Algèbre linéaire et bilinéaire

Réduction des endomorphismes

Exercice 1 [Application du lemme des noyaux]

Soient $u \in \mathrm{End}(E)$ et $(P, Q) \in k[X]$ deux polynômes. Décrire les noyaux et images de $\mathrm{pgcd}(P, Q)(u)$ et de $\mathrm{ppcm}(P, Q)(u)$ en fonction de ceux de $P(u)$ et $Q(u)$.

Exercice 2 [Noyaux itérés]

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ (avec E de dimension finie). Pour $i \geq 0$, on note $E_i := \mathrm{Ker}(u^i) \subset E$ les noyaux itérés de u et $d_i := \dim(E_i)$ leurs dimensions.

1. Montrer que $E_i \subset E_{i+1}$ mais que la suite $(d_{i+1} - d_i)_{i\geq 0}$ est décroissante.

2. On considère p le plus petit entier vérifiant $E_p = E_{p+1}$. Montrer que $E = E_p \oplus \mathrm{Im}(u^p)$. En déduire que, dans une base $\mathcal{B}$ bien choisie, la matrice de u est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

avec N nilpotente et A inversible (A ou N pouvant être triviale).

3. Montrer que l'entier p apparaissant ci-dessus est aussi l'ordre d'annulation en 0 du polynôme minimal de u : $\mu_u(X) = X^p Q(X)$ avec $Q(0) \neq 0$.

Exercice 3 [Algèbre d'un élément inversible]

1. Soit $u \in \mathrm{GL}(E)$ un endomorphisme inversible de E (avec E de dimension finie sur k). Montrer que $u^{-1} \in k[u]$.

2. Plus généralement, si $u \in \mathrm{End}(E)$ et $P \in k[X]$ un polynôme, montrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P est premier avec μ_u et que, dans ce cas, $P(u)^{-1}$ est encore un polynôme en u.

Exercice 4 [nilpotent cyclique]

Que peut-on dire (de la forme de Jordan) d'un endomorphisme nilpotent et cyclique ?

Exercice 5 [Restriction d'endomorphisme cyclique]

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme cyclique et $F \subset E$ un sous-espace stable par u. Montrer que $u_{|F}$ est cyclique. Pour cela, introduire $x \in E$ un vecteur tel que $k[u] \cdot x = E$ et considérer

$$\mathcal{I} := \{P \in k[X] \mid P(u)(x) \in F\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal de $k[X]$.

2. Soit Q un générateur de $\mathcal{I}$. Montrer que $y = Q(u)(x)$ vérifie $k\left[u_{|F}\right] \cdot y = F$.

Exercice 6 [Frobenius implique Jordan]

En utilisant les exercices 4 et 5, montrer que la réduction de Frobenius implique celle de Jordan.

Exercice 7 [Sous-espace stable d'un endomorphisme cyclique]

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme cyclique de E et $F \subset E$ un sous-espace stable par u. D'après l'exercice 5, nous savons que $u_{|F}$ est encore cyclique.

1. Soit $Q = \chi_{u_{|F}}$. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(Q(u))$.

2. En déduire que E n'a qu'un nombre fini de sous-espaces stables par u.

3. Réciproquement, montrer que, **si le corps de base est infini**, alors tout endomorphisme n'ayant qu'un nombre fini de sous-espaces stables est cyclique.

Exercice 8 [Un exemple non cyclique]

Soit u l'endomorphisme de $E := \mathbb{R}^4$ associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le sous-espace $F := \mathrm{Vect}(e_1, e_3, e_4)$ est stable par u mais qu'il n'est pas de la forme $\mathrm{Ker}(P(u))$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour ce dernier point, remarquer que $u^2 = 0$ et en déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \{0\},\ \mathrm{Vect}(e_1, e_3),\ \text{ou } E.$$

Exercice 9 [Jordanisation]

Donner les formes de Jordan et les matrices de changements de base des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 [Une caractérisation des nilpotents]

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ avec E de dimension finie sur k corps de caractéristique nulle. Montrer que

$$u \text{ est nilpotent } \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, \dim(E),\ \mathrm{Tr}(u^j) = 0.$$

Que se passe-t-il si k est de caractéristique $p > 0$?

