = (\delta_{i+j,n+1})_{i,j=1}^n$ est une matrice symétrique et inversible et que l'on a $S_n J_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

La matrice S_n est évidemment symétrique et son déterminant vaut $(-1)^n$. Elle envoie la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sur la base $(e_n, \ldots, e_1)$. On a donc

$$S_n J_n(e_i) = S_n(e_{i-1}) = e_{n+1-(i-1)} = e_{n+2-i}$$

pour $i \geq 2$ et $S_n J_n(e_1) = 0$. La matrice $S_n J_n$ est donc symétrique, avec une sous-diagonale de 1 orientée sud-ouest$\longrightarrow$nord-est.

2. En déduire que, pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{C})$ telle que $SM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

Le fait d'ajouter un multiple de l'identité ne change pas le résultat ci-dessus : la matrice $A_n(\lambda) := S_n(\lambda I_n + J_n) = \lambda S_n + S_n J_n$ est encore symétrique. On peut alors utiliser la réduction de Jordan (comme sur travaillons sur $\mathbb{C}$) : la matrice M étant fixée, il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}MP$ est sous forme de Jordan. On peut alors travailler par bloc et supposer que $P^{-1}MP = \lambda I_n + J_n$. On multiplie à gauche par S_n et à droite par P^{-1} pour obtenir

$$S_n P^{-1} M = S_n(\lambda I_n + J_n)P^{-1} = A_n(\lambda)P^{-1}.$$

Les matrices $S_n P^{-1}$ et $A_n(\lambda)P^{-1}$ ne sont plus forcément symétriques mais, comme S_n et $A_n(\lambda)$ le sont, il suffit de multiplier par ${}^tP^{-1}$ à gauche pour garantir le caractère symétrique. On a alors :

$$\underbrace{{}^tP^{-1} S_n P^{-1}}_{\text{symétrique}} M = \underbrace{{}^tP^{-1} A_n(\lambda) P^{-1}}_{\text{symétrique}}.$$

La matrice ${}^tP^{-1} S_n P^{-1}$ est de plus inversible.

3. Montrer qu'une matrice complexe S symétrique et inversible peut s'écrire $S = {}^t PP$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$.

C'est la réduction de Gauss d'une matrice symétrique complexe. On sait qu'une matrice complexe S est congruente à une matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r = \mathrm{rg}(S)$. Si S est de rang maximal, $r = n$ et S est congruente à I_n : cela signifie exactement que S s'écrit ${}^t PP$ avec P inversible.

4. En déduire que toute matrice complexe est semblable à une matrice symétrique (complexe).

On sait que si $M \in M_n(\mathbb{C})$ alors il existe S symétrique inversible telle que $SM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$. On applique la question précédente à S qui s'écrit donc ${}^t PP$ et donc $N := {}^t PPM$ est symétrique. En multipliant à gauche par ${}^t P^{-1}$ et à droite par P^{-1}, on obtient :

$$PMP^{-1} = \underbrace{{}^t P^{-1} N P^{-1}}_{\text{symétrique}}.$$

5. Dans les questions ci-dessus, où a-t-on utilisé le fait que l'on travaillait sur $\mathbb{C}$? Le résultat est-il vrai sur $\mathbb{R}$?

Nous avons exploité à deux endroits que le corps de base était celui des nombres complexes : pour utiliser la réduction de Jordan et pour la question **3.** (sur $\mathbb{R}$, une matrice symétrique qui s'écrit ${}^t PP$ est une matrice **définie positive**). Le résultat ne peut pas être vraie sur $\mathbb{R}$ car les matrices symétriques réelles sont toutes diagonalisables : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ne peut donc pas être semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice symétrique (mais elle l'est sur $\mathbb{C}$!).

Exercice 2 (sur 6 points : 2–1–1–2)

Dans cet exercice, $U_n \subset GL_n(\mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices unitaires et $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ le sous-espace des matrices triangulaires supérieures.

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe T une matrice triangulaire supérieure et $U \in U_n$ telles que $P = UT$ (on pourra penser à P comme la famille de ses colonnes par exemple).

On écrit le procédé de Gram–Schmidt pour les colonnes de P. Si $\mathcal{B}$ est la base formée des colonnes de P, on note $\mathcal{B}^{GS}$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B}_\circ$ est la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a alors :

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\circ}^{\mathcal{B}} = \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_\circ}^{\mathcal{B}^{GS}}}_{\text{unitaire}} \times \underbrace{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^{GS}}^{\mathcal{B}}}_{\text{triangulaire}}.$$

2. En déduire que toute matrice complexe est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \exists (U, T) \in U_n \times \mathcal{T}_n(\mathbb{C}),\ M = UTU^*.$$

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. On sait que M est trigonalisable : il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T_1 une matrice triangulaire supérieure telle que $M = PT_1P^{-1}$. On applique la question précédente à P et on écrit $P = UT_2$ avec U unitaire et T_2 triangulaire supérieure. Cela donne

$$M = PT_1P^{-1} = UT_2T_1T_2^{-1}U^{-1} = U \underbrace{T_2T_1T_2^{-1}}_{=T \text{ triangulaire}} U^*.$$

3. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ une matrice complexe et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicités).

