**Algèbre linéaire et bilinéaire**

*Contrôle Continu n° 1* (1h)

## Exercice 1 (Questions de cours)

**1.** Donner la définition du polynôme minimal $\mu_u$ d'un endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ défini sur un $k$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Si $x \in E$, donner également la définition du polynôme minimal ponctuel $\mu_{u,x}$ de $u$ en $x$ et rappeler la relation de divisibilité qui lie $\mu_{u,x}$ et $\mu_u$.

**2.** Donner un exemple (dans $E = k^2$) d'un endomorphisme $u$ et d'un vecteur $x \in E$ avec $\mu_{u,x} \neq \mu_u$.

## Exercice 2

Soit $E$ un $k$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$, on note $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$ et $\phi_{\mathcal{B}} \in \mathrm{Hom}(E, E^*)$ l'isomorphisme tel que $\phi_{\mathcal{B}}(e_i) = e_i^*$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

**1.** Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ des bases de $E$. On note $u \in \mathrm{GL}(E)$ l'endomorphisme tel que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer que

$$^t u \phi_{\mathcal{C}} u = \phi_{\mathcal{B}}.$$

**2.** Soit $M \in \mathrm{M}_n(k)$ la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que $\phi_{\mathcal{C}} = \phi_{\mathcal{B}}$ si et seulement si $^t MM = I_n$.

**3.** En déduire qu'il existe pas d'isomorphisme entre $E$ et $E^*$ qui envoie toute base sur sa base duale.

## Exercice 3

Soient $\lambda \in k$ et $P \in k[X]$ le polynôme unitaire donné par $P := (X - \lambda)^n$. On considère le $k$-espace vectoriel quotient $E = k[X]/Pk[X]$, l'endomorphisme $u \in \mathrm{End}(E)$ induit par la multiplication par $X$ et on note $\pi : k[X] \to E$ l'application linéaire canonique.

**1.** On note $k[X]_{n-1}$ le sous-espace vectoriel de $k[X]$ formé des polynômes de degré $\leqslant n - 1$. Justifier que $k[X]_{n-1}$ est un supplémentaire de $Pk[X]$ dans $k[X]$. En déduire que l'application linéaire

$$\pi|_{k[X]_{n-1}} : \begin{cases} k[X]_{n-1} & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & \pi(A) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

**2.** On pose $e_i = \pi((X - \lambda)^{n-i})$ pour $i \in [\![1, n]\!]$. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ puis déterminer la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B}$.