

(507) LA CORDE ÉLASTIQUE

Résumé : On considère une corde formé de ressorts enchaînés les uns aux autres.

Thème applicatif, mots clefs : propagation d'ondes

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury demande que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur. Il est souhaitable que vous organisiez votre présentation comme si le jury n'avait pas connaissance du texte. Le jury aura néanmoins le texte sous les yeux pendant votre exposé.*

On s'intéresse à la modélisation du mouvement d'une corde élastique de longueur finie quand on la lâche à l'instant $t = 0$ à partir d'une certaine forme initiale et avec une certaine vitesse initiale. Les notions d'élasticité et de corde étant relativement délicates à définir de façon correcte, on va adopter une approche heuristique, qui est d'ailleurs une des premières historiquement utilisées pour traiter ce genre de problèmes au millénaire précédent. Naturellement, la disponibilité des ordinateurs permet aujourd'hui de donner une nouvelle jeunesse à cette approche. L'idée de la modélisation, très simple, consiste à remplacer la corde par un système discret formé d'un nombre fini de masses ponctuelles reliées en chaîne par des ressorts sans masse.

Pour simplifier, on se placera dans le cas où la corde se déplace dans le plan \mathbb{R}^2 , représenté en coordonnées cartésiennes dans la base canonique (e_1, e_2) .

1. Équations du mouvement du système discret

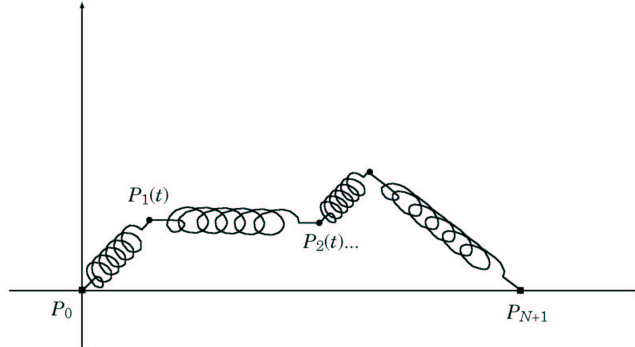
Comme tout un chacun peut le constater, un ressort est un système mécanique constitué d'un fil d'acier plus ou moins fin, enroulé en hélice à pas plus ou moins grand. Ce ressort a une longueur au repos l_0 . Si l'on veut étirer ou compresser ce ressort, pour l'amener à une longueur l , on doit en première approximation (c'est-à-dire quand l reste voisin de l_0) appliquer à ses extrémités une force f dans son axe, dirigée vers l'intérieur du ressort en compression et l'extérieur en extension, et de norme égale à

$$(1) \quad \|f\| = k \frac{|l - l_0|}{l_0}.$$

La constante k est appelée *raideur du ressort*. Plus elle est grande, plus on doit tirer ou appuyer fort sur le ressort pour réaliser une même déformation. On va faire l'hypothèse idéale que la relation (1) reste vraie pour toutes les valeurs de l .

(507) La corde élastique

Soit donc un système de N masses ponctuelles identiques (pour simplifier) de masse m , enchaînées par $N - 1$ ressorts identiques (encore pour simplifier). À l'instant t , la masse numéro i se trouve située au point $P_i(t)$. On accroche le système à deux points fixes P_0 et P_{N+1} en reliant la masse numéro 1 à P_0 et la masse numéro N à P_{N+1} par deux ressorts supplémentaires. Pour fixer les idées, on prendra $P_0 = (0,0)$ et $P_{N+1} = (1,0)$. On suppose que le système est en apesanteur.



Masses et ressorts.

À l'instant t , la masse numéro i est donc soumise à l'action de deux forces, celle exercée par le ressort qui la joint à la masse numéro $i - 1$ (ou au point P_0 si $i = 1$) notée $f_{i,i-1}$ et celle exercée par le ressort qui la joint à la masse numéro $i + 1$ (ou au point P_{N+1} si $i = N$) notée $f_{i,i+1}$. Comme les ressorts sont supposés être sans masse, il suffit d'écrire la loi de Newton pour chacune des masses pour décrire l'évolution du système. Il vient

$$(2) \quad m \frac{d^2 P_i}{dt^2} = f_{i,i-1} + f_{i,i+1} \text{ pour } i = 1, \dots, N.$$

D'après ce que l'on a dit plus haut sur le comportement des ressorts, on a

$$(3) \quad \begin{cases} f_{i,i-1} = k \left(\frac{\|P_i(t) - P_{i-1}(t)\|}{l_0} - 1 \right) \frac{P_{i-1}(t) - P_i(t)}{\|P_i(t) - P_{i-1}(t)\|}, \\ f_{i,i+1} = k \left(\frac{\|P_i(t) - P_{i+1}(t)\|}{l_0} - 1 \right) \frac{P_{i+1}(t) - P_i(t)}{\|P_i(t) - P_{i+1}(t)\|}. \end{cases}$$