3.a. Calculer $\mathrm{Tr}(A^*A)$.

Un calcul direct donne

$$\mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 .$$

3.b. Montrer que

$$A \text{ est normale} \Longleftrightarrow \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 .$$

$(\Rightarrow)$: si A est normale, alors A est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc U unitaire et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = UDU^*$. On en déduit donc que $A^*A = U\overline{D}U^*UDU^* = U\mathrm{diag}\left(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2\right)U^*$ et finalement

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(A^*A) &= \mathrm{Tr}\left(U\mathrm{diag}\left(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2\right)U^*\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{diag}\left(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2\right)U^*U\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(\mathrm{diag}\left(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2\right)\right) = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 .\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$: si A vérifie $\mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2$, on écrit que A est unitairement semblable à une matrice triangulaire (question **2.**). On a donc $A = UTU^*$ et le même calcul que ci-dessus donne :

$$\mathrm{Tr}(A^*A) = \mathrm{Tr}(T^*T) = \sum_{i \le j} |t_{i,j}|^2 .$$

Comme les coefficients diagonaux de T ne sont autres que les valeurs propres de T et de A, on a $t_{i,i} = \lambda_i$ et on a finalement

$$\sum_{k=1}^n |t_{k,k}|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 = \mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_{i \le j} |t_{i,j}|^2 ,$$

ce qui implique directement que $t_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. La matrice T est donc diagonale et, comme A est unitairement diagonalisable, elle est normale.

Exercice 3 (sur 8 points : 1–1–2–1–1–2)

On note $\mathcal{N}_n(K) \subset \mathrm{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille $n \geq 1$ (avec K un corps de caractéristique différente de 2) et $\mathcal{T}_n(K)$ (resp. $\mathcal{T}_n^+(K)$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n (resp. l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle). On souhaite montrer l'énoncé suivant :

$$\text{Si } V \subset \mathcal{N}_n(K) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_n(K)\text{, alors } \dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

1. Donner un exemple de sous-espace vectoriel $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ avec $\dim(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Le sous-espace $V = \mathcal{T}_n^+(K)$ est inclus dans $\mathcal{N}_n(K)$ et il vérifie $\dim(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. On considère la forme quadratique $q \colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ définie par $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ et on note $(E_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(K)$.

2.a. Calculer $\mathrm{Tr}(ME_{i,j})$ pour $M \in \mathrm{M}_n(K)$ et $1 \leq i, j \leq n$.

Si $M = (m_{i,j})_{i,j=1}^n$, un calcul direct donne $\mathrm{Tr}(ME_{i,j}) = m_{j,i}$.

2.b. Montrer que q est non dégénérée et que $q(M) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{N}_n(K)$.

Remarquons tout d'abord que la forme polaire de la forme quadratique q n'est autre que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ (qui est bien une forme bilinéaire symétrique grâce à la propriété de la trace). D'après la question précédente, on constate que si $\mathrm{Tr}(MB) = 0$ pour tout $B \in \mathrm{M}_n(K)$, alors en particulier $m_{j,i} = \mathrm{Tr}(ME_{i,j}) = 0$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$. On a donc $M = 0$ est q est non dégénérée.

Si $M \in \mathcal{N}_n(K)$, M^2 est également nilpotente et n'a donc que 0 pour valeur propre. On a donc $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2) = 0$ pour $M \in \mathcal{N}_n(K)$.

2.c. En déduire que, si $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ est un sous-espace vectoriel, alors $\mathrm{Tr}(MN) = 0$ pour tout $(M, N) \in V$.

Si $V \subset \mathcal{N}_n(K)$, la forme quadratique $q|_V$ est alors identiquement nulle d'après la question précédente ; sa forme polaire l'est donc également et cela signifie exactement que $\mathrm{Tr}(MN) = 0$ pour tout $(M, N) \in V$.

3. Dans cette question, on suppose que le corps K est celui des nombres réels $K = \mathbb{R}$.

3.a. Calculer la signature de la forme q en exhibant des sous-espaces de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale sur lesquels la forme q est définie négative/positive.

