Algèbre linéaire et bilinéaire

Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1 [Sous-espaces de codimension 1]

1. Soit E un espace vectoriel sur un corps k et $F \subset E$ un sous-espace de E. Montrer que $\operatorname{codim}_E(F) = 1$ si et seulement s'il existe $0 \neq \varphi \in E^*$ avec $F = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

2. Montrer également que deux formes linéaires φ et $\psi \in E^*$ sont proportionnelles si et seulement si $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker}(\psi)$.

Exercice 2 [Sous-espace du quotient]

Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose que $G \subset F$. Montrer que F/G est un sous-espace vectoriel de E/G et qu'il existe un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels $(E/G)/(F/G) \simeq E/F$.

2. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel $(F+G)/G \simeq F/(F\cap G)$.

Exercice 3 [Dimension et codimension]

Soient E un espace vectoriel sur k et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.

1. Montrer que E est de dimension finie si et seulement si F et E/F le sont également.

2. Donner un exemple où F et E/F sont de dimension infinie.

Exercice 4 [Un compagnon de route !]

On se donne $n \geq 1$ un entier, k un corps et P un polynôme unitaire de degré n.

1. Montrer que le quotient $E_P := k[X]/(P)$ est un k-espace vectoriel de dimension n (la notation (P) désigne l'idéal engendré par P) et que la multiplication par X induit naturellement un endomorphisme de E_P (noté u_P dans la suite).

2. Calculer le polynôme caractéristique de u_P en écrivant sa matrice dans une base naturelle.

3. En déduire que si k n'est pas algébriquement clos, il existe un espace E de dimension finie sur k et un endomorphisme de E sans valeurs propres dans k.

Exercice 5 [Bases duales]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base pré-duale de $\mathcal{B}$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n) = j_E^{-1}(\mathcal{B}^*)$ où $j_E : E \to E^{**}$ est la bidualité canonique de E et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 6 [Base pré-duale I]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient f_1^*, f_2^* et f_3^* les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, \quad f_2^* = -e_1^* + 2e_3^* \quad \text{et} \quad f_3^* = e_1^* + 3e_2^*.$$

1. Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^*

2. Déterminer la base (f_1, f_2, f_3) de E dont elle est la base duale.

Exercice 7 [Bases pré-duales II]

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, ainsi que les familles de formes linéaires suivantes :

(1) $\varphi_i(P) := \frac{P^{(i)}(a)}{i!}$ avec $i = 0 \dots n$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé,

(2) $\varphi_i(P) := P(a_i)$ avec $i = 0 \dots n$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels fixés,

(3) $\varphi_i(P) := \int_0^{a_i} P(t)dt$ avec $i = 0 \dots n$ et $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels non nuls fixés.

1. Montrer que ces familles forment des bases de E^*.

2. Fournir les bases de E dont elles sont duales.

3. Si $(P_i)_{i=0 \dots n}$ désigne la base duale de $(\varphi_i)_{i=0 \dots n}$, comment appelle-t-on les formules $P = \sum_{i=0}^n \varphi_i(P) P_i$ dans les cas (1) et (2) ?

Exercice 8 [Dual d'un endomorphisme I]

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie. On considère ${}^t u : E^* \to E^*$ l'endomorphisme dual associé à u défini par ${}^t u(f) = f \circ u$.

1. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et on note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans cette base. Donner la matrice de ${}^t u$ dans la base $\mathcal{B}^*$, base duale de $\mathcal{B}$.

2. En déduire que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1^*}^{\mathcal{B}_2^*} = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}.$$

Exercice 9 [Dual d'un endomorphisme II]

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie (sur k) et $u : E \to F$ un application linéaire. On considère ${}^t u : F^* \to E^*$ l'endomorphisme dual associé à u défini par ${}^t u(f) = f \circ u$.

1. Calculer Ker$({}^t u)$ et Im$({}^t u)$ en fonction de Ker(u) et Im(u).

2. En déduire que ${}^t u$ est injective (resp. surjective) si et seulement si u est surjective (resp. injective).

3. Exprimer la relation qui existe entre ${}^t({}^t u) : E^{**} \to F^{**}$ et u.

Exercice 10 [Dual de $\mathrm{End}(E)$]

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k.

1. On se donne $u \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que l'application :

$$\mathrm{Tr}(u \circ -) : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & k \\ v & \longmapsto & \mathrm{Tr}(u \circ v). \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\mathrm{End}(E)$.

2. Montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & \mathrm{End}(E)^* \\ u & \longmapsto & \mathrm{Tr}(u \circ -). \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

3. Que peut-on dire d'une forme linéaire $\varphi \in \mathrm{End}(E)^*$ vérifiant $\varphi(u \circ v) = \varphi(v \circ u)$ pour tout $(u, v) \in \mathrm{End}(E)$?

Exercice 11 [L'algèbre $\mathrm{End}(E)$]

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension finie (sur un corps quelconque).

1. Montrer que les automorphismes d'algèbre de $\mathrm{End}(E)$ sont intérieurs :
si $\varphi : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$ est un automorphisme vérifiant $\varphi(u \circ v) = \varphi(u) \circ \varphi(v)$ pour tout $(u, v) \in \mathrm{End}(E)$, alors il existe $u_\varphi \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\forall v \in \mathrm{End}(E)$, $\varphi(v) = u_\varphi^{-1} \circ v \circ u_\varphi$.

2. Montrer que $\mathrm{End}(E)$ est une algèbre simple : les seuls idéaux bilatères de $\mathrm{End}(E)$ sont $\{0\}$ et $\mathrm{End}(E)$ elle-même (un idéal bilatère, c'est un idéal à droite et à gauche).

Exercice 12 [Applications de rang fini]

Soient E et F deux espaces vectoriels (sur un corps k).

1. Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. Montrer que f est de rang 1 si et seulement s'il existe $\varphi \in E^*$ et $w \in F$ tels que $f(x) = \varphi(x)w$ pour tout $x \in E$.

2. Plus généralement, montrer que f est de rang fini si et seulement s'il existe une famille finie $(\varphi_i, w_i)_{i=1}^n \in (E^* \times F)^n$ telle que

$$\forall\, x \in E,\ f(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) w_i.$$

3. Si f est de rang fini (noté $r = \mathrm{rg}(f)$), montrer que

$$r = \min\left(n \geq 0 \mid \exists\, (\varphi_i, w_i)_{i=1}^n \in (E^* \times F)^n,\ f = \sum_{i=1}^n \varphi_i w_i\right).$$

Exercice 13 [donné au CC1 en 2024-2025]

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on note $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$ et $\phi_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Hom}(E, E^*)$ l'isomorphisme tel que $\phi_{\mathcal{B}}(e_i) = e_i^*$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ des bases de E. On note $u \in \mathrm{GL}(E)$ l'endomorphisme tel que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

$${}^t u \phi_{\mathcal{C}} u = \phi_{\mathcal{B}}.$$

2. Soit $M \in M_n(k)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $\phi_{\mathcal{C}} = \phi_{\mathcal{B}}$ si et seulement si ${}^t M M = I_n$.

3. En déduire qu'il existe pas d'isomorphisme entre E et E^* qui envoie toute base sur sa base duale.