Université de Rennes

Algèbre linéaire et bilinéaire

Contrôle Continu n° 2 (1h)

Exercice 1 (Questions de cours)

Soient E un k-espace vectoriel (avec k de caractéristique $\neq 2$), $F \subset E$ un sous-espace et $q\colon E \to k$ une forme quadratique.

1. Donner la définition du noyau de q (noté $N(q)$) et celle de $F^\perp$, l'orthogonal de F pour q.

2. Donner (sans démonstration) la formule permettant de calculer $\dim\left(F^\perp\right)$ en fonction de F et $N(q)$.

Exercice 2

Donner la forme de Jordan de la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

On fournira également une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A est sous forme de Jordan.

Exercice 3

Soient E un espace vectoriel sur un corps k et $u \in \mathrm{End}(E)$.

1. On suppose que u est cyclique et on note $x \in E$ un vecteur cyclique pour u, c'est-à-dire vérifiant $E = k[u] \cdot x$. Montrer que si $v \in \mathrm{End}(E)$ commute avec u, alors v est uniquement déterminé par $v(x)$.

2. En déduire que, si v commute avec u (toujours supposé cyclique), alors il existe $P \in k[X]$ tel que $v = P(u)$.

3. On considère $E = k^4$ et $u \in \mathrm{End}(E)$ donné dans la base canonique de E par la matrice

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} \quad \text{(avec } J_2 \text{ un bloc de Jordan de taille 2).}$$

Montrer que l'endomorphisme donné par la matrice par blocs

$$v = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie $u \circ v = v \circ u$ mais que v n'est pas un polynôme en u.