Le système (2) est donc un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre. On le ramène de façon standard à un système du premier ordre en introduisant une matrice $4 \times N$ notée Y dont les éléments sont donnés par

$$(4) \quad \begin{cases} Y_{1,i}(t) = P_i(t) \cdot e_1, & Y_{2,i}(t) = P_i(t) \cdot e_2, \\ Y_{3,i}(t) = \frac{dP_i}{dt}(t) \cdot e_1, & Y_{4,i}(t) = \frac{dP_i}{dt}(t) \cdot e_2. \end{cases}$$

Le système s'écrit alors

$$(5) \quad \frac{dY}{dt}(t) = F(Y),$$

où

$$(6) \quad \begin{cases} F(Y)_{1,i} = Y_{3,i}, & F(Y)_{2,i} = Y_{4,i}, \\ F(Y)_{3,i} = \frac{k}{ml_0} \left[(n_i^-(Y) - l_0) \frac{Y_{1,i-1} - Y_{1,i}}{n_i^-(Y)} + (n_i^+(Y) - l_0) \frac{Y_{1,i+1} - Y_{1,i}}{n_i^+(Y)} \right], \\ F(Y)_{4,i} = \frac{k}{ml_0} \left[(n_i^-(Y) - l_0) \frac{Y_{2,i-1} - Y_{2,i}}{n_i^-(Y)} + (n_i^+(Y) - l_0) \frac{Y_{2,i+1} - Y_{2,i}}{n_i^+(Y)} \right], \end{cases}$$

avec

$$(7) \quad n_i^\pm(Y) = \sqrt{(Y_{1,i\pm 1} - Y_{1,i})^2 + (Y_{2,i\pm 1} - Y_{2,i})^2}.$$

Il faut naturellement compléter le système (5)–(7) par une condition initiale

$$(8) \quad Y(0) = Y_0,$$

ce qui revient à se donner la position initiale et la vitesse initiale de chacune des N masses. Il n'est alors pas très difficile de montrer que si la position initiale est telle que deux masses successives ne sont pas situées en un même point, alors il existe t^* tel que le problème de Cauchy (5)–(8) admet une solution et une seule sur l'intervalle $[0, t^*[$.

2. Équilibre et linéarisation au voisinage de l'équilibre

Intuitivement, on se rend compte que si la modélisation est correcte, le système devrait être en équilibre dans la configuration Y^* où toutes les masses sont alignées sur l'axe qui joint P_0 à P_{N+1} et équidistantes entre elles ainsi que des extrémités. Vérifions que c'est bien le cas. La configuration décrite ci-dessus correspond à

$$Y_{3,i}^* = Y_{4,i}^* = 0 \text{ (vitesse nulle)}$$

et

$$Y_{1,i}^* = \frac{i}{N+1}, \quad Y_{2,i}^* = 0 \text{ (point alignés équidistants)}.$$

On voit donc que $n_i^\pm(Y^*) = \frac{1}{N+1}$ et $Y_{1,i+1}^* - Y_{1,i}^* = -(Y_{1,i-1}^* - Y_{1,i}^*) = \frac{1}{N+1}$. Par conséquent, on a bien $F(Y^*) = 0$.

On peut tenter d'étudier la stabilité asymptotique de ce point d'équilibre. Pour cela, il faut calculer la différentielle de l'application F au point Y^* . C'est une application linéaire de $M_{4,N}$ dans $M_{4,N}$. Il est relativement malaisé d'exprimer cette différentielle comme une matrice $4N \times 4N$ des dérivées partielles des composantes de F . Il est plus simple de calculer $F(Y^* + H)$ et d'effectuer un développement limité au premier ordre en H , qui fournit aussi bien cette différentielle. En procédant de la sorte, on obtient

$$(9) \quad \begin{cases} (DF(Y^*)H)_{1,i} = H_{3,i}, & (DF(Y^*)H)_{2,i} = H_{4,i}, \\ (DF(Y^*)H)_{3,i} = \frac{k}{ml_0} (H_{1,i-1} - 2H_{1,i} + H_{1,i+1}), \\ (DF(Y^*)H)_{4,i} = \frac{k}{ml_0} [1 - (N+1)l_0] (H_{2,i-1} - 2H_{2,i} + H_{2,i+1}), \end{cases}$$

avec la convention

$$H_{1,0} = H_{2,0} = H_{1,N+1} = H_{2,N+1} = 0.$$

(507) La corde élastique

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $DF(Y^*)$. Cette valeur propre doit satisfaire