Exercice 11 [Réduites de Jordan en petite dimension]

Soit $N \in M_n(k)$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence d et de rang r.

1. Montrer que si $n \leq 6$ alors à d et r fixés il n'y a qu'une seule forme de Jordan possible.

2. Donner un exemple de deux matrices N_1 et $N_2 \in M_7(k)$ d'indice de nilpotence 3, de rang 4 mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 12 [Détermination de réduites de Jordan]

1. Déterminer les formes possibles des endomorphismes $u \in \mathrm{End}(E)$ vérifiant $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$.

2. Que dire d'un endomorphisme nilpotent vérifiant $\dim \ker(u) = 1$?

3. Décrire la réduite de Jordan d'une matrice nilpotente vérifiant $\mathrm{rg}(M) = r$ et $\mathrm{rg}(M^2) = r - 1$.

Exercice 13 [Classes de similitude]

Décrire explicitement les classes de similitudes dans $M_2(\mathbb{C})$ et $M_2(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire fournir une liste de représentant de chaque classe). Pour les plus courageu·ses, même exercice avec $M_3(\mathbb{C})$ et $M_3(\mathbb{R})$.

Pour aller plus loin

Exercice 14 [Commutant d'un endomorphisme]

Pour $u \in \mathrm{End}(E)$, on considère le *commutant* de u

$$\mathcal{C}(u) := \{v \in \mathrm{End}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathrm{End}(E)$ et que $k[u] \subset \mathcal{C}(u)$.

2. Montrer que $k[u] = \mathcal{C}(u)$ si et seulement si u est cyclique. Voici quelques indications :

- $\Leftarrow$ si u est cyclique de vecteur cyclique $x \in E$, montrer qu'un endomorphisme $v \in \mathcal{C}(u)$ est connu dès que l'on connaît $v(x)$; en déduire que c'est automatiquement un polynôme en u.
- $\Rightarrow$ si u n'est pas cyclique, il y a au moins deux morceaux dans la décomposition de Frobenius $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$ (avec $r \geq 2$). On considère v le projecteur sur le premier facteur (parallèlement aux autres facteurs) : montrer que $v \in \mathcal{C}(u)$ mais que v n'est pas un polynôme en u. En effet, si $v = P(u)$ alors $P(u)_{|E_2} = 0$ et $(P-1)(u)_{|E_1} = 0$ et en déduire une contradiction.

Exercice 15 [Bicommutant d'un endomorphisme]

Montrer que pour tout endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ on a

$$\mathcal{C}\left(\mathcal{C}(u)\right) = k[u].$$

On appelle *bicommutant* l'algèbre $\mathcal{C}\left(\mathcal{C}(u)\right)$.

Indication : Écrire une décomposition de E en composantes cycliques pour u

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i \quad \text{avec } F_i = k[u] \cdot x_i$$

avec de plus $\mu_{u,x_1} = \mu_u$. Considérer les projecteurs π_i sur F_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} F_j$ et vérifier que π_i commutent avec u. En déduire que si $v \in \mathcal{C}\left(\mathcal{C}(u)\right)$ alors v stabilise la décomposition ci-dessus.

En raisonnant par bloc, montrer également qu'il est possible de construire des applications $w_i \in \mathcal{C}(u)$ (pour $i > 1$) telles que $w_i(x_1) = x_i$.

Avec ci-dessus, montrer que $v|_{F_1}$ est un polynôme en u : $v|_{F_1} = P(u|_{F_1})$. Puis conclure que $v = P(u)$.

Exercice 16 [Matrice semblable à sa transposée]

1. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que ${}^tM$ et M sont semblables.

2. Même question si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 17 [Un peu de topologie]

1. Montrer que l' adhérence d'une classe de similitude est une réunion de classes de similitude.

2. Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement 0 est dans l'adhérence de sa classe de similitude.

3. Déterminer l'adhérence de la classe de similitude du bloc de Jordan J_n

4. Montrer qu'une matrice complexe est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée (on peut utiliser la décomposition de Jordan–Chevalley pour l'une des implications).