On note (s,t) la signature de la forme quadratique q. Un calcul direct montre que si M est **symétrique**, alors

$$q(M) = \mathrm{Tr}(M^2) = \sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^2 \geq 0$$

et $q(M) = 0$ si et seulement si $M = 0$. La forme q est donc définie positive en restriction à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. En particulier, nous en déduisons que $s \geq \dfrac{n(n+1)}{2}$.

De même, si $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace des matrices antisymétriques, on vérifie que

$$q(M) = \mathrm{Tr}(M^2) = -\sum_{i,j=1}^{n} m_{i,j}^2 \leq 0$$

pour $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que $q(M) = 0$ si et seulement si $M = 0$. Donc $q|_{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$ est définie négative et $t \geq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Comme $n^2 = \mathrm{rg}(q) = s + t \geq \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{n(n-1)}{2} = n^2$, on en déduit que les inégalités ci-dessus sont en fait des égalités et finalement q a pour signature

$$\mathrm{sign}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}\right).$$

3.b. Soit alors $V \subset \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel. Montrer que $\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Pour cela, raisonner par l'absurde et considérer $V \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques).

Soit $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ un sous-espace vectoriel et supposons que $\dim(V) > \dfrac{n(n-1)}{2}$. D'après la formule de Grassman, cela implique que $\dim(V \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) > 0$. Si $M \in V \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $M \neq 0$, on a alors $q(M) > 0$ d'après les calculs effectués à la question précédente mais la question **2.c.** fournit au contraire la conclusion $q(M) = 0$. Cette contradiction montre finalement que $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

4. On revient au cas général où le corps K est quelconque. On se donne $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ et on note $V_T \colon = V \cap \mathcal{T}_n^+(K)$. On fixe également $W \subset V$ un supplémentaire de V_T dans V : $V = V_T \oplus W$.

4.a. Calculer $\mathcal{T}_n^+(K)^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{T}_n^+(K)$ pour la forme q et en déduire que $\mathcal{N}_n(K) \cap \mathcal{T}_n^+(K)^\perp = \mathcal{T}_n^+(K)$.

Le sous-espace $\mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})$ est engendré par les matrices $\mathsf{E}_{i,j}$ avec $i < j$. D'après la question **2.a.**, on en déduit que M est orthogonale à $\mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})$, si et seulement si $m_{j,i} = 0$ pour $i < j$. Une telle matrice est donc triangulaire supérieure et on a donc $\mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp = \mathcal{T}_n(\mathsf{K})$.

Si de plus M est triangulaire supérieure et nilpotente, la diagonale de M doit être nulle et donc $\mathsf{M} \in \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})$. On a donc bien $\mathcal{N}_n(\mathsf{K}) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp = \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})$.

4.b. Montrer que $W \cap \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp \subset V_T$ puis que $W \cap \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp = \{0\}$.

On a $\mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp = \mathcal{T}_n(\mathsf{K})$ mais comme $W \subset V \subset \mathcal{N}_n(\mathsf{K})$, on en déduit que

$$W \cap \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp \subset \mathcal{N}_n(\mathsf{K}) \cap \mathcal{T}_n(\mathsf{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K}).$$

En réutilisant le fait que $W \subset V$, on a également

$$W \cap \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp \subset V \cap \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K}) = V_T.$$

Finalement, on obtient :

$$W \cap \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp \subset W \cap V_T = \{0\}.$$

4.c. Établir l'inclusion $W \oplus \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp \subset V_T^\perp$ et en déduire que $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.

D'après la question précédente, on sait que la somme est directe. De plus, l'inclusion $V_T \subset \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})$ se transforme en l'inclusion $\mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp \subset V_T^\perp$ et il reste donc à établir $W \subset V_T^\perp$. Or, la question **2.c.** appliquée à V montre en particulier que W et V_T sont orthogonaux l'un à l'autre et on a bien $W \subset V_T^\perp$.

L'inclusion $W \oplus \mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp \subset V_T^\perp$ fournit l'inégalité de dimensions :

$$\dim(W) + \dim\left(\mathcal{T}_n^+(\mathsf{K})^\perp\right) \leq \dim\left(V_T^\perp\right).$$

La forme q étant non dégénérée sur $\mathrm{M}_n(\mathsf{K})$ (question **2.b.**), on a $\dim\left(\mathsf{F}^\perp\right) = n^2 - \dim(\mathsf{F})$ pour tout sous-espace $\mathsf{F} \subset \mathrm{M}_n(\mathsf{K})$ et l'inégalité ci-dessus devient

$$\dim(W) + n^2 - \frac{n(n-1)}{2} \leq n^2 - \dim(V_T).$$

Enfin, en utilisant que $\dim(V) = \dim(V_T) + \dim(W)$, on obtient la conclusion souhaitée :

$$\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$