Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 3 (1h30)

Le sujet est long mais les trois dernières questions de l'exercice 3 (**4.a.**, **4.b.** et **4.c.**) sont hors barème. Un barème indicatif est donné pour chaque exercice (points par question).

Exercice 1 (sur 6 points : 1–2–1–1–1)

Dans cet exercice, on utilise la notation habituelle J_n pour désigner un bloc de Jordan de taille n. L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace des matrices symétriques complexes.

1. Vérifier que la matrice $S_n = (\delta_{i+j,n+1})_{i,j=1}^n$ est une matrice symétrique et inversible et que l'on a $S_nJ_n \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

2. En déduire que, pour toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $SM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.

3. Montrer qu'une matrice complexe S symétrique et inversible peut s'écrire $S = {}^tPP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

4. En déduire que toute matrice complexe est semblable à une matrice symétrique (complexe).

5. Dans les questions ci-dessus, où a-t-on utilisé le fait que l'on travaillait sur $\mathbb{C}$? Le résultat est-il vrai sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 (sur 6 points : 2–1–1–2)

Dans cet exercice, $\mathrm{U}_n \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ désigne le groupe des matrices unitaires et $\mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ le sous-espace des matrices triangulaires supérieures.

1. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe T une matrice triangulaire supérieure et $U \in \mathrm{U}_n$ telles que $P = UT$ (on pourra penser à P comme la famille de ses colonnes par exemple).

2. En déduire que toute matrice complexe est unitairement semblable à une matrice triangulaire supérieure :

$$\forall\, M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists\, (U, T) \in \mathrm{U}_n \times \mathcal{T}_n(\mathbb{C}),\ M = UTU^*.$$

3. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ une matrice complexe et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres (comptées avec multiplicités).

3.a. Calculer $\mathrm{Tr}(A^*A)$.

3.b. Montrer que

$$A \text{ est normale} \iff \sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 .$$

Exercice 3 (sur 8 points : 1–1–2–1–1–2)

On note $\mathcal{N}_n(K) \subset \mathrm{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille $n \geq 1$ (avec K un corps de caractéristique différente de 2) et $\mathcal{T}_n(K)$ (resp. $\mathcal{T}_n^+(K)$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n (resp. l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de diagonale nulle). On souhaite montrer l'énoncé suivant :

$$\text{Si } V \subset \mathcal{N}_n(K) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{M}_n(K), \text{ alors } \dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

1. Donner un exemple de sous-espace vectoriel $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ avec $\dim(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2. On considère la forme quadratique $q\colon \mathrm{M}_n(K) \to K$ définie par $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ et on note $(E_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ la base canonique de $\mathrm{M}_n(K)$.

2.a. Calculer $\mathrm{Tr}(ME_{i,j})$ pour $M \in \mathrm{M}_n(K)$ et $1 \leq i, j \leq n$.

2.b. Montrer que q est non dégénérée et que $q(M) = 0$ pour tout $M \in \mathcal{N}_n(K)$.

2.c. En déduire que, si $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ est un sous-espace vectoriel, alors $\mathrm{Tr}(MN) = 0$ pour tout $(M, N) \in V$.

3. Dans cette question, on suppose que le corps K est celui des nombres réels $K = \mathbb{R}$.

3.a. Calculer la signature de la forme q en exhibant des sous-espaces de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale sur lesquels la forme q est définie négative/positive.

3.b. Soit alors $V \subset \mathcal{N}_n(\mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel. Montrer que $\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Pour cela, raisonner par l'absurde et considérer $V \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques).

4. On revient au cas général où le corps K est quelconque. On se donne $V \subset \mathcal{N}_n(K)$ et on note $V_T\colon = V \cap \mathcal{T}_n^+(K)$. On fixe également $W \subset V$ un supplémentaire de V_T dans V : $V = V_T \oplus W$.

4.a. Calculer $\mathcal{T}_n^+(K)^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{T}_n^+(K)$ pour la forme q et en déduire que $\mathcal{N}_n(K) \cap \mathcal{T}_n^+(K)^\perp = \mathcal{T}_n^+(K)$.

4.b. Montrer que $W \cap \mathcal{T}_n^+(K)^\perp \subset V_T$ puis que $W \cap \mathcal{T}_n^+(K)^\perp = \{0\}$.

4.c. Établir l'inclusion $W \oplus \mathcal{T}_n^+(K)^\perp \subset V_T^\perp$ et en déduire que $\dim(V) \leq \dfrac{n(n-1)}{2}$.