Algèbre linéaire et bilinéaire

Espaces euclidiens et hermitiens

Exercice 1 [Un calcul d'adjoint]

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose
$$(A, B) = \operatorname{Tr}\left({}^t A\overline{B}\right).$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{C})$ et que la norme associée vérifie :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$$

2. Calculer la norme de la forme linéaire

$$\operatorname{Tr}\colon \left\{ \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ A & \longmapsto & \operatorname{Tr}(A). \end{array} \right.$$

3. On fixe $A \in M_n(\mathbb{C})$ et on considère l'application linéaire

$$\Phi_A\colon \left\{ \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & {}^tAXA. \end{array} \right.$$

Calculer l'adjoint (pour le produit scalaire ci-dessus) de Φ_A.

Exercice 2 [Matrice de Gram]

Soit E un espace euclidien dont on note $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ le produit scalaire. Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs de E, on pose

$$G(u_1, \dots, u_p) = (\langle u_i, u_j\rangle)_{1\leq i,j\leq p} \in M_p(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que $G(u_1, \dots, u_p)$ est symétrique positive et que

$$\operatorname{rg}(G(u_1, \dots, u_p)) = \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p).$$

2. Montrer que toute matrice symétrique positive peut s'écrire sous la forme $G(u_1, \dots, u_p)$.

3. Soient $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ deux familles de vecteurs de E. Montrer qu'il existe $f \in O(E)$ tel que $f(u_i) = v_i$ pour tout $i = 1 \dots p$ si et seulement si $G(u_1, \dots, u_p) = G(v_1, \dots, v_p)$.

Exercice 3 [Endomorphismes hermitiens]

Soit E un espace **hermitien**. On notera $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ le produit hermitien et $\mathcal{H}(E)$ (resp. $\mathcal{H}^+(E)$) l'ensemble des endomorphismes hermitiens (resp. hermitiens positifs) de E.

1. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ vérifiant $\forall\, x \in E,\ \langle x, u(x)\rangle = 0$. Montrer que $u = 0$. Que peut-on dire si E est seulement supposé euclidien ?

2. Soit toujours $u \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que $u \in \mathcal{H}(E)$ (resp. $u \in \mathcal{H}^+(E)$) si et seulement si $\forall\, x \in E,\ \langle x, u(x)\rangle \in \mathbb{R}$ (resp. $\in \mathbb{R}^+$).

3. Pour $u \in \mathrm{End}(E)$, établir les égalités :

$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^* \circ u) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u \circ u^*).$$

4. Soit $u \in \mathcal{H}^+(E)$ un endomorphisme hermitien positif. Montrer que

$$x \in \mathrm{Ker}(u) \Longleftrightarrow \langle x, u(x)\rangle = 0.$$

En déduire que si $u, v \in \mathcal{H}^+(E)$ sont tels que $u - v \in \mathcal{H}^+(E)$, alors

$$\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u).$$

5. Soient u et v deux endomorphismes de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \lambda u \circ u^* - v \circ v^* \in \mathcal{H}^+(E)$;

(*ii*) $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$;

(*iii*) $\exists\, w \in \mathrm{End}(E),\ v = u \circ w$.

Exercice 4 [Inégalité de Hadamard]

Soit $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{H}_n^+$ une matrice hermitienne positive.

1. Établir l'inégalité $0 \le \det(M) \le \prod_{i=1}^n m_{i,i}$.

2. En écrivant $M = A + iB$, montrer que A est symétrique positive et que B est antisymétrique. Montrer enfin que $\det(M) \le \det(A)$.

Exercice 5 [Un critère de diagonalisabilité]

Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Montrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice symétrique définie positive S telle que ${}^tA = SAS^{-1}$.

Indication : montrer que tout matrice symétrique définie positive s'écrit $S = {}^tPP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 [Endomorphismes de la boule unité]

Soit E un espace euclidien et $u \in L(E)$.

1. Montrer que $\|u^*\| = \|u\|$ (où $\|u\|$ désigne la norme subordonnée à la norme euclidienne de E).

2. En déduire que, si $\|u\| \leq 1$, on a $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(u^* - \mathrm{Id})$ (on pourra développer $\|u^*(x) - x\|^2$ pour $x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et utiliser la première question). En conclure que E se décompose en une somme orthogonale :

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}).$$

3. Toujours sous l'hypothèse $\|u\| \leq 1$, montrer que la suite

$$u_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k$$

converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 7 [Réduction des endomorphismes normaux — cas réel]

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathrm{End}(E)$.

1. Montrer que u admet toujours une droite ou un plan stable.

2. À partir de maintenant, on suppose u normal ($u \circ u^* = u^* \circ u$). Montrer que si $F \subset E$ est stable par E, $F^\perp$ est également stable par u.

3. En déduire qu'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de taille 1 ou 2 et préciser la forme des blocs 2×2.

Pour aller plus loin

Exercice 8 [Matrices symétriques complexes]

Dans tout cet exercice, on note $S_n(\mathbb{C})$ (respectivement $S_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques complexes (respectivement réelles).

Questions préliminaires :

1. En considérant la matrice

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

montrer qu'une matrice M de $S_n(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement diagonalisable. Que dire si $M \in S_n(\mathbb{R})$?

2. Soit $M \in S_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique. Justifier que M est congruente à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(pour un certain entier $1 \leq r \leq n$) et en déduire qu'il existe $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $M = {}^tPP$. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, peut-on toujours trouver $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ comme ci-dessus ?

3. Soient A et $B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. En raisonnant par récurrence sur $n \geq 1$, montrer qu'il existe $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale tel que ${}^tOAO$ et ${}^tOBO$ soient diagonales (et réelles).

Réduction des matrices symétriques complexes :

Dans le reste de l'exercice, on va montrer le résultat suivant : si $M \in S_n(\mathbb{C})$, alors il existe $U \in \mathrm{U}_n$ une matrice unitaire et $0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$ des réels positifs tels que

$$M = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} {}^tU.$$

4. Si $M \in S_n(\mathbb{C})$, on considère $\overline{M}M$. Montrer que $\overline{M}M$ est une matrice hermitienne positive et qu'il existe $V \in \mathrm{U}_n$ telle que ${}^t\overline{V}\overline{M}MV = D$ avec D une matrice diagonale avec des coefficients réels positifs.

5. On pose $N := {}^tVMV$. Vérifier que N est symétrique et calculer $\overline{N}N$. On écrit $N = A+iB$ avec A et $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. En exprimant $\overline{N}N$ en fonction de A et B, montrer que A et B commutent : $AB = BA$. Vérifier également que A et B sont symétriques.

6. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tONO$ est diagonale et conclure.

7. Donner une matrice U et des réels positifs λ_1, λ_2 pour l'exemple de la matrice M_2 de la question **1**.

Exercice 9 [Décomposition polaire]

On note $\mathcal{H}_n^+$ (resp. $\mathcal{H}_n^{++}$) l'ensemble des matrices hermitiennes positives (resp. définies positives).

1. Montrer que si $S \in \mathcal{H}_n^+$, il existe une unique matrice $R \in \mathcal{H}_n^+$ telle que $S = R^2$. Pour l'unicité, on se restreindra à un espace propre de S en observant que ce dernier est stable par R.

2. Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ alors il existe un unique couple $(S, U) \in \mathcal{H}_n^{++} \times \mathrm{U}_n$ vérifiant $A = SU$ (le couple (S, U) s'appelle la *décomposition polaire* de A).