Université de Rennes

Arithmétique

Séance 4

1 Rituel

Présentation de l'algorithle d'Euclide.

2 Travail en séance

Exercice 1 [Un résultat d'Erdös et Selfridge (Terracher 2002, p. 374)]

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls supposés premiers entre eux. Montrer que, si ab est un cube, alors a et b sont eux-mêmes des cubes.

2. En déduire que le produit de trois entiers naturels non nuls consécutifs n'est jamais un cube.

3. Même question avec *carré* à la place de *cube*.

Exercice 2 [Nombres parfaits (Terracher 2002, p. 375)]

Un nombre entier est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts. Ainsi, 6 et 28 sont des nombres parfaits, puisque :

$$6 = 1 + 2 + 3 \quad \text{et} \quad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

1. Vérifier que 496 et 8128 sont des nombres parfaits (connus du mathématicien grec Nicomaque).

2. Montrer que, si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors $m = 2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait [1] (Euclide, *Éléments*, livre IX).

3. Si $n \geq 2$ est tel que $2^n - 1$ est premier, que peut-on dire de n ?

3 Travail à faire

Présentation de la décomposition en facteurs premiers (énoncé précis, démonstration, illustration).

1. La résolution de l'exercice 79 p. 392 du même ouvrage permet de montrer que les noombres parfaits *pairs* sont tous de cette forme. On ignore encore aujourd'hui s'il existe des nombres parfaits impairs.