



Algèbre linéaire et bilinéaire

Formes quadratiques

Exercice 1 [Orthogonalité]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q (de forme polaire f_q et de noyau $N(q)$). Si $F \subset E$ est un sous-espace, on note $F^\perp \subset E$ son orthogonal pour la forme q :

$$F^\perp := \{x \in E \mid \forall y \in F, f_q(x, y) = 0\}.$$

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces de E , alors $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. On note $\hat{f}_q : E \rightarrow E^*$ l'application induite par f_q . Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace, alors on a

$$F^\perp = {}^\circ(\hat{f}_q(F))$$

où ${}^\circ A$ (avec $A \subset E^*$) est l'orthogonal pour la dualité, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de E qui s'annulent sur les éléments de A . En déduire que

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F) + \dim(N(q) \cap F). \quad (1)$$

3. Si F est un sous-espace, montrer que $F + N(q) \subset F^{\perp\perp}$. Calculer $\dim(F^{\perp\perp})$ et conclure que $F + N(q) = F^{\perp\perp}$ grâce à la formule de Grassman.
4. Vérifier ces affirmations sur l'espace $E = \mathbb{k}^3$ muni de la forme quadratique dont l'expression dans la base canonique est $q(x, y, z) = 2xy$ et en fixant $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \text{Vect}(e_2, e_3)$.

Exercice 2 [Orthogonalité II]

On se donne (E, q) comme dans l'exercice 1.

1. Pour F et G deux sous-espaces de E , montrer que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
2. On considère le cas $E = \mathbb{k}^2$ et $q(x, y) = x^2$. On pose alors $F = \mathbb{k} \cdot (1, 1)$ et $G = \mathbb{k} \cdot (1, -1)$. Calculer F^\perp et G^\perp et montrer que l'inclusion ci-dessus peut être stricte.
3. Montrer que si q est non dégénérée, on a l'égalité $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$.

Exercice 3 [Restriction d'une forme non dégénérée]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q et F un sous-espace de E .

1. Calculer $N(q|_F)$ et en déduire que $q|_F$ est non dégénérée si et seulement si $F \cap F^\perp = \{0\}$.
2. On suppose maintenant q non dégénérée (sur E). Montrer que $q|_F$ est non dégénérée si et seulement si $E = F \oplus F^\perp$ (utiliser la formule (1)).

Exercice 4 [Forme quadratique sur les matrices]

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB)$ sur $M_n(k)$ (avec k un corps de caractéristique différente de 2).

1. Montrer que cette forme est non dégénérée.
2. Calculer sa signature lorsque $k = \mathbb{R}$ (penser aux matrices symétriques et antisymétriques).
3. Que se passe-t-il si l'on considère la forme bilinéaire $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)$?

Exercice 5 [Algorithme de Gauß]

Appliquer l'algorithme de Gauß aux formes quadratiques réelles suivantes :

- (1) $q_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz$;
- (2) $q_2(x, y, z) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$;
- (3) $q_3(x, y, z, t) = xy + yz + zt + tx$;
- (4) $q_4(x, y, z, t, s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st$.

Dans chaque cas, préciser la signature de la forme quadratique.

Exercice 6 [Forme quadratique définie (cas réel)]

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} et q une forme quadratique anisotrope : $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Montrer que q est définie positive ou définie négative.

Exercice 7 [Partie réelle d'une forme complexe]

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie et q une forme quadratique sur E . Montrer que l'expression $q_{\mathbb{R}}(x) = \text{Re}(q(x))$ définit une forme quadratique sur le sous-espace réel E (en oubliant que E est un \mathbb{C} -espace vectoriel) et calculer la signature de $q_{\mathbb{R}}$ en fonction du rang de q .

POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 8 [Relation de congruence]

On considère la relation de congruence sur $M_2(\mathbb{C})$ tout entier et on cherche à décrire les classes d'équivalence $M \sim N \iff \exists P \in GL_2(\mathbb{C}), M = PN {}^tP$.

1. Montrer que la décomposition $M_2(\mathbb{C}) = S_2(\mathbb{C}) \oplus A_2(\mathbb{C})$ est stable sous l'action de $GL_2(\mathbb{C})$. Donner un représentant de chaque classe de $S_2(\mathbb{C})$ et de $A_2(\mathbb{C})$.

2. On suppose que $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique (avec $S \neq 0 \neq A$).

Si S est de rang 1, montrer d'abord que M est congruente à $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Si maintenant S est de rang 2, montrer que M est congruente à $M_z := \begin{pmatrix} 1 & z \\ -z & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $M_z \sim M_w \iff z = \pm w$.

4. Conclure que les classes de congruences sur $M_2(\mathbb{C})$ sont représentées par les matrices

$$0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_z \sim M_{-z} \quad (z \neq 0).$$

Exercice 9 [Formes sur \mathbb{Q}]

1. Montrer que si p_1 et p_2 sont deux entiers premiers distincts, alors $\overline{p_1} \neq \overline{p_2}$ dans $\mathbb{Q}^\times / (\mathbb{Q}^\times)^2$.

2. En déduire que \mathbb{Q}^n admet une infinité de formes quadratiques non congruentes.

Exercice 10 [Sous-espaces totalement isotropes]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni que q non dégénérée.

1. Si F est un sous-espace *totalement isotrope* (cela signifie que $q|_F = 0$), montrer que $F \subset F^\perp$ et en déduire que $2 \dim(F) \leq \dim(E)$.

2. Donner un exemple où l'égalité se produit.

3. On suppose que E possède un vecteur isotrope non nul $x \in E$ (avec donc $q(x) = 0$). Montrer qu'il existe $y \in E$ avec $q(y) = 0$ et $f_q(x, y) = 1$, c'est-à-dire que E contient un plan hyperbolique U .

4. Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale

$$E = U_1 \oplus \dots \oplus U_m \oplus F$$

avec $q|_{U_i}$ hyperbolique pour tout $i = 1 \dots m$ et $q|_F$ *anisotrope*, c'est-à-dire : $x \in F$ et $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

5. Montrer enfin que $2m \leq \dim(E)$.