Université de Rennes

Arithmétique

Séance 1

1 l'UE PCAP

Présentation des enjeux (forts !) de l'UE ; CAPE(S) OU PAS CAPE(S) ?

2 Travail en séance

Exercice 1 [Problème de divisibilité (Terracher 2002, p. 342)]

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $7 + 6^n + 5^{2n} + 4^{3n}$ est divisible par 3.
On explicitera le raisonnement utilisé.

Exercice 2 [Dans le même esprit ?]

Soit $\mathcal{P}(n)$: $10^n + 7$ est multiple de 9.

— Montrer que $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire dans $\mathbb{N}$

— Que pensez-vous de la valeur de vérité de $\mathcal{P}(n)$?

Exercice 3 [En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?]

Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleur sont tous de la même couleur.

— $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

— On a donc montré que tous les crayons en nombre infini sont de la même couleur.

Exercice 4 [Un résultat bien connu]

Montrer que tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
On explicitera le raisonnement utilisé.

Exercice 5 [Un résultat bien connu]

Démontrer l'infinitude des nombres premiers.
On explicitera le raisonnement utilisé.

Exercice 6 [Un résultat bien connu]

Démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$; quel type de raisonnement utilisez-vous dans cette résolution ?

3 Travail à faire

1. Présentation du raisonnement par récurrence ; rédaction précise. Puis,illustration à partir des éventuels exercices de cette feuille.
2. Présenter une résolution de cette exercice sous forme de *carte mentale* :
   Soit n un entier naturel qui s'écrit $n = 10a + b$; a et b dans $\mathbb{N}$.
   Montrer que n est divisible par 7 si, et seulement si, $a - 2b$ est divisible par 7.