Université de Rennes

Arithmétique

Mise en route

1 Extraits d'écrits de CAPES

Voici des questions sous forme de « vrai/faux » posées aux écrits du CAPES lors des trois dernières années.

CAPES 2022

Ensembles de nombres

1. Tout entier relatif non nul possède un inverse dans $\mathbb{Z}$ pour la multiplication.
2. La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
3. $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.
4. $\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est un nombre irrationnel.
6. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
7. La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Arithmétique

1. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a et b divisent c, alors ab divise c.
2. Si trois nombres entiers relatifs a, b, c sont tels que a divise b et c, alors bc est un multiple de a.
3. $19x \equiv 3\,[53]$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}$.

CAPES 2023

1. Soit n un entier naturel. $n^3 - n$ est pair.
2. Soient un entier relatif x et un entier naturel non nul n. Si $x^2 \equiv 9\,[n]$, alors $x \equiv 3\,[n]$ ou $x \equiv -3\,[n]$.

CAPES 2024

1. Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La contraposée de l'assertion « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair » est « n pair $\Rightarrow n^2$ pair ».
3. Si la somme des chiffres en base 10 d'un entier naturel est divisible par 3 alors cet entier est divisible par 9.
4. Soient a et b deux entiers naturels et n un entier naturel non nul. Si $2a \equiv 2b \pmod{n}$, alors $a \equiv b \pmod{n}$.
5. Soit n un entier naturel non nul, la somme des n premiers nombres impairs est égale au carré de $2n+1$.
6. Soient a, b et c trois entiers tels que $a^2 = b^2 + c^2$. L'un au moins des nombres a, b et c est multiple de 5.

2 Fractions égyptiennes

Le but est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit x un nombre rationnel avec $0 < x < 1$. Il existe un nombre $p \geq 1$ et des entiers $n_1, n_2, \dots, n_p$ vérifiant :*

(a) $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_p$,

(b) $x = \dfrac{1}{n_1} + \cdots + \dfrac{1}{n_p}$.

On dira que cette écriture est une décomposition égyptienne de x.

Nous allons voir plusieurs façons de montrer ce résultat qui vont mener à des algorithmes différents.

1. Observer tout d'abord qu'il n'y a pas unicité d'une telle écriture en donnant plusieurs décompositions égyptiennes du nombre $\dfrac{1}{2}$.

2.1 Une approche grossière

2. Montrer que l'algorithme suivant fournit bien une décomposition de x en fractions égyptiennes :

```
Début algo1 :
  Entrée x = a/b un rationnel
  Si a = 1 afficher x
    Sinon afficher 1/b + algo1((a-1)/(b+1)) + algo1((a-1)/(b(b+1)))
Fin algo1
```

3. Donner les étapes de l'algorithme pour $x = \dfrac{3}{16}$.
4. Formuler un ou plusieurs reproches à l'encontre de cet algorithme.

4+. Écrire proprement l'algorithme en Python et le faire tourner sur quelques exemples.

2.2 Algorithme de Fibonacci (ou algorithme glouton)

Soit x un nombre rationnel avec $0 < x < 1$. On pose $x_1 = x$. On définit une suite d'entiers naturels n_i comme suit. On prend pour n_1 le plus petit entier $\geq \frac{1}{x_1}$. Pour $i \geq 2$, si on suppose définis $n_1, n_2, \ldots, n_{i-1}$, on pose $x_i = x - \frac{1}{n_1} - \cdots - \frac{1}{n_{i-1}}$. Si x_i n'est pas nul, on définit alors n_i comme le plus petit entier $\geq \frac{1}{x_i}$.

1. Traduire par une inégalité la condition de définition de l'entier n_i.
2. Établir une relation liant x_i, x_{i+1} et n_i.
3. Établir les inégalités suivantes, pour $i \geq 1$:
$$0 \leq x_i < 1, \quad n_i > 1 \quad \text{et} \quad x_{i+1} < \frac{1}{n_i}.$$
4. Montrer que la suite (n_i) est strictement croissante.

On écrit désormais le rationnel x_i (pour $i \geq 1$) sous forme de fraction irréductible : $x_i = \frac{r_i}{s_i}$.

5. On suppose $r_i > 1$.
   (i) Montrer que $n_i - 1$ est le quotient dans la division euclidienne de s_i par r_i.
   (ii) Montrer que l'on a $r_{i+1} < r_i$.
6. Montrer qu'il existe un entier p tel que $r_p = 1$ et conclure que x admet une décomposition égyptienne.
7. Appliquer cette procédure pour écrire une décomposition égyptienne de $\frac{3}{16}$.
8. En vous munissant d'une calculatrice ou d'un peu de patience, faire de même avec $\frac{5}{121}$. Calculer par ailleurs
$$\frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$
Quel reproche formuler à l'encontre de cet algorithme ?

2.3 Algorithme de Golomb

Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel avec $0 < a < 1$ et on suppose de plus que c'est l'écriture en fraction irréductible de x.

1. Justifier qu'il existe un couple d'entiers (r, s) avec $0 < r < s < b$ et $as = 1 + br$.
2. En remarquant que $\frac{a}{b} = \frac{1}{bs} + \frac{r}{s}$, écrire un pseudo-code donnant un algorithme fournissant une décomposition égyptienne et vérifier que cet algorithme termine.
3. Éxecuter cet algorithme avec $x = \frac{3}{16}$.
4. Quel est l'avantage de cet algorithme ? Inconvénient ?

2.4 Le cas général des rationnels

On considère maintenant le cas général $x \in \mathbb{Q}^+$. Compte tenu de ce qui précède, on suppose même $x \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que
$$1 + \cdots + \frac{1}{n} \leq x < 1 + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$
Indication : se souvenir de la série harmonique.
2. Conlure que x admet une écriture égyptienne au sens du théorème ci-dessus.

3 Les triplets pythagoriciens

On étudie l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{avec } (x, y, z) \in \mathbb{N}^3. \tag{1}$$

1. Que peut-on dire si $xyz = 0$?

À partir de maintenant, nous supposerons $xyz > 0$ et x, y et z premiers entre eux ($\text{pgcd}(x, y, z) = 1$).

2. Montrer que l'un des nombres est pair et que les deux autres sont impairs.
3. Montrer que z est nécessairement impair (penser modulo 4).

Pour fixer les idées, on suppose que y est pair et on note $y = 2w$.

4. Justifier que l'on peut écrire $z-x = 2u$ et $z+x = 2v$ (avec u et v dans $\mathbb{N}^*$). Montrer que l'équation (1) s'écrit aussi
$$w^2 = uv \tag{2}$$
les variables (u, v, w).
5. Justifier que $\text{pgcd}(u, v, w) = 1$. En utilisant l'équation (2), montrer également que u et v sont premiers entre eux.
6. Toujours en utilisant l'équation (2), montrer que l'on peut écrire $u = a^2$ et $v = b^2$ avec a et b premiers entre eux et de parité différente.
7. Conclure quant à la forme des solutions (x, y, z) (en termes de a et b).

Pour finir, reprenons le cas général : x, y et z ne sont plus supposés premiers entre eux.

8. En notant $d = \text{pgcd}(x, y, z)$, donner la forme générale des solutions de l'équation (1).