$$(10) \quad \begin{cases} H_{3,i} = \lambda H_{1,i}, & H_{4,i} = \lambda H_{2,i}, \\ \frac{k}{ml_0}(H_{1,i-1} - 2H_{1,i} + H_{1,i+1}) = \lambda H_{3,i}, \\ \frac{k}{ml_0}[1 - (N+1)l_0](H_{2,i-1} - 2H_{2,i} + H_{2,i+1}) = \lambda H_{4,i}, \end{cases}$$

pour un certain H non nul. On constate que ce problème de valeurs propres se découple en deux systèmes :

$$(11) \quad \begin{cases} H_{3,i} = \lambda H_{1,i}, \\ \frac{k}{ml_0}(H_{1,i-1} - 2H_{1,i} + H_{1,i+1}) = \lambda^2 H_{1,i}, \end{cases}$$

et

$$(12) \quad \begin{cases} H_{4,i} = \lambda H_{2,i}, \\ \frac{k}{ml_0}[1 - (N+1)l_0](H_{2,i-1} - 2H_{2,i} + H_{2,i+1}) = \lambda^2 H_{2,i}, \end{cases}$$

La matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est symétrique négative. Les valeurs propres de (11) sont donc imaginaires pures et celles de (12) imaginaires pures si $1 - (N+1)l_0 > 0$ et réelles strictement positives et strictement négatives si $1 - (N+1)l_0 < 0$.

Pour ce qui concerne la stabilité asymptotique du système non linéaire, on ne peut donc pas conclure de la sorte quand $1 - (N+1)l_0 > 0$. Par contre, quand $1 - (N+1)l_0 < 0$, l'équilibre est instable. Remarquons que $(N+1)l_0$ n'est autre que la longueur totale des ressorts mis bout à bout, on voit que cette condition équivaut à ce que les ressorts soient tous en compression stricte à l'équilibre. L'instabilité dans la direction transverse dans ce cas correspond bien à l'intuition physique de la situation.

Plaçons-nous dans le cas où l'équilibre Y^* est en extension, c'est-à-dire $1 - (N+1)l_0 > 0$ et considérons le système linéarisé

$$(13) \quad \frac{dH}{dt}(t) = DF(Y^*)H(t),$$

avec une condition initiale

$$(14) \quad H(0) = H_0.$$

La solution de ce problème de Cauchy n'est autre que

$$H(t) = e^{tDF(Y^*)}H_0,$$

et d'après la discussion sur les valeurs propres précédentes, et compte tenu du fait que les valeurs propres μ_j de A sont distinctes, on voit que la solution générale est une combinaison linéaire

d'oscillations harmoniques dans l'axe aux fréquences $\sqrt{k\mu_j/ml_0}$ et d'oscillations harmoniques transverses aux fréquences $\sqrt{k(1-(N+1)l_0)\mu_j/ml_0}$. Cette dernière formule montre que les fréquences propres de vibration transverse sont d'autant plus élevées que les ressorts sont tendus à l'équilibre.

3. Passage du discret au continu

Pour obtenir un véritable modèle de corde, on fait maintenant tendre le nombre de masses vers l'infini en les reliant par des ressorts dont la longueur tend vers 0. Pour que l'objet « limite » ainsi obtenu ait une densité linéique à l'équilibre ρ donnée, il faut que $m(N+1) \rightarrow \rho$ quand $N \rightarrow +\infty$. On prendra donc $m = \rho/(N+1)$. De même, on suppose que le système à l'équilibre est étiré de façon constante, c'est-à-dire que sa longueur totale si on ne fixait pas les extrémités serait un nombre $e < 1$ indépendant de N . Ceci conduit à poser $l_0 = e/(N+1)$. Enfin, comme la raideur des ressorts ne dépend pas de leur longueur, on la prendra indépendante de N .

On traite seulement le cas du système linéarisé. Comme pour le cas des valeurs propres, celui se découple en

$$(15) \quad \frac{d^2 H_{1,i}}{dt^2} = \frac{k(N+1)^2}{\rho e} (H_{1,i-1} - 2H_{1,i} + H_{1,i+1})$$

et

$$(16) \quad \frac{d^2 H_{2,i}}{dt^2} = \frac{k(1-e)(N+1)^2}{\rho e} (H_{2,i-1} - 2H_{2,i} + H_{2,i+1}).$$

Les masses à l'équilibre sont situées aux points équidistants $(x_i, 0)$ avec $x_i = i/(N+1)$. Soit $\Delta x = 1/(N+1)$. Comme $H_{1,i}$ représente le déplacement axial de la masse numéro i et $H_{2,i}$ son déplacement transverse, on reconnaît dans (15)–(16) la semi-discrétisation en espace par différences finies de deux équations des ondes

$$(17) \quad \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho e} \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} = \frac{k(1-e)}{\rho e} \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}.$$

On obtient donc exactement les mêmes résultats de convergence des vecteurs H_1 et H_2 vers les fonctions h_1 et h_2 que pour les méthodes de différences finies pour l'équation des ondes. La fonction h_1 représente donc le déplacement axial de la corde et la fonction h_2 son déplacement transverse. On observe une vitesse de propagation des ondes axiales égale à $\sqrt{\frac{k}{\rho e}}$ alors que les ondes transverses se propagent à la vitesse $\sqrt{\frac{k(1-e)}{\rho e}}$.

