Algèbre linéaire et bilinéaire

Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1 [Sous-espaces de codimension 1]

1. Soit E un espace vectoriel sur un corps k et $F \subset E$ un sous-espace de E. Montrer que $\mathrm{codim}_E(F) = 1$ si et seulement s'il existe $0 \neq \varphi \in E^*$ avec $F = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

2. Montrer également que deux formes linéaires φ et $\psi \in E^*$ sont proportionnelles si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$.

Exercice 2 [Sous-espace du quotient]

Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On suppose que $G \subset F$. Montrer que F/G est un sous-espace vectoriel de E/G et qu'il existe un isomorphisme naturel d'espaces vectoriels $(E/G)/(F/G) \simeq E/F$.

2. Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel $(F+G)/G \simeq F/(F \cap G)$.

Exercice 3 [Un compagnon de route !]

On se donne $n \geq 1$ un entier, k un corps et P un polynôme unitaire de degré n.

1. Montrer que le quotient $E_P := k[X]/(P)$ est un k-espace vectoriel de dimension n (la notation (P) désigne l'idéal engendré par P) et que la multiplication par X induit naturellement un endomorphisme de E_P (noté u_P dans la suite).

2. Calculer le polynôme caractéristique de u_P en écrivant sa matrice dans une base naturelle.

3. En déduire que si k n'est pas algébriquement clos, il existe un espace E de dimension finie sur k et un endomorphisme de E sans valeurs propres dans k.

Exercice 4 [Bases duales]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base pré-duale de $\mathcal{B}$. Montrer que $(e_1, \dots, e_n) = j_E^{-1}(\mathcal{B}^*)$ où $j_E : E \to E^{**}$ est la bidualité canonique de E et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 5 [Base pré-duale I]

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. Soient f_1^*, f_2^* et f_3^* les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, \quad f_2^* = -e_1^* + 2e_3^* \quad \text{et} \quad f_3^* = e_1^* + 3e_2^*.$$

1. Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^*

2. Déterminer la base (f_1, f_2, f_3) de E dont elle est la base duale.

Exercice 6 [Bases pré-duales II]

Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré $\leq n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, ainsi que les familles de formes linéaires suivantes :

(1) $\varphi_i(P) := \frac{P^{(i)}(a)}{i!}$ avec $i = 0 \ldots n$ et $a \in \mathbb{R}$ fixé,

(2) $\varphi_i(P) := P(a_i)$ avec $i = 0 \ldots n$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels fixés,

(3) $\varphi_i(P) := \int_0^{a_i} P(t)dt$ avec $i = 0 \ldots n$ et $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels non nuls fixés.

1. Montrer que ces familles forment des bases de E^*.

2. Fournir les bases de E dont elles sont duales.

3. Si $(P_i)_{i=0 \ldots n}$ désigne la base duale de $(\varphi_i)_{i=0 \ldots n}$, comment appelle-t-on les formules $P = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P) P_i$ dans les cas (1) et (2) ?

Exercice 7 [Dual d'un endomorphisme I]

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie. On considère ${}^t u : E^* \to E^*$ l'endomorphisme dual associé à u défini par ${}^t u(f) = f \circ u$.

1. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et on note $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans cette base. Donner la matrice de ${}^t u$ dans la base $\mathcal{B}^*$, base duale de $\mathcal{B}$.

2. En déduire que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E, alors on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1^*}^{\mathcal{B}_2^*} = {}^t\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}\right)^{-1}.$$

Exercice 8 [Dual d'un endomorphisme II]

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie (sur k) et $u : E \to F$ un application linéaire. On considère ${}^t u : F^* \to E^*$ l'endomorphisme dual associé à u défini par ${}^t u(f) = f \circ u$.

1. Calculer $\mathrm{Ker}({}^t u)$ et $\mathrm{Im}({}^t u)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

2. En déduire que ${}^t u$ est injective (resp. surjective) si et seulement si u est surjective (resp. injective).

3. Dans le cas où $E = F$, exprimer la relation qui existe entre ${}^t({}^t u) : E^{**} \to E^{**}$ et u.

Exercice 9 [Dual de $\mathrm{End}(E)$]

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k.

1. On se donne $u \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que l'application :

$$\mathrm{Tr}(u-) : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & k \\ v & \longmapsto & \mathrm{Tr}(uv). \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\mathrm{End}(E)$.

2. Montrer que l'application

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{End}(E) & \longrightarrow & \mathrm{End}(E)^* \\ u & \longmapsto & \mathrm{Tr}(u-). \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

3. Que peut-on dire d'une forme linéaire $\varphi \in \mathrm{End}(E)^*$ vérifiant $\varphi(u \circ v) = \varphi(v \circ u)$ pour tout $(u, v) \in \mathrm{End}(E)$?

Exercice 10 [L'algèbre $\mathrm{End}(E)$]

Ici E désigne un espace vectoriel de dimension finie (sur un corps quelconque).

1. Montrer que les automorphismes d'algèbre de $\mathrm{End}(E)$ sont intérieurs :
si $\varphi : \mathrm{End}(E) \to \mathrm{End}(E)$ est un automorphisme vérifiant $\varphi(u \circ v) = \varphi(u) \circ \varphi(v)$ pour tout $(u, v) \in \mathrm{End}(E)$, alors il existe $u_\varphi \in \mathrm{End}(E)$ tel que $\forall v \in \mathrm{End}(E)$, $\varphi(v) = u_\varphi^{-1} \circ v \circ u_\varphi$.

2. Montrer que $\mathrm{End}(E)$ est une algèbre simple : les seuls idéaux bilatères de $\mathrm{End}(E)$ sont $\{0\}$ et $\mathrm{End}(E)$ elle-même (un idéal bilatère, c'est un idéal à droite et à gauche).

Exercice 11 [Idéaux à gauche de $\mathrm{End}(E)$]

On fixe $F \subset E$ un sous-espace de E (espace vectoriel de dimension finie sur un corps k) et on considère
$$\mathcal{I}_F := \{u \in \mathrm{End}(E) \mid F \subset \mathrm{Ker}(u)\}.$$

1. Vérifier que $\mathcal{I}_F$ est un idéal à gauche de $\mathrm{End}(E)$ et que
$$\bigcap_{u \in \mathcal{I}_F} \mathrm{Ker}(u) = F.$$

Réciproquement, considérons $\mathcal{I} \subset \mathrm{End}(E)$ un idéal à gauche et notons
$$F_{\mathcal{I}} := \bigcap_{u \in \mathcal{I}} \mathrm{Ker}(u).$$

2. Soient $u \in \mathcal{I}$ et $v \in \mathrm{End}(E)$ tels que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. Montrer que $v \in \mathcal{I}$.

3. Si p et q sont 2 projecteurs qui sont de plus dans $\mathcal{I}$, montrer qu'il existe un projecteur $r \in \mathcal{I}$ tel que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

4. Construire un projecteur $p \in \mathcal{I}$ tel que $\mathrm{Ker}(p) = F_{\mathcal{I}}$ et conclure que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{F_{\mathcal{I}}}$.

Les idéaux à gauche de $\mathrm{End}(E)$ sont donc exactement paramétrés par les sous-espaces vectoriels de E. Qu'en est-il des idéaux à droite ?