Algèbre linéaire et bilinéaire

Correction du contrôle continu n° 1

Exercice 1 [correction]

1. Le polynôme minimal μ_u est le générateur unitaire de l'idéal

$$I_u = \{P \in k[X] : P(u) = 0\}.$$

Pour $x \in E$ fixé, le polynôme minimal ponctuel $\mu_{u,x}$ est le générateur unitaire de l'idéal

$$I_{u,x} = \{P \in k[X] : P(u)(x) = 0\}.$$

L'inclusion $I_u \subseteq I_{u,x}$ se traduit par la relation de divisiblité $\mu_{u,x}|\mu_u$.

2. Soit E un k-espace vectoriel de dimension $\geqslant 1$ (cela vaut en particulier pour $E = k^2$). On considère le cas particulier $u = \mathrm{Id}_E \in \mathrm{End}(E)$ et $x = 0$. On a alors $\mu_{\mathrm{Id}_E} = X - 1$. Par ailleurs $I_{\mathrm{Id}_E,0} = k[X]$ et l'on a donc $\mu_{\mathrm{Id}_E,0} = 1$.

Exercice 2 [correction]

1. Il suffit de comparer les applications linéaires ${}^t u \phi_{\mathcal{C}} u$ et $\phi_{\mathcal{B}}$ sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\phi_{\mathcal{B}}(e_i) = e_i^*$$

par définition. Par ailleurs

$$\begin{aligned} {}^t u \phi_{\mathcal{C}} u(e_i) &= {}^t u \phi_{\mathcal{C}}(f_i) = {}^t u(f_i^*) = f_i^* \circ u \\ &= \sum_{j=1}^{n} (f_i^* \circ u)(e_j) e_j^* = \sum_{j=1}^{n} f_i^*(f_j) e_j^* = e_i^*. \end{aligned}$$

ce qui montre que ${}^t u \phi_{\mathcal{C}} u = \phi_{\mathcal{B}}$ dans $\mathrm{Hom}_k(E, E^*)$.

2. Soit M la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Le résultat de la question **1** implique que

$$\begin{aligned} I_n &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}(\phi_{\mathcal{B}}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}({}^t u \phi_{\mathcal{C}} u) \\ &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}({}^t u) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}(\phi_{\mathcal{C}}) \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \\ &= {}^t M \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}(\phi_{\mathcal{C}}) M \qquad (1) \end{aligned}$$

puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}({}^t u) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = {}^t M$. Si $\phi_{\mathcal{B}} = \phi_{\mathcal{C}}$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}(\phi_{\mathcal{C}}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}(\phi_{\mathcal{B}}) = I_n$$

et l'on a donc ${}^t MM = I_n$. Réciproquement si ${}^t MM = I_n$, alors M est inversible d'inverse ${}^t M$ et l'égalité (1) nous donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}(\phi_{\mathcal{C}}) = M{}^tM = I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}^*}(\phi_{\mathcal{B}})$$

ce qui traduit par $\phi_{\mathcal{B}} = \phi_{\mathcal{C}}$.

3. Supposons qu'un tel isomorphisme existe. Alors pour toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(k)$ on doit avoir ${}^t MM = I_n$. En effet, on peut voir M comme la matrice de passage d'une base $\mathcal{C}$ à une base $\mathcal{B}$. L'on a donc

$$M = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

où u est l'endomorphisme défini à la question **1** et il suffit d'appliquer la question **2** pour obtenir ${}^t MM = I_n$. Supposons maintenant $n \geqslant 2$ et considérons, par exemple, la matrice inversible

$$M = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$${}^t MM = \begin{pmatrix} {}^t JJ & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \neq I_2$$

puisque

$${}^t JJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq I_2.$$

On voit donc que pour un k-espace vectoriel de dimension $\geqslant 2$ il n'existe pas d'isomorphisme envoyant toute base sur sa base duale. Pour $n = 1$ et $k \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$, on peut trouver $\lambda \in k$ non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$ et à nouveau il n'existe pas d'isomorphisme envoyant toute base sur sa base duale

Exercice 3 [correction]

1. La division eudlidienne assure que pour tout $A \in k[X]$ il existe un couple $(Q, R) \in k[X] \times k[X]_{n-1}$ tel que $A = QP + R$. On a donc

$$k[X]_{n-1} + Pk[X] = k[X].$$

Il reste à montrer que la somme est directe. Si $A \in k[X]_{n-1} \cap Pk[X]$ est non nul, alors le degré de A vérifie simultanément $\deg(A) \leqslant n-1$ et $\deg(A) \geqslant \deg(P) = n$ ce qui est absurde. Ainsi $k[X]_{n-1}$ est un supplémentaire de $Pk[X]$ dans $k[X]$. Considérons maintenant l'application linéaire

$$\begin{aligned} k[X]_{n-1} &\to E \\ A &\mapsto \pi(A). \end{aligned} \tag{2}$$

Pour $x \in E$, il existe $C \in k[X]$ tel que $\pi(C) = x$ puis $A \in k[X]_{n-1}$, $B \in Pk[X]$ tels que $C = A + B$. On a donc $x = \pi(C) = \pi(A) + \pi(B) = \pi(A)$ puisque $\mathrm{Ker}(\pi) = Pk[X]$. Cela montre que (2) est une application surjective. Si $A \in k[X]_{n-1}$ vérifie $\pi(A) = 0$ alors $A \in k[X]_{n-1} \cap Pk[X] = \{0\}$ et l'on a donc $A = 0$. Cela assure que (2) est également injective et conclut.

2. Les polynômes $P_i = (X-\lambda)^{n-i}$ avec $i \in [\![1, n]\!]$ forment une base de $k[X]_{n-1}$ (ils constituent en effet une famille de n polynômes de degré échelonné dans $k[X]_{n-1}$ qui est de dimension n). L'isomorphisme de la question **1** assure donc qu'en posant $e_i = \pi(P_i)$ on obtient une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Par définition de u

$$\begin{aligned} u(e_1) &= u(\pi(P_1)) = \pi(XP_1) = \pi(P + \lambda P_1) = \pi(P) + \lambda\pi(P_1) = \lambda\pi(P_1) \\ &= \lambda e_1. \end{aligned}$$

et pour $i \in [\![2, n]\!]$

$$\begin{aligned} u(e_i) &= u(\pi(P_i)) = \pi(XP_i) = \pi((X-\lambda)P_i + \lambda P_i) = \pi(P_{i-1} + \lambda P_i) = \pi(P_{i-1}) + \lambda\pi(P_i) \\ &= e_{i-1} + \lambda e_i. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J_{\lambda,n}.$$