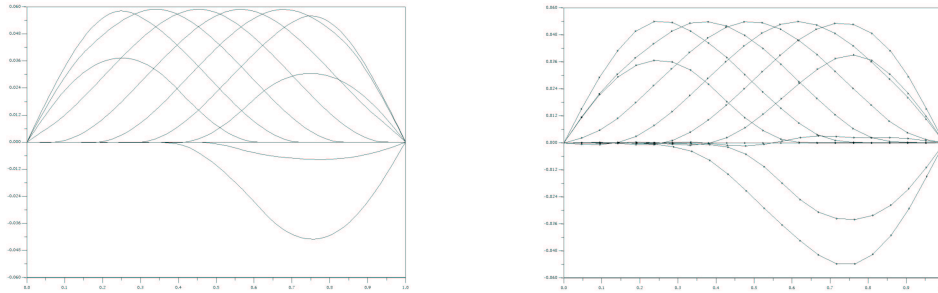
4. Étude numérique

Le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires (5)–(8) se prête facilement à la simulation numérique. Il suffit d'implémenter une méthode classique d'approximation comme par exemple la méthode d'Euler ou la méthode de Runge-Kutta explicite d'ordre 4.

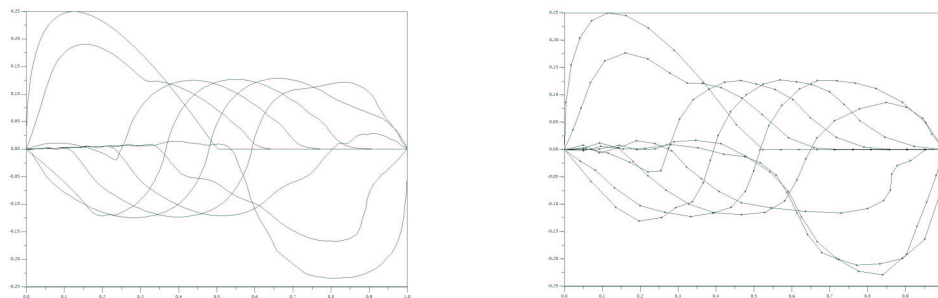
On présente plusieurs résultats de calcul. On a pris une raideur $k = 10$ et un étirement $e = 0,5$, et soit a) $N = 100$ masses ponctuelles de masse $m = 0,2$, soit b) $N = 20$ masses de $m = 0,08$. On teste ensuite plusieurs configurations initiales. Les données initiales sont sous la forme $P_i(0) = (x_1(i/(N+1)), x_2(i/(N+1)))^T$, $dP_i/dt(0) = (v_1(i/(N+1)), v_2(i/(N+1)))^T$ et on se donne les fonctions x_1, x_2, v_1 et v_2 .

Remarque importante. Les courbes qui sont données plus loin, le sont uniquement à titre indicatif, afin de donner un idée du type d'évolution auquel on doit s'attendre dans chaque cas. On ne demande pas de les reproduire exactement.

Cas 1. Vibrations de faible amplitude. Données initiales : $x_1(x) = x$, $x_2(x) = 0$, $v_1(x) = 0$ et $v_2(x) = 0,25 - 4(0,25 - x)^2$ si $x < 0,5$, $v_2(x) = 0$ sinon. Méthode de Runge-Kutta, pas de temps $\Delta t = 0,001s$, 1600 itérations, graphes toutes les 0,16s. A gauche a), à droite b).



Cas 2. Données initiales $x_1(x) = 2x^2$ et $x_2(x) = 0,25 - 4(0,25 - x)^2$ si $x < 0,5$, $x_1(x) = x$ et $x_2(x) = 0$ sinon ; $v_1(x) = v_2(x) = 0$. Même discrétisation avec 1280 itérations. A gauche a), à droite b).



Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

(507) La corde élastique

- Présenter un modèle analogue pour un système masses/ressorts soumis à la pesanteur et fixé seulement à une extrémité.
- Présenter un modèle analogue pour un système masses/ressorts où les masses sont en outre soumises à un frottement visqueux, c'est-à-dire une force proportionnelle et opposée à leur vitesse. Étudier la stabilité asymptotique de l'équilibre.
- Effectuer des expériences numériques avec d'autres données initiales. On pourra éventuellement présenter l'évolution en direct sous la forme d'une animation.
- Tester la linéarisation du §2 à l'aide du schéma numérique.
- Tester l'instabilité en compression du §2 à l'aide du schéma